Finanse

# Wycena europejskich opcji kupna w modelach rynku z czasem dyskretnym

## Uogólnienia formuły Blacka-Scholesa

Emilia Fraszka-Sobczyk


WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

# Wycena europejskich opcji kupna w modelach rynku z czasem dyskretnym

Uogólnienia formuły Blacka-Scholesa

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Finanse

# Wycena europejskich opcji kupna w modelach rynku z czasem dyskretnym

## Uogólnienia formuły Blacka-Scholesa

Emilia Fraszka-Sobczyk

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Łódź 2020

Emilia Fraszka-Sobczyk – Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny
Instytut Ekonometrii, Katedra Teorii i Analiz Systemów Ekonomicznych
90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 37/39

RECENZENT
*Marek Kałuszka*

REDAKTOR INICJUJĄCY
*Beata Koźniewska*

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
*Barbara Sikora*

SKŁAD I ŁAMANIE
*AGENT PR*

KOREKTA TECHNICZNA
*Leonora Gralka*

PROJEKT OKŁADKI
*Agencja Reklamowa efectoro.pl*

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/wrangler



Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.09555.19.0.M

Ark. wyd. 7,0; ark. druk. 13,375

ISBN 978-83-8220-136-9
e-ISBN 978-83-8220-137-6

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. 42 665 58 63

# Spis treści

# Wstęp

Niniejsza monografia jest poświęcona wycenie opcji europejskiej na akcję w dwóch uogólnieniach modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR). Opcja kupna akcji, opiewająca na daną liczbę akcji określonej spółki, jest instrumentem finansowym, który daje jego posiadaczowi prawo nabycia w przyszłości od wystawcy (sprzedawcy) opcji określonej liczby akcji po cenie wykonania K (określanej terminem *strike price* lub *exercise price*), ustalonej przez obie strony w chwili zawarcia kontraktu. Kontrakt opcyjny daje nabywcy opcji prawo, a nie obowiązek jej realizacji. W przypadku opcji europejskiej posiadacz opcji może zrealizować ją jedynie w ustalonej chwili czasu $T$, która została określona w momencie zawierania kontraktu opcyjnego. Oczywiście nabywca opcji musi zapłacić pewną kwotę (cenę opcji) wystawcy opcji za prawo nabycia akcji po cenie wykonania $K$.

Prawidłowa wycena opcji ma fundamentalne znaczenie dla poprawnego funkcjonowania rynków finansowych. Zagadnienie to cieszy się więc ogromną popularnością zarówno w literaturze akademickiej, jak i wśród inwestorów giełdowych.

W 1973 roku Fischer Black i Myron Scholes w artykule *The pricing of options and corporateliabilities* zaprezentowali stochastyczny model wyceny opcji i wyprowadzili słynny wzór na cenę europejskiej opcji kupna wystawionej na akcje. Wzór ten nosi nazwę formuły Blacka-Scholesa i jest rozwiązaniem pewnego stochastycznego równania różniczkowego. W 1979 roku John Cox, Stephen Ross i Mark Rubinstein w pracy *Option pricing. A simplified approach* przedstawili dyskretny model zmian cen akcji i udowodnili wzór na cenę opcji. Ponadto pokazali przejście graniczne ceny opcji. Okazało się, iż przy dużej liczbie chwil handlowania graniczna wycena opcji europejskiej przez strategię replikującą w modelu dyskretnym pokrywa się z formułą Blacka-Scholesa.

Idea klasycznej pracy dotyczącej modelu CRR (Cox, Ross, Rubinstein, 1979) polegała na:

1) przybliżeniu wzoru Blacka-Scholesa prostszymi formułami dyskretnymi;

2) wyprowadzeniu wzoru Blacka-Scholesa jako granicy formuł dyskretnych elementarnymi metodami zrozumiałymi dla ekonomistów.

Podobna idea jest motywacją tej monografii.

Monografia poświęcona została dwóm uogólnionym modelom Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR), wyznaczaniu formuły na wycenę opcji w zaprezentowanych modelach oraz zbieżności tych wzorów do formuł typu Blacka-Scholesa.

W rozdziale 1 przypomniane zostały podstawowe założenia modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina, twierdzenie Blacka-Scholesa, a także dostatecznie ogólnie sformułowane twierdzenie graniczne.

Rozdział 2 monografii przedstawia pewne uogólnienie modelu CRR (zob. Jarrow, Rudd, 1983), w którym założono, że możliwe górne i dolne zmiany cen akcji między chwilami handlowania $u_n$, $d_n$ nie spełniają klasycznego warunku modelu CRR, tj. $u_n \cdot d_n = 1$. Założono również, że średnia zmiana logarytmu ceny akcji po $n$ chwilach wynosi $\rho$, $\rho \in R$, czyli $E\left[\ln\left(S(n)/s_0\right)\right] = \rho$ (w klasycznym modelu CRR: $E\left[\ln\left(S(n)/s_0\right)\right] = 0$). Otrzymano wówczas nowe formuły na możliwe górne i dolne zmiany cen akcji spełniające warunek: $u_n \cdot d_n = \exp\{2\rho/n\}$. Ponadto rozważono przejście graniczne przy $n \to \infty$ uogólnionego modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina do analogu modelu Blacka-Scholesa. Uogólnienie modelu CRR lepiej odzwierciedla rzeczywistość na rynku finansowym, gdyż uwzględnia współczynnik $\rho$ opisujący tendencje zmian ceny akcji. Zaprezentowano także analizę wrażliwości ceny opcji w rozważanym modelu, tj. określono zmiany ceny opcji, które nastąpiły wskutek zmian wartości czynników wpływających na jej wartość. W rozdziale 2 udowodniono również pomocnicze lematy wykorzystane w rozdziałach 3–5.

W rozdziale 3 rozważono model typu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie dla dwóch długich jednostek czasu (np. miesięcy). W każdej z tych jednostek czasu przyjęto różne stopy procentowe rachunku bankowego (kredytu, obligacji) oraz odmienne współczynniki zmienności cen akcji (*volatility*) $\sigma$. Następnie utworzono ciąg uogólnionych modeli CRR (czyli tzw. kalibrację modelu CRR) i udowodniono, że odpowiednie formuły na wycenę opcji w modelach dyskretnych są zbieżne do uogólnionej formuły Blacka-Scholesa. W formule granicznej nadal pojawia się dystrybuanta rozkładu logarytmiczno-normalnego. W rozdziale 3 udowodniona jest również jednostajna zbieżność ze względu na początkową cenę akcji (przyjmującą wartości na dodatniej półprostej) formuły na cenę opcji w modelu CRR do formuły Blacka-Scholesa.

Ponadto przedstawione są równania stochastyczne dla granicznego procesu cen akcji w zaprezentowanym modelu.

W rozdziałach 4 i 5 analizowano analogiczny jak w rozdziale 3 model typu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie – odpowiednio dla trzech i dowolnej liczby długich jednostek czasu (np. miesięcy). Udowodniono wzory na graniczną wycenę opcji oraz jednostajną zbieżność ze względu na początkową cenę akcji formuły na cenę opcji w modelu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie do formuły typu Blacka-Scholesa. W ostatnim podrozdziale wyliczono współczynniki wrażliwości granicznej ceny opcji w modelu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie.

Zaprezentowany w rozdziałach 3–5 uogólniony model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie jest bardziej realistyczny niż klasyczny model CRR – z uwagi na zmieniające się stopy procentowe, współczynniki *volatility* oraz możliwe górne i dolne zmiany ceny akcji w poszczególnych jednostkach czasu. Ponadto, korzystając z udowodnionej jednostajnej zbieżności (ze względu na początkową cenę akcji) formuły na cenę opcji w modelu CRR do formuły Blacka-Scholesa oraz jednostajnej zbieżności (ze względu na początkową cenę akcji) formuły na cenę opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie do formuły typu Blacka-Scholesa, wyprowadzono elementarnymi metodami (bez analizy stochastycznej) wzór typu Blacka-Scholesa na graniczną wycenę opcji dla przedstawionego uogólnionego modelu Coxa-Rossa--Rubinsteina (CRR) z parametrami zmieniającymi się w czasie. Jednocześnie udowodniona zbieżność rozważanych formuł dyskretnych typu CRR stanowi teoretyczne uzasadnienie możliwych przybliżeń numerycznych ceny opcji.

Rozdział 6 stanowi empiryczną część monografii. Sprawdzono, w jakim stopniu wycena opcji na podstawie modelu Blacka-Scholesa oraz zaprezentowanych uogólnień modelu Blacka-Scholesa odzwierciedla wycenę opcji na polskim rynku. Badanie przeprowadzono dla okresu od 27 sierpnia 2019 r. do 20 marca 2020 r. dla opcji kupna na indeks WIG20 o cenach wykonania 1700 punktów, 1800 punktów, 1900 punktów, 2000 punktów, 2100 punktów, 2200 punktów, 2300 punktów z terminem wygaśnięcia 20 marca 2020 r. Przy wyborze najlepszej metody wyceny opcji wykorzystano analizę korelacji dla 140 obserwacji. Przeprowadzono testy istotności współczynników korelacji za pomocą testu *t*-Studenta dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}01$. Policzono błędy standardowe oraz współczynniki zmienności dla omawianych modeli.

W zakończeniu monografii ujęto wnioski płynące z przeprowadzonych badań.

Zawarto również wykaz oznaczeń, dodatek 1, w którym zamieszczono twierdzenia i lematy wykorzystane w rozdziałach 3–5, oraz dodatek 2 zawierający dane rynkowe, a także obliczenia cen opcji na podstawie zaprezentowanych modeli.

W literaturze można odnaleźć wiele publikacji dotyczących modelu CRR (Shreve, 2004; Hoek, Elliott, 2006; Elliot, Kopp, 2005; Musiela, Rutkowski, 2008; Jakubowski, Palczewski, Rutkowski, Stettner, 2006; Hull, 1998), modelu CRR z kosztami transakcji (Cox, Rubinstein, 1985; Stettner, 1997), oszacowania tempa zbieżności formuły CRR wyceny opcji do formuły Blacka-Scholesa (Walsh, 2003; Ratibenyakool, Neammanee, 2019), modyfikacji modelu CRR (Rendleman, Bartter, 1979; Rubinstein, 2000; Jabbour, Kramin, Young, 2001; Karandikar, Rachev, 1995; Rachev, Ruschendorff, 1994) wraz z jego asymptotykami (Chang, Palmer, 2007; Diener, Diener, 2004; Xiao, 2010; Joshi, 2010; Leisen, Reimer, 2006; Heston, Zhou, 2000).

Jednym z rozważanych uogólnień modelu CRR jest model wielomianowy. Należy wspomnieć o pracach: Hua He (1990), Michała Motoczyńskiego i Łukasza Stettnera (1998) oraz Natalii Kan (2005). Modele opisane w wyżej wymienionych opracowaniach dotyczą współczynników stałych w czasie i nie obejmują, rozważanych w niniejszej monografii, modeli z parametrami zmieniającymi się w czasie.

W podrozdziale 2.6 publikacji *Financial Markets in Continuous Time* (Dana, Jeanblanc, 2007) przyjęto podobne założenia jak w rozdziale 2 niniejszej monografii dotyczące możliwych górnych i dolnych zmian cen akcji. Niemniej jednak we wzmiankowanym opracowaniu rozważono inne transformacje zmiennych losowych. Przyjęto pewne korekty dyskretnych zmiennych losowych i w przejściu granicznym zaprezentowanego uogólnienia modelu CRR uzyskano klasyczną formułę Blacka-Scholesa bez poprawek.

Rozdziały 3–5 monografii należy porównać z pracą Van Huu Nguyen i Tran Trong Nguyen (2001), gdzie rozważane są uogólnione modele CRR z parametrami zależnymi od czasu. Dla procesu cen akcji opisanego równaniem stochastycznym (3.2.8) z podrozdziału 3.2.1, tj.

$$\begin{cases} dS_t = r(t) \cdot S_t dt + \sigma(t) \cdot S_t dW_t \ , \ t \in [0,\ T) \\ S_0 = s_0 \ , \end{cases} \tag{3.2.8}$$

(z deterministycznymi współczynnikami $r(\cdot)$ i $\sigma(\cdot)$ zależnymi od czasu) autorzy rozważają przybliżenia dyskretne, uogólnione dwumianowe, ze współczynnikami zależnymi od $N$ (liczby chwil handlowania) oraz od $k$-tej bieżącej chwili handlowania. Ten model dyskretny jest wprawdzie ogólniejszy, ale w przypadku współczynników równania (3.2.8) stałych w dużych jednostkach czasu, badanych w monografii, rozważane byłyby w pracy Nguyen Van Huu i Tran Trong Nguyen (2001) inne przybliżenia dyskretne wyceny opcji – oparte na jednej mierze martyngałowej $Q_N$ dla przedziału [0, $T$] (zależnej od $N$ chwil handlowania). Tutaj dla ustalonego $N$ rozważono różne miary martyngałowe dla poszczególnych dużych jednostek czasu i wzór aproksymacyjny na wycenę opcji w chwili 0 powstaje przez złożenie wzorów dla poszczególnych jednostek czasu. Ponadto przy przejściu granicznym do uogólnionego wzoru Blacka-Scholesa związanego z równaniem (3.2.8) Nguyen Van Huu i Tran Trong Nguyen (2001, theorem 4.4) zakładają, że współczynniki $r(\cdot)$ i $\sigma(\cdot)$ w równaniu (3.2.8) są klasy $C_1(0, T)$. Założenie to nie jest spełnione dla współczynników przedziałami stałych, rozważanych w monografii.

Rozdziały 1–5 monografii stanowią rozwinięcie wyników zawartych w rozprawie doktorskiej (Fraszka-Sobczyk, 2017). Zmiany nastąpiły między innymi w rozdziale 3 (wniosek 3.2.1 i jego dowód), w rozdziale 4 (twierdzenie 4.1.1 wraz z dowodem, wnioski 4.2.1 i 4.2.2 wraz z dowodami, dowód lematu 4.2.2, dowód twierdzenia 4.2.1) oraz w rozdziale 5 (twierdzenie 5.1.1 wraz z dowodem, wnioski 5.2.1 i 5.2.2 wraz z dowodami, dowód lematu 5.2.2, dowód twierdzenia 5.2.1, twierdzenia 5.3.1 i 5.4.1). W niniejszej monografii podano dokładniejsze oszacowanie tempa zbieżności (dokładniej, udowodniono jednostajną zbieżność) formuł na wycenę opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie do formuł typu Blacka-Scholesa. Ponadto monografia została uzupełniona o badania empiryczne (rozdział 6, dodatek 2), przykłady liczbowe (przykład 1.1.1, podrozdział 2.4) oraz wyznaczanie parametrów greckich (podrozdziały 2.3 i 5.5).

Obszerne fragmenty podrozdziałów 2.2, 3.1, 3.3 zostały opublikowane w czasopiśmie „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź" (Fraszka-Sobczyk, 2014; Chojnowska-Michalik, Fraszka-Sobczyk, 2016; Fraszka-Sobczyk, Chojnowska-Michalik, 2019).

Autorka dziękuje dr hab. Marii Annie Chojnowskiej-Michalik, prof. UŁ, i prof. dr. hab. Adamowi Paszkiewiczowi, którym wiele zawdzięcza w swoim dorobku naukowym.

# Rozdział 1
# **Klasyczny model Coxa-Rossa-Rubinsteina (model CRR)**

W monografii rozważany będzie model rynku doskonałego, tj. taki, który spełnia następujące warunki:

1) Stopy procentowe depozytów i kredytów bankowych są jednakowe.
2) Wysokość zaciągniętych przez inwestora kredytów bankowych nie jest ograniczona.
3) Zapewniona jest idealna płynność obrotu wszystkimi instrumentami, można więc kupować i sprzedawać dowolne ilości wszystkich instrumentów.
4) Dopuszczalna jest krótka sprzedaż wszystkich instrumentów.
5) Inwestorzy nie ponoszą żadnych dodatkowych kosztów związanych z zawieraniem transakcji.
6) Zyski z inwestowania w dowolne instrumenty finansowe nie są obciążone podatkami.

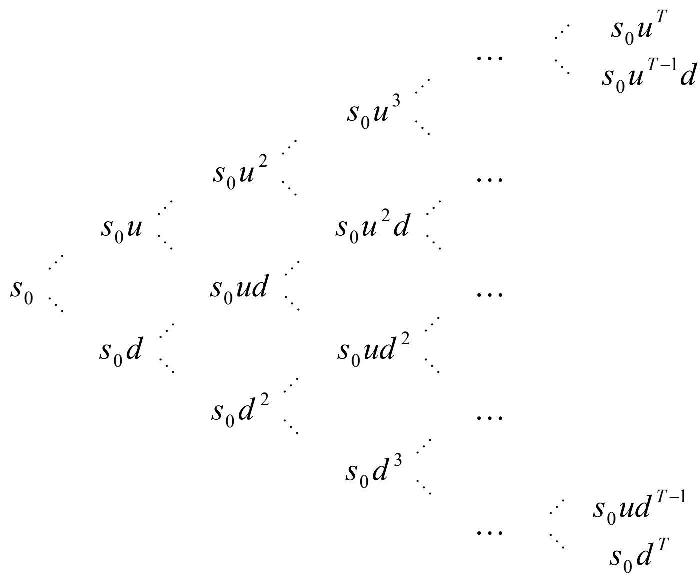
## 1.1. Drzewo dwumianowe. Strategia. Warunek samofinansowania

Podrozdział 1.1 przedstawia podstawowe definicje związane z modelem CRR (zob. Cox, Ross, Rubinstein, 1979; Jakubowski, 2006; Paszkiewicz, 2012).

**Definicja 1.1.1.** Modelem rynku dwumianowym Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR) nazwiemy układ wszystkich ciągów $\left(S(0),\ S(1),\ \ldots,\ S(T)\right)$ spełniających warunki:

$$S(0)=s_0$$
$$S(t)=S(t-1)u \text{ lub } S(t)=S(t-1)d,\ t\in\mathrm{N},\ t\le T,$$

wraz z pewną liczbą $\hat{r}$, przy czym ustalone są $T\in\mathrm{N},\ s_0>0,\ 0<d<\hat{r}<u.$




**Rysunek 1.1.1.** Zmiany cen akcji według modelu dwumianowego
**Źródło:** opracowanie własne na podstawie Cox, Ross, Rubinstein, 1979.

<u>Interpretacja</u>
Ciąg $\left(S(0),\ \ldots,\ S(T)\right)$ przedstawia wszystkie możliwe zmiany ceny akcji, $S(t)$ jest ceną akcji w chwili $t$ (np. w „dniu” $t$) $(t=0,\ 1,\ \ldots,\ T)$, zaś $\hat{r}=e^r$, gdzie $r$ jest jednookresową (np. dzienną) stopą nieryzykownego rachunku bankowego (obligacji).

**Przykład 1.1.1.** Rozważono akcje, których cena w każdym z $n$ kolejnych dni może wzrosnąć $u$ razy lub obniżyć się $d$ razy, przy czym $u>1,\ d=1/u.$ Przyjęto parzystą liczbę dni ($n$-parzyste) oraz założono, że

a) cena akcji w $n$-tym dniu nie ulegnie zmianie w porównaniu z początkową ceną akcji w chwili 0;

b) cena akcji w $n$-tym dniu jest $u^6$ razy wyższa w porównaniu z początkową ceną akcji w chwili 0.

Ile różnych scenariuszy zmian cen akcji można otrzymać w ciągu jednego miesiąca ($n = 30$)?

Ad a) Cena akcji w ciągu rozważanych $n$ dni nie ulega zmianie, zatem liczba wzrostów i liczba spadków ceny akcji są takie same. Wówczas liczba możliwych scenariuszy zmian cen akcji wynosi:

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(n-\frac{n}{2}+1\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Dla $n = 30$

$$\binom{30}{15} = \frac{30\cdot 29\cdot\ldots\cdot 16}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 15} = 155117520.$$

Zatem w ciągu jednego miesiąca można otrzymać 155117520 możliwych scenariuszy zmian ceny akcji przy założeniu, że początkowa i końcowa cena akcji są takie same.

Ad b) Końcowa cena akcji w $n$-tym dniu wynosi: $s_0 u^6 = s_0 u^l d^{n-l} = s_0 u^{2l-n}$.

Stąd $2l - n = 6$ i w konsekwencji $l = \dfrac{n+6}{2}$.

Zatem liczba możliwych scenariuszy zmian cen akcji w ciągu jednego miesiąca wynosi:

$$\binom{n}{\frac{n+6}{2}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{2}+5\right)\cdot\left(\frac{n}{2}+4\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{n}{2}-3\right)} = 86493225.$$

**Definicja 1.1.2.** Strategią nazwiemy układ par funkcji $(\alpha_0(\cdot),\ \beta_0(\cdot))$, $(\alpha_1(\cdot),\ \beta_1(\cdot))$, …, $(\alpha_T(\cdot),\ \beta_T(\cdot))$, przy czym $\alpha_t(\cdot),\ \beta_t(\cdot) \in R$, $t = 0,\ 1,\ ...,\ T$, $\alpha_t(s),\ \beta_t(s)$ są określone dla $s \in \{s_0 d^t,\ s_0 u d^{t-1},\ ...,\ s_0 u^{t-1} d,\ s_0 u^t\}$.

Interpretacja

Gracz giełdowy podejmuje decyzję w chwili $t$ i ustala $\alpha_t(s),\ \beta_t(s)$ w oparciu o obserwacje ceny akcji w chwili $t = 0,\ 1,\ ...,\ T$, tzn. $s \in \{s_0 d^t,\ s_0 u d^{t-1},\ ...,\ s_0 u^{t-1} d,\ s_0 u^t\}$;

$\alpha_t(s)$ jest ilością pieniędzy na rachunku bankowym (w obligacjach) w chwili $t$ (np. w „dniu" $t$ wieczorem), uwzględniającą cenę akcji $s$ w chwili $t$;

$\beta_t(s)$ jest liczbą akcji w chwili $t$ (np. w „dniu" $t$ wieczorem), uwzględniającą cenę akcji $s$ w chwili $t$.

**Uwaga 1.1.1.** W monografii $T$ oznaczać będzie termin wykonania opcji. Oczywiście gracz giełdowy podejmuje decyzję o zmianie składu portfela do chwili $T$, tj. w chwili $T-1$. Wówczas ustala strategię $\left(\alpha_{T-1}(\cdot),\ \beta_{T-1}(\cdot)\right)$ w oparciu o obserwacje ceny akcji $s$ w chwili $T-1$. Zatem $\alpha_{T-1}(s)$ jest ilością pieniędzy na rachunku bankowym (w obligacjach) w chwili $T-1$, zaś $\beta_{T-1}(s)$ jest liczbą akcji w chwili $T-1$, uwzględniającą cenę akcji $s$ w chwili $T-1$. W momencie wygaśnięcia opcji $T$ gracz nie zmienia już składu portfela, tj. $\alpha_T(\cdot) = \alpha_{T-1}(\cdot)$ oraz $\beta_T(\cdot) = \beta_{T-1}(\cdot)$, jednakże ilość jego kapitału w tym momencie liczona jest w oparciu o cenę akcji w chwili $T$.

**Definicja 1.1.3.** Strategię $(\alpha_t(\cdot),\ \beta_t(\cdot))$ nazwiemy strategią samofinansującą, jeżeli dla wszystkich $t = 0,\ 1,\ ...,\ T-1$, spełnione są równania:

$$\alpha_t(s)\cdot \hat{r} + \beta_t(s)\cdot s\cdot u = \alpha_{t+1}(su) + \beta_{t+1}(su)\cdot s\cdot u,$$
$$\alpha_t(s)\cdot \hat{r} + \beta_t(s)\cdot s\cdot d = \alpha_{t+1}(sd) + \beta_{t+1}(sd)\cdot s\cdot d,$$

gdzie $s \in \{s_0 d^t,\ s_0 u d^{t-1},\ ...,\ s_0 u^{t-1} d,\ s_0 u^t\}$.

Interpretacja

Lewa strona równania oznacza wartość portfela na początku chwili (dnia) $t+1$, prawa strona – wartość portfela na koniec chwili (dnia) $t+1$.

Pierwsze równanie odpowiada zmianie ceny akcji $S(t) = s \to S(t+1) = su$, zaś drugie równanie – zmianie ceny akcji $S(t) = s \to S(t+1) = sd$.
Definicja 1.1.3 odzwierciedla fakt, że zmiana wartości portfela zależy tylko od zmian cen i nie ma przypływu gotówki z zewnątrz ani konsumpcji.

**Definicja 1.1.4.** Kapitałem dla strategii $(\alpha_t(\cdot),\ \beta_t(\cdot)),\quad t = 0,\ 1,\ \ldots,\ T$, nazwiemy ciąg funkcji $P_0(\cdot),\ P_1(\cdot),\ \ldots,\ P_T(\cdot)$, przy czym $P_t(s)$ jest określone formułą $P_t(s) = \alpha_t(s) + \beta_t(s) \cdot s$ dla $s \in \{s_0 d^t,\ s_0 u d^{t-1},\ \ldots,\ s_0 u^{t-1} d,\ s_0 u^t\}$.

Interpretacja

$P_t(s)$ jest ilością kapitału gracza giełdowego w chwili $t$ przy cenie akcji $s$ w chwili $t$.

**Definicja 1.1.5.** Opcją kupna typu europejskiego z czasem realizacji $T$ nazwiemy funkcję $C_T(\cdot): \{s_0 d^T,\ s_0 u d^{T-1},\ \ldots,\ s_0 u^{T-1} d,\ \ldots,\ s_0 u^T\} \to R$, określoną następującą formułą:

$$C_T(s) = (s-K)^+ = \begin{cases} s-K & ,\ gdy\ s > K \\ 0 & ,\ gdy\ s \le K \end{cases},$$

gdzie $K$ jest ustaloną liczbą.

Interpretacja

$C_T(S(T))$ jest zobowiązaniem wystawcy opcji w chwili $T$;
$K$ jest ceną w chwili $T$, którą ewentualnie zapłaci posiadacz opcji kupna wystawcy opcji w zamian za dostarczony instrument bazowy (tzw. cena wykonania);
$T$ jest momentem ewentualnej realizacji opcji (tzw. termin wygaśnięcia, termin wykonania).
Cena $K$ jest ustalona przez wystawcę i nabywcę opcji w chwili zawierania kontraktu opcyjnego. W literaturze anglosaskiej $K$ jest określana terminem *strike price* lub *exercise price*, zaś moment $T$ terminem *expiration date*.

Opcja kupna typu europejskiego daje posiadaczowi opcji prawo kupna określonej ilości instrumentu bazowego (np. akcji) po ustalonej cenie wykonania $K$ w terminie wygaśnięcia opcji $T$. Jeśli cena instrumentu bazowego (np. akcji) w chwili $T$ będzie niższa niż cena wykonania, to posiadacz opcji kupna zrezygnuje z wykonania opcji (nie ma sensu kupowanie akcji po cenie wykonania wyższej niż ich aktualna cena rynkowa). Posiadacz opcji kupna zrealizuje opcję, gdy cena wykonania będzie niższa niż aktualna cena rynkowa danego instrumentu bazowego w chwili $T$ (wówczas posiadacz osiągnie zysk). Zatem nabywca opcji nie musi korzystać z uzyskanego prawa kupna określonej ilości instrumentu bazowego (np. akcji), jednakże musi za to prawo zapłacić. Monografia poświęcona jest wycenie tego prawa (cenie opcji kupna typu europejskiego w chwili zawarcia kontraktu) w różnych modelach dyskretnych cen akcji.

**Definicja 1.1.6.** Powiemy, że strategia $(\alpha_t(\cdot),\ \beta_t(\cdot))$, $t=0,\ 1,\ \ldots,\ T$, replikuje opcję kupna typu europejskiego $C_t(\cdot)$, jeżeli
$P_T(S(T))=\alpha_T(S(T))+\beta_T(S(T))\cdot S(T)=C_T(S(T)).$
Wyceną opcji kupna typu europejskiego $C_t(s)$ w chwili $t=0$ nazwiemy liczbę oznaczoną $C_0(s_0)$, jeżeli istnieje strategia samofinansująca replikująca opcję taka, że
$P_0(s_0)=\alpha_0(s_0)+\beta_0(s_0)\cdot s_0=C_0(s_0).$

<u>Interpretacja</u>
$C_0(s_0)$ jest kwotą, którą nabywca opcji płaci wystawcy opcji w chwili zawierania kontraktu.

**Lemat 1.1.1.** Ciąg funkcji $P_t(s)$, $s\in\{s_0d^t,\ s_0ud^{t-1},\ \ldots,\ s_0u^{t-1}d,\ s_0u^t\}$ może być kapitałem pewnej strategii samofinansującej wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:

$$P_t(s)=\frac{1}{\hat{r}}\left[P_{t+1}(su)\cdot p^*+P_{t+1}(sd)\cdot q^*\right], \tag{1.1}$$

gdzie:

$$p^*=\frac{\hat{r}-d}{u-d},\ q^*=\frac{u-\hat{r}}{u-d},\ p^*+q^*=1,\ t\in N,\ 0\le t\le T-1.$$

Dowód. Na to, aby układ funkcji $P_t(\cdot)$ był kapitałem pewnej strategii samofinansującej potrzeba i wystarcza, by dla każdego $t = 0, 1, \ldots, T-1$ istniały liczby $\alpha_t(s),\ \beta_t(s) \in R$, spełniające:

$$P_t(s) = \alpha_t(s) + \beta_t(s) \cdot s \tag{1}$$

oraz

$$\begin{cases} P_{t+1}(su) = \alpha_t(s) \cdot \hat{r} + \beta_t(s) \cdot su \\ P_{t+1}(sd) = \alpha_t(s) \cdot \hat{r} + \beta_t(s) \cdot sd \end{cases}, \tag{2}$$

gdzie $s \in \{s_0 d^t,\ s_0 u d^{t-1},\ \ldots,\ s_0 u^{t-1} d,\ s_0 u^t\}$.

Wyznacznik

$$W := \begin{vmatrix} \hat{r} & su \\ \hat{r} & sd \end{vmatrix} = s\hat{r}(d-u) \neq 0.$$

Zatem układ równań (2) można rozwiązać, korzystając z twierdzenia Cramera.

Obliczając

$$W_\alpha := \begin{vmatrix} P_{t+1}(su) & su \\ P_{t+1}(sd) & sd \end{vmatrix} = s\big(dP_{t+1}(su) - uP_{t+1}(sd)\big),$$

$$W_\beta := \begin{vmatrix} \hat{r} & P_{t+1}(su) \\ \hat{r} & P_{t+1}(sd) \end{vmatrix} = \hat{r}\big(P_{t+1}(sd) - P_{t+1}(su)\big),$$

można otrzymać następujące rozwiązanie układu równań (2):

$$\alpha_t(s) = \frac{s\big(dP_{t+1}(su) - uP_{t+1}(sd)\big)}{s\hat{r}(d-u)} = \frac{uP_{t+1}(sd) - dP_{t+1}(su)}{\hat{r}(u-d)},$$

$$\beta_t(s) = \frac{\hat{r}\big(P_{t+1}(sd) - P_{t+1}(su)\big)}{s\hat{r}(d-u)} = \frac{P_{t+1}(su) - P_{t+1}(sd)}{s(u-d)}.$$

Wstawiając powyższe rozwiązanie do (1), można otrzymać tezę:

$$P_t(s) = \frac{uP_{t+1}(sd) - dP_{t+1}(su)}{\hat{r}(u-d)} + \frac{P_{t+1}(su) - P_{t+1}(sd)}{s(u-d)} \cdot s =$$

$$= \frac{1}{\hat{r}}\big[P_{t+1}(su) \cdot p^* + P_{t+1}(sd) \cdot q^*\big],$$

gdzie:

$$p^* = \frac{\hat{r} - d}{u - d},\ q^* = \frac{u - \hat{r}}{u - d},\ p^* + q^* = 1,\ 0 \le t \le T-1.$$

□