Jerzy Rutkowski

TEORIA LICZB

w zadaniach

PWN

Jerzy Rutkowski

TEORIA LICZB

w zadaniach

Jerzy Rutkowski

TEORIA LICZB
w zadaniach

PWN

Projekt okładki i stron tytułowych: **Ireneusz Gawliński**

Wydawca: **Karol Zawadzki**

Koordynator ds. redakcji: **Adam Kowalski**

Redaktor: **Izabela Ewa Mika**

Produkcja: **Mariola Grzywacka**

Skład: **FixPoint, Warszawa**

Recenzent: **Maciej Radziejewski, UAM Poznań**

ISBN: 978-83-01-19874-9

Wydanie I

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321; faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl; reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp z o.o.

Spis treści

Od Autora

„Teoria liczb w zadaniach” jest książką napisaną z myślą o Czytelnikach studiujących teorię liczb. Zadania umieszczone w książce są na ogół łatwe, a znaczna ich liczba ma charakter rachunkowy. Nieliczne zadania trudniejsze oznaczone są znakiem $*$.

Na początku prawie każdej jednostki tematycznej są podane przydatne wiadomości teoretyczne oraz przykładowe zadania wraz ze szczegółowymi rozwiązaniami. W końcowej części książki znajdują się rozwiązania (nierzadko kompletne) i odpowiedzi do niemal wszystkich zadań przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania.

Przy pisaniu tej książki korzystałem z wielu źródeł. Jednakże niemal wszędzie tam, gdzie to było możliwe, sam dobierałem dane liczbowe. W tym miejscu pragnę wyrazić moją wielką wdzięczność panu prof. Andrzejowi Nowickiemu za jego wielotomowe dzieło „Podróże po imperium liczb”. Kilka spośród tych tomów było dla mnnie bogatym źródłem materiałów.

Oznaczenia przyjęte w tym zbiorze zadań nie odbiegają od tych powszechnie przyjętych w światowej literaturze matematycznej. W szczególności przez $\mathbb{N}_0$ oznaczamy zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Recenzentowi zbioru zadań – panu dr. hab. Maciejowi Radziejewskiemu pragnę serdecznie podziękować za krytyczne uwagi, dzięki którym poprawiłem pierwotny tekst. Za miłą współpracę przy opracowaniu książki pod względem redakcyjnym gorąco dziękuję pani redaktor Izabeli Mice.

Jerzy Rutkowski, marzec 2018 r.

Rozdział 1

Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

1.1. Podzielność w zbiorze liczb całkowitych

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że liczba b jest dzielnikiem liczby a, jeśli istnieje liczba całkowita c taka, że $a = bc$. Piszemy wtedy $b \mid a$. Jeśli b nie jest dzielnikiem liczby a, to piszemy $b \nmid a$.

Mamy na przykład $5 \mid 15$, $-9 \mid -81$, $7 \nmid 10$.

UWAGI

(1) Zamiast mówić, że liczba b jest dzielnikiem liczby a, można też używać następujących określeń: liczba a dzieli się przez liczbę b, liczba a jest podzielna przez liczbę b, liczba a jest wielokrotnością liczby b.

(2) Wprost z definicji wynika, że wszystkimi dzielnikami liczby 1 są liczby 1 i -1. Ponadto każda liczba całkowita jest dzielnikiem liczby 0, natomiast liczba 0 jest dzielnikiem tylko jednej liczby – 0.

(3) Jak wiadomo, dla dowolnych liczb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ równości $a = bc$, $a = (-b)(-c)$, $-a = b(-c)$ są równoważne. Stąd i z definicji dzielnika wynika, że liczba $b \in \mathbb{Z}$ jest dzielnikiem liczby $a \in \mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $-b$ jest dzielnikiem liczby a. Ponadto liczba b jest dzielnikiem liczby a wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona dzielnikiem liczby $-a$. Wynika stąd, że aby wyznaczyć wszystkie dzielniki całkowite liczby $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, wystarczy znaleźć wszystkie dzielniki naturalne liczby naturalnej $|a|$ i dołączyć do nich dzielniki przeciwne.

Jeśli $a, b, c \in \mathbb{Z}$ oraz $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.

Jeśli $a, b, c, k, l \in \mathbb{Z}$ oraz $a \mid b$ i $a \mid c$, to $a \mid (bk + cl)$ i w szczególności $a \mid (b \pm c)$.

Jeśli $a, b \in \mathbb{N}$ i $b\,|\,a$, to $1 \leqslant b \leqslant a$.
Jeśli $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $b\,|\,a$ i $a\,|\,b$, to $a = b$.

Przykład 1. Niech $a = 2\,863\,915\,684$. Wskazać takie przedstawienie liczby a, z którego od razu widać, że $7\,|\,a$.

Rozwiązanie. Zauważmy, że $a = 28 \cdot 10^8 + 63 \cdot 10^6 + 91 \cdot 10^4 + 56 \cdot 10^2 + 84$. Ponieważ każda z liczb 28, 63, 91, 56 i 84 jest podzielna przez 7, więc $7\,|\,a$.

Przykład 2. Wykazać, że $15\,|\,13 \cdot 7^n + 17 \cdot (-8)^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

Rozwiązanie. Zastosujemy indukcję zupełną względem n. Dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ przez $T(n)$ oznaczmy zdanie $15\,|\,13 \cdot 7^n + 17 \cdot (-8)^n$.

Krok I. Teza $T(0)$ jest równoważna ze zdaniem $15\,|\,30$, czyli jest prawdziwa.

Krok II. Weźmy dowolną liczbę $n \in \mathbb{N}_0$ i załóżmy, że teza $T(n)$ jest prawdziwa. Wobec tego $13 \cdot 7^n + 17 \cdot (-8)^n = 15k$, przy pewnym $k \in \mathbb{Z}$. Zachodzą wtedy równości:

$$\begin{aligned} 13 \cdot 7^{n+1} + 17 \cdot (-8)^{n+1} &= 7 \cdot 13 \cdot 7^n - 8 \cdot 17 \cdot (-8)^n \\ &= 7\,[13 \cdot 7^n + 17 \cdot (-8)^n] - 15 \cdot 17 \cdot (-8)^n \\ &= 7 \cdot 15k - 15 \cdot 17 \cdot (-8)^n = 15\,[7k - 17 \cdot (-8)^n] = 15m \end{aligned}$$

przy pewnym $m \in \mathbb{Z}$. Zatem z prawdziwości tezy $T(n)$ wynika prawdziwość tezy $T(n+1)$.

Na mocy zasady indukcji zupełnej zdanie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$.

Zadania

1. Niech $a = 781\,696\,591$. Wskazać takie przedstawienie liczby a, z którego od razu widać, że $13\,|\,a$.

2. Wykazać, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}_0$ prawdziwy jest związek:

(a) $7\,|\,3 \cdot 11^n + 4^{n+1}$;   (b) $6\,|\,5 \cdot 11^n + 7 \cdot (-1)^n$;

(c) $5\,|\,7 \cdot 4^n + 8 \cdot (-1)^n$;   (d) $11\,|\,13 \cdot 17^n - 2 \cdot (-5)^n$.

3. Wykazać, że $(2^{64} - 1) \mid (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) \cdot \ldots \cdot (2^{64}+1)$.

4. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n takie, że $n + 1\,|\,n^2 + 1$.

5. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n takie, że $n + 2\,|\,n^2 + 5n - 6$.

6*. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) liczb naturalnych a, b i c, które spełniają warunki: $a\,|\,b + c$, $b\,|\,a + c$ i $c\,|\,a + b$.

1.2. Największy wspólny dzielnik oraz najmniejsza wspólna wielokrotność dwóch liczb

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ przy czym $a \neq 0$ lub $b \neq 0$. *Największym wspólnym dzielnikiem* liczb a i b nazywamy największą liczbę naturalną dzielącą a i b.

Największy wspólny dzielnik liczb a i b oznaczamy przez $\mathrm{NWD}(a, b)$ lub krócej przez (a, b). Liczba naturalna d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

(NWD 1) $\quad d\,|\,a,\ d\,|\,b,$

(NWD 2) $\quad \displaystyle\bigwedge_{d_1 \in \mathbb{N}} (d_1\,|\,a,\ d_1\,|\,b \Longrightarrow d_1 \leqslant d\,).$

Niech na przykład $a = 195$ i $b = 315$. Ponieważ wszystkimi wspólnymi dzielnikami naturalnymi liczb 195 i 315 są liczby 1, 3, 5 i 15, więc $(195, 315) = 15$.

Niech liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $a \neq 0$ lub $b \neq 0$ i niech $d = (a, b)$. Jeśli liczba $d_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ spełnia warunki $d_1\,|\,a$ i $d_1\,|\,b$, to $d_1\,|\,d$. (Innymi słowy: każdy wspólny dzielnik liczb a i b jest dzielnikiem największego wspólnego dzielnika tych liczb).

Niech liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $a \neq 0$ lub $b \neq 0$ i niech $d = (a, b)$. Istnieją wówczas liczby całkowite k i l takie, że zachodzi równość

$$d = ak + bl. \tag{1.1}$$

Mówimy, że liczby całkowite a i b są względnie pierwsze, jeśli $(a, b) = 1$.

Jeśli $a, b, c \in \mathbb{N}$ oraz $a\,|\,bc$ i $(a, b) = 1$, to $a\,|\,c$.

Niech liczby $a, b \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$ spełniają warunki $a \neq 0$ lub $b \neq 0$ oraz $d = (a, b)$. Niech ponadto liczby $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $a = da_1$ i $b = db_1$. Wówczas $(a_1, b_1) = 1$.

Niech $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Najmniejszą wspólną wielokrotnością* liczb a i b nazywamy najmniejszą liczbę naturalną podzielną przez a i b. Najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b oznaczamy przez $\mathrm{NWW}(a, b)$ lub krócej przez $[a, b]$.

Liczba naturalna w jest najmniejszą wspólną wielokrotnością różnych od 0 liczb całkowitych a i b wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki:

(NWW 1) $\quad a\,|\,w,\ b\,|\,w,$

(NWW 2) $\quad \displaystyle\bigwedge_{w_1 \in \mathbb{N}} (a\,|\,w_1,\ b\,|\,w_1 \Longrightarrow w \leqslant w_1).$

UWAGA

Z własności relacji podzielności wynika, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ zachodzą równości $[\,a, b\,] = [\,-a, b\,] = [\,a, -b\,] = [\,-a, -b\,]$. Z tego względu w rozważaniach można ograniczyć się do przypadku, gdy $a, b \in \mathbb{N}$.

Niech $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i niech $w = [\,a, b\,]$. Jeśli liczba $w_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ spełnia warunki $a \,|\, w_1$ i $b \,|\, w_1$, to $[a, b] \,|\, w_1$. (Innymi słowy: każda wspólna wielokrotność liczb a i b jest wielokrotnością najmniejszej wspólnej wielokrotności tych liczb).

Dla dowolnych liczb naturalnych a i b zachodzi równość

$$(a, b)\,[\,a, b\,] = ab. \tag{1.2}$$

Przykład 3. Wskazać przedstawienie liczby $(40, 55)$ w postaci $40k + 55l$.

Rozwiązanie. Ponieważ $(40, 55) = 5$, więc przy pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość $5 = 40k + 55l$, która jest równoważna ze związkiem $1 = 8k + 11l$. Widać, że można wziąć na przykład $k = -4$ i $l = 3$. Żądane przedstawienie jest więc następujące: $(40, 55) = 5 = 40(-4) + 55 \cdot 3$.

Przykład 4. Rozwiązać w zbiorze liczb naturalnych układ równań

$$\begin{cases} xy = 8820, \\ [\,x, y\,] = 630. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zgodnie ze związkiem (1.2) powyższy układ równań jest równoważny z następującym układem:

$$\begin{cases} xy = 8820, \\ (x, y) = 14. \end{cases}$$

Ponieważ $(x, y) = 14$, więc $x = 14k$, $y = 14l$ przy pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$ takich, że $(k, l) = 1$. Po postawieniu $x = 14k$, $y = 14l$ do równania $xy = 8820$ uzyskujemy równanie $kl = 45$. Ma ono następujące rozwiązania w zbiorze względnie pierwszych liczb naturalnych k i l:

$$\begin{cases} k = 1, \\ l = 45; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 5, \\ l = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 9, \\ l = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} k = 45, \\ l = 1. \end{cases}$$

Wobec tego wszystkimi rozwiązaniami (x, y) danego ukladu równań w zbiorze liczb naturalnych są pary: $(14, 630)$, $(70, 126)$, $(126, 70)$ i $(630, 14)$.

Przykład 5. Wykazać, że jeśli $a, b, k \in \mathbb{Z}$, przy czym $a \neq 0$ lub $b \neq 0$, to zachodzi równość

$$(a, b) = (a + kb, b) = (a, b + ka). \tag{1.3}$$

Rozwiązanie. Wykażemy, że $(a, b) = (a + kb, b)$. Dla każdego $d \in \mathbb{N}$ przy oznaczeniach zadania prawdziwe są implikacje:

$$d\,|\,a,\ d\,|\,b \implies d\,|\,(a + kb),\ d\,|\,b;$$

$$d\,|\,(a + kb),\ d\,|\,b \implies d\,|\,((a + kb) - kb),\ d\,|\,b \implies d\,|\,a,\ d\,|\,b.$$

Z powyższych implikacji wynika, że zbiór wszystkich wspólnych dzielników naturalnych liczb a i b jest równy zbiorowi wszystkich wspólnych dzielników naturalnych liczb $a + kb$ i b. Stąd teza.

Dowód równości $(a, b) = (a, b + kb)$ jest podobny.

Przykład 6. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b takich, że $a \neq 0$ lub $b \neq 0$, zachodzi równość $(3a + 8b, 5a + 13b) = (a, b)$.

Rozwiązanie. Dla dowolnej liczby naturalnej d i dowolnych liczb całkowitych a, b prawdziwe są implikacje:

$$d \mid a,\ d \mid b \implies d \mid (3a + 8b),\ d \mid (5a + 13b);$$

$$d \mid (3a + 8b),\ d \mid (5a + 13b) \implies d \mid (5(3a + 8b) - 3(5a + 13b)) \implies d \mid b;$$

$$d \mid (3a + 8b),\ d \mid (5a + 13b) \implies d \mid ((-13)(3a + 8b) + 8(5a + 13b)) \implies d \mid a.$$

Z powyższych implikacji wynika, że zbiór wszystkich wspólnych dzielników naturalnych liczb a i b jest równy zbiorowi wspólnych dzielników liczb $3a + 8b$ i $5a + 13b$. Stąd teza.

Zadania

7. Mając dane liczby a i b, znaleźć jedno z przedstawień liczby (a, b) w postaci $ak + bl$, gdzie $k, l \in \mathbb{Z}$:

(a) 11, 7; (b) 9, 32; (c) 26, 10; (d) 18, 39; (e) 35, 84.

8. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b takich, że $a \neq 0$ lub $b \neq 0$, zachodzi równość:

(a) $(7a + 4b, 9a + 5b) = (a, b)$; (b) $(4a + 9b, 5a + 11b) = (a, b)$.

9. Rozwiązać w zbiorze liczb naturalnych układy równań:

(a) $\begin{cases} x+y=28, \\ (x,y)=7; \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y=60, \\ (x,y)=12; \end{cases}$ (c) $\begin{cases} xy=1296, \\ (x,y)=6; \end{cases}$

(d) $\begin{cases} xy=9000, \\ (x,y)=15; \end{cases}$ (e) $\begin{cases} xy=3920, \\ [x,y]=280; \end{cases}$ (f) $\begin{cases} xy=10800, \\ [x,y]=360. \end{cases}$

10. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b i c zachodzi równość $(ac,bc)=c\,(a,b)$.

11. Wykazać, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b i c zachodzi równość $[\,ac,bc\,]=c\,[\,a,b\,]$.

12. Niech liczby $a,b,c\in\mathbb{N}$ spełniają warunki $a\mid c$, $b\mid c$ oraz $(a,b)=1$. Wykazać, że $ab\,|\,c$.

13. Wykazać, że dla dowolnych liczb $m,n,k\in\mathbb{N}$ takich, że $(k,n)=1$, zachodzi równość $(mk,n)=(m,n)$.

14. Wykazać, że jeśli liczby naturalne m, n, m_1, n_1 i d spełniają warunki $(m,n)=1$, $m_1|m$, $n_1|n$ i $d=m_1n_1$, to zachodzą równości $m_1=(d,m)$ i $n_1=(d,n)$.

15. Wykazać, że jeśli liczby $m,n,d\in\mathbb{N}$ spełniają warunki $(m,n)=1$ i $d\,|\,mn$, to liczba d daje się przedstawić jednoznacznie w postaci $d=m_1n_1$, gdzie $m_1\,|\,m$ i $n_1\,|\,n$.

16. Wykazać, że dla dowolnych liczb $m,n,k\in\mathbb{N}$ takich, że $(m,n)=1$ zachodzi równość $(mn,k)=(m,k)(n,k)$.

1.3. Największy wspólny dzielnik n liczb i najmniejsza wspólna wielokrotność n liczb

Niech $n\in\mathbb{N}$. *Największym wspólnym dzielnikiem* liczb $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{Z}$ takich, że $a_k\neq 0$ przy pewnym $k\in\{1,\dots,n\}$, nazywamy największą liczbę naturalną dzielącą każdą z liczb $a_1,\dots,a_n$.

Największy wspólny dzielnik liczb $a_1,\dots,a_n$ oznaczamy zazwyczaj przez $\mathrm{NWD}(a_1,\dots,a_n)$ lub przez $(a_1,\dots,a_n)$. Jeśli $(a_1,\dots,a_n)=1$, to mówimy, ze liczby $a_1,\dots,a_n$ są względnie pierwsze.

Liczba naturalna d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb $a_1,\dots,a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki: