

Tomasz Kucharski

# System pomiaru drgań mechanicznych

System  
pomiaru  
drgań  
mechanicznych



Tomasz Kucharski

System  
pomiaru  
drgań  
mechanicznych

Opiniodawcy:  
*prof. zw. dr hab. Czesław Cempel*  
*prof. dr hab. inż. Jerzy Wróbel*

Redaktor: *dr Anna Wasilewska*  
Projekt okładki i stron tytułowych: *Anna Gogolewska*  
Redaktor techniczny: *Anna Szelaż*  
Korekta: *Małgorzata Wiśniewska*  
Przygotowanie do druku: *Marianna Zadrożna*

Wydawca: *Adam Filutowski*

Tytuł dotowany przez Politechnikę Gdańską

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo  
Więcej na [www.legalnakultura.pl](http://www.legalnakultura.pl)  
*Polska Izba Książki*

Copyright © by Wydawnictwo WNT  
Warszawa 2002  
Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2018

ISBN 978-83-01-19735-3

Wydanie I – 1 dodruk (PWN)  
Warszawa 2018

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2  
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288  
infolinia 801 33 33 88  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl); [reklama@pwn.pl](mailto:reklama@pwn.pl)  
[www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

---

## SPIS TREŚCI

---

SYMBOLE I SKRÓTY .....	7
PRZEDMOWA .....	9
1. DRGANIA MECHANICZNE I CEL ICH BADANIA .....	13
2. WIELKOŚCI MIERZONE I PRZETWARZANIE DANYCH POMIAROWYCH .....	23
2.1. Wybór wielkości mierzonych .....	23
2.2. Ilościowy opis drgań .....	26
2.3. Dyskretyzacja danych pomiarowych i reprezentacja ich w dziedzinach czasu i częstotliwości .....	32
3. PODSTAWOWA STRUKTURA UKŁADÓW POMIAROWYCH DRGAŃ MECHANICZNYCH .....	40
4. ELEMENTY STRUKTURY UKŁADÓW POMIAROWYCH .....	45
4.1. Czujniki pomiarowe .....	45
4.2. Układ kondycjonowania sygnału analogowego .....	47
4.3. Karta przetworników analogowo-cyfrowych i cyfrowo-analogowych .....	56
4.4. Wzbudnik drgań sinusoidalnych .....	58
4.4.1. Ogólna charakterystyka techniczna .....	58
4.4.2. Charakterystyka wymuszeń i rodzaje wzbudzanych drgań .....	59
4.5. Wzbudniki udarowe .....	61
4.5.1. Ogólna charakterystyka techniczna .....	61
4.5.2. Postać wymuszenia w dziedzinach czasu i częstotliwości .....	63
4.6. Praktyczne aspekty stosowania nowoczesnych czujników .....	66
4.6.1. Charakterystyka akcelerometrów piezoelektrycznych .....	66

---

4.6.2. Oddziaływanie środowiska na akcelerometry piezoelektryczne .....	67
4.6.3. Mocowanie akcelerometrów piezoelektrycznych .....	68
4.6.4. Charakterystyka sond zbliżeniowych .....	70
5. IDENTYFIKACJA MODELU OBIEKTU DO BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH .....	72
6. ZASTOSOWANIE ANALIZY MODALNEJ DO OKREŚLANIA PUNKTÓW SENSORYCZNYCH MODELU UKŁADU .....	85
6.1. Postaci i częstości drgań układów mechanicznych .....	85
6.2. Zastosowanie superpozycji modalnej do określania czułości układu na wymuszenia .....	92
6.3. Szacowanie energii wymuszenia .....	98
7. WYBRANE METODY ANALIZY DRGAŃ W DZIEDZINACH CZASU I CZĘSTOTLIWOŚCI .....	101
7.1. Uwagi ogólne .....	101
7.2. Metoda interpolacji wielomianami trygonometrycznymi .....	101
7.3. Metoda obliczania odpowiedzi dynamicznych z zastosowaniem macierzy tranzycyjnej .....	104
7.3.1. Określenie matematycznej postaci wymuszenia .....	104
7.3.2. Opis procedury rozwiązania równań różniczkowych .....	106
7.4. Procedury rozwiązujące w systemie MATLAB .....	110
8. POMIAR I ESTYMACJA TRANSMITANCJI .....	118
8.1. Podstawowe założenia .....	118
8.2. Estymacja funkcji transmitancji widmowej .....	125
8.3. Problemy z przetwarzaniem sygnałów cyfrowych w dziedzinach czasu i częstotliwości .....	130
9. PODSUMOWANIE .....	135
LITERATURA .....	138
SKOROWIDZ RZECZOWY .....	140

---

## SYMBOLE I SKRÓTY

---

- $A_i$  – amplituda składowej harmoniczej o numerze  $i$   
 $B_N$  – częstotliwość Nyquista  
 $C$  – macierz tłumienia  
 $c_e$  – ekwiwalentny współczynnik tłumienia  
 $E$  – moduł sprężystości  
 $f$  – częstotliwość  
 $f_i$  – częstotliwość składowej harmoniczej o numerze  $i$   
 $\tilde{\mathbf{f}}(t)$  – wektor wymuszenia  
 $\tilde{f}(s)$  – transformata Laplace’a funkcji  $f(t)$   
 $F(\omega)$  – transformata Fouriera funkcji  $f(t)$  (wymuszenia)  
 $\tilde{\mathbf{f}}$  – wektor zespolonych postaci amplitud wymuszeń  
 $f_t$  – siła oporu tłumienia  
 $g$  – przyspieszenie ziemskie ( $9,81 \text{ m/s}^2$ )  
 $Q(\omega)$  – transformata Fouriera funkcji  $q(t)$   
 $G_x$  – widmowa gęstość mocy sygnału  $x_i$   
 $G_{xy}$  – wzajemna widmowa gęstość mocy sygnałów  $u$  i  $y$   
 $\mathbf{H}(\omega)$  – macierz funkcji transmitancji widmowej  
 $h(t)$  – odpowiedź impulsowa układu  
 $H(\omega)$  – funkcja transmitancji widmowej  
 $\mathbf{K}$  – macierz sztywności  
 $\mathcal{L}$  – symbol transformacji Laplace’a  
 $\mathbf{M}$  – macierz bezwładności  
 $N$  – moc sygnału  
 $p$  – pierwiastek równania charakterystycznego  
 $p^*$  – pierwiastek równania charakterystycznego sprzężony do pierwiastka  $p$   
 $q(t)$  – przemieszczenie uogólnione  
 $q_{sp}$  – wartość średniego poziomu sygnału (drgań)  
 $q_{sk}$  – wartość skuteczna sygnału (drgań)



- $q_{sr}$  – wartość średnia sygnału  
 $\hat{q}$  – amplituda drgań  
 $\tilde{\mathbf{q}}$  – wektor zespolonych postaci amplitud drgań  
 $\tilde{q}$  – zespolona postać amplitudy drgań  
 $\tilde{q}(s)$  – transformata Laplace'a funkcji  $q(t)$   
 $Q(\omega)$  – transformata Fouriera funkcji  $q$  (drgań)  
 $R$  – reszta modalna, residuum  
 $t$  – czas  
 $T$  – okres drgań  
 $u(t)$  – wymuszenie modalne  
 $\tilde{u}$  – zespolona postać amplitudy wymuszenia modalnego  
 $\mathbf{u}(t)$  – wektor wymuszeń modalnych  
 $U(\omega)$  – transformata Fouriera wymuszeń modalnych  
 $x(t)$  – sygnał określony ciągłą funkcją czasu  
 $x_i$  – sygnał dyskretny  
 $X_i$  – dyskretna transformata Fouriera sygnału  $x_i$   
 $\mathbf{X}(t)$  – wektor stanu  
 $\hat{x}_k$  – postać drgań dla danej częstości o numerze  $k$   
 $\mathbf{X}$  – macierz modalna  
 $y$  – przemieszczenia modalne  
 $\tilde{y}$  – zespolona postać amplitudy przemieszczenia modalnego  
 $\hat{y}$  – amplituda przemieszczenia modalnego  
 $Y(\omega)$  – transformata Fouriera przemieszczeń modalnych  
 $\Delta E_d$  – energia rozpraszana w cyklu drgań  
 $\Delta f$  – częstotliwość próbkowania  
 $\Delta t$  – okres próbkowania  
 $\Phi(t, t_0)$  – macierz tranzykcji stanów  
 $\Phi$  – wektor własny macierzy  
 $\gamma$  – współczynnik strat  
 $\gamma_{xy}^2$  – funkcja koherencji sygnałów  $x$  i  $y$   
 $\varepsilon$  – odkształcenia  
 $\delta(t)$  – delta Diraca  
 $\eta$  – stała tłumienia  
 $\lambda$  – wartość własna macierzy  
 $\sigma$  – naprężenie  
 $\varphi$  – kąt fazowy przemieszczenia względem fazy wymuszenia  
 $\psi$  – początkowy kąt fazowy wymuszenia modalnego  
 $\omega$  – częstość drgań  
 $\zeta$  – wskaźnik tarcia krytycznego  
 $\Omega$  – częstość wymuszenia  
 $\omega_D$  – częstość drgań swobodnych tłumionych  
 $\omega_i$  – częstość składowej harmoniczej o numerze  $i$  lub częstość drgań swobodnych

---

## PRZEDMOWA

---

Budowa i eksploatacja maszyn i urządzeń, które spełniają stawiane im duże wymagania pod względem zachowań dynamicznych, trwałości i niezawodności działania, stwarzają konieczność coraz powszechniejszego korzystania z nowoczesnych metod analizy, symulacji, jak również pomiaru drgań tych układów. Przy tym obecnie niezbędne są wspomagające te działania techniki komputerowe. Z tego szerokiego obszaru wiedzy w książce przedstawiono zakres dotyczący komplementarnego systemu pomiaru drgań mechanicznych, obejmującego interaktywną zależność wykonywania pomiarów dynamiki układów lub procesów i symulacji komputerowych ich modeli. Takie podejście umożliwi skuteczniejsze osiągnięcie postawionego celu badań nad dynamiką układów mechanicznych. Przy tym cel ten może dotyczyć pomiarowej analizy dynamicznej, pomiarów diagnostycznych i monitorowania stanu drganiowego maszyn.

Przykładowo w nowoczesnych zakładach produkcyjnych, np. zakładach o pracy ciągłej w przetwórstwie surowców – w rafineriach czy w wytwórniach produktów spożywczych często jest niezbędne wykonywanie pomiarów drgań w celu zabezpieczenia ciągłości i jakości procesu technologicznego. Często jest też potrzebne wykonywanie pomiarów drgań modeli i prototypów w procesie projektowania. Z tego też względu powiększa się grono inżynierów i naukowców, którzy powinni szczegółowo znać zagadnienia i problemy związane z pomiarem drgań. Praktyka wykazała, że wiedza inżynierów mechaników zdobyta w czasie studiów nie wystarcza do opracowania projektu badań doświadczalnych i systemu pomiarowego. Książka skierowana jest głównie do inżynierów mechaników pracujących w przemyśle, a także do pracowników nauki, którzy wykonują badania teoretyczne i doświadczalne. Ma ona na celu przekazanie wiedzy ułatwiającej dobór właściwego wyposażenia aparaturowego stanowisk badawczych i zastosowanie skutecznej techniki i metodyki pomiarów oraz analizy uzyskanych wyników.

Przedstawiona wiedza jest zawarta w ośmiu rozdziałach. W pierwszych dwóch rozdziałach książki zwrócono uwagę na aspekty praktyczne związane z powstawaniem i przenoszeniem drgań, wyborem sygnałów mierzonych i ich opisem. Omówiono również zagadnienia dyskretyzacji i reprezentacji matematycznej rekordów pomiarowych w dziedzinach czasu i częstotliwości oraz związków między tymi opisami.

W rozdziałach trzecim i czwartym podano opis podstawowych struktur układu pomiarowego. Szczegółowo opisano cel stosowania poszczególnych elementów struktury układu pomiarowego oraz zadania przez nie realizowane, jak też ich charakterystyki. Wpływ stosowania elementów struktury na dokładność wykonywanych pomiarów został zilustrowany przykładami z badań doświadczalnych z zakresu dynamiki maszyn. W punkcie 4.6 przedstawiono opis i cechy wysokiej jakości czujników, które stosowane w układach pomiarowych umożliwiają wykonywanie bardzo dokładnych pomiarów drgań bezwzględnych i względnych układów mechanicznych.

W rozdziale piątym przedstawiono praktyczne aspekty określania obiektu badań doświadczalnych i wyznaczania jego parametrów na podstawie pomocniczych badań doświadczalnych. Niektóre użyteczne procedury do identyfikacji obiektu pochodzą z badań autora nad zagadnieniem nadzorowania drgań względnych układu narzędzie-przedmiot w procesie obróbkowym na pionowym centrum frezarskim. Zostały również omówione modele fizyczne tarcia materiałowego ze względu na problemy, które występują w opisie matematycznym tego zjawiska i identyfikacji jego parametrów. Przedstawione modele tarcia mogą być stosowane zarówno w modelach obliczeniowych, jak i przy identyfikacji pomiarowej współczynników tarcia.

W rozdziale szóstym przedstawiono zastosowanie rozwiązania problemu wartości i wektorów własnych do sformułowania modelu modalnego. Następnie omówiono zagadnienie określania własności sensorycznych badanego układu na postać wektora wymuszenia – punkty przyłożenia wymuszenia. Ponadto przybliżono zagadnienie szacowania energii potrzebnej do wzbudzenia wymaganego poziomu drgań, który zapewnia odpowiednią dokładność pomiaru przy wymuszeniach wzbudnikami udarowymi oraz elektrodynamicznymi generującymi przebiegi sinusoidalne siły w czasie i przebiegi pseudostochastyczne. Omówione zagadnienia zostały zilustrowane przykładem układu laboratoryjnego modelowanego belkowymi elementami skończonymi.

W rozdziale siódmym przedstawiono metody rozwiązywania równań ruchu stosowane w symulacji komputerowej i analizie dynamicznej, które są zazwyczaj niezbędne we wspomaganiu i weryfikacji badań doświadczalnych. Prezentowane metody charakteryzują się cechami, które zwiększają efektywność obliczeń numerycznych. Przykładowo jedna z metod umożliwia symultaniczne rozwiązywanie równań w dziedzinie czasu i dziedzinie częstotliwości.

Dzięki temu nie jest potrzebne korzystanie z dodatkowych metod analizy częstotliwościowej odpowiedzi układu. Metody te są stosowane w środowisku MATLAB.

W rozdziale ósmym zostały przedstawione zagadnienia pomiaru i estymacji funkcji transmitancji widmowych. Omówiono zastosowanie modelu modalnego w pomiarach. Ponadto dużo uwagi poświęcono wykorzystaniu wzbudników udarowych. Przedstawiono również sposoby eliminowania w estymatorach zakłóceń występujących w sygnałach wejściowych i wyjściowych oraz sposoby rozwiązywania problemów w przetwarzaniu sygnałów w dziedzinach czasu i częstotliwości.



# 1

---

## DRGANIA MECHANICZNE I CEL ICH BADANIA

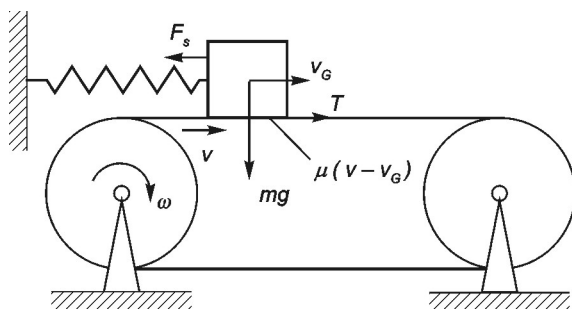
---

Drgania mechaniczne są zjawiskiem fizycznym obserwowanym jako ruch układu materialnego wokół punktu równowagi statycznej. W procesie drgań występuje przepływ energii mechanicznej i magazynowanie (akumulowanie) jej na przemian w postaci energii kinetycznej i potencjalnej. Przepływ energii powstaje wskutek oddziaływania na układ mechaniczny jednej lub wielu sił zmiennych w czasie lub na skutek oswobodzenia układu z więzów, które wprowadziły początkowe przemieszczenia (prędkości) elementów układu, wytrącając go z położenia równowagi statycznej. W pierwszym przypadku występują drgania wymuszone, a w drugim drgania swobodne w zadanych warunkach początkowych bez oddziaływania sił zewnętrznych. Jeżeli rozważamy układ niezachowawczy, w którym występuje dyssypacja energii, to drgania swobodne obserwuje się do chwili całkowitego rozproszenia energii mechanicznej zmagazynowanej w układzie w chwili początkowej ruchu.

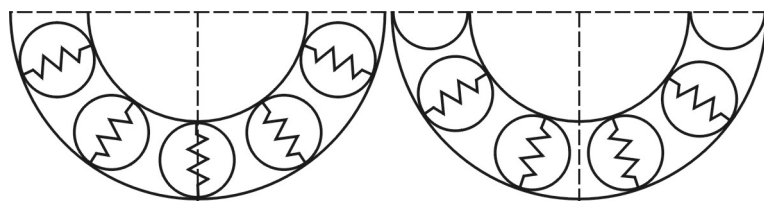
Bardziej złożone przypadki generowania drgań można zaobserwować, gdy w układzie występują naturalne sprzężenia zwrotne między ruchem elementów układu i dozowaniem dopływu energii ze źródeł zewnętrznych (napędów). W tym przypadku powstają drgania samowzbudne, a układ staje się w sposób naturalny generatorem drgań mechanicznych. Drgania samowzbudne powstają, gdy zmienna siła wzbudzająca ruch drgający jest generowana i podtrzymywana przez sam ruch [12, 17, 37, 47]. Przyczyną samowzbudzenia może być tarcie suche (np. precesja wału w łożyskach ślizgowych z niedostatecznym smarowaniem), tarcie wewnętrzne i konstrukcyjne obracających się wałów, siły hydrodynamiczne i aerodynamiczne (np. w łożyskach ślizgowych, w maszynach hydraulicznych), *flutter*, wiry Karmana, *buffeting* (drgania indukowane przepływem płynów).

Nieskomplikowanym przykładem ilustrującym zjawisko drgań samowzbudnych jest przenośnik taśmowy o założonej stałej prędkości nominalnej ruchu taśmy, na której znajduje się ciało o masie  $m$  zamocowane sprężyną do ostoi (rys. 1.1).

Ruch ciała jest sprzężony siłą tarcia suchego z ruchem taśmy. Zjawisko tarcia wprowadza naturalną pętlę sprzężenia zwrotnego generującego relaksacyjne drgania mechaniczne ciała przez okresową zmianę siły tarcia, zależnej od prędkości względnej taśmy i tego ciała. Wskutek ruchu ciała wraz z taśmą sprężyna ulega odkształceniu. Gdy odkształcenie wytworzy siłę w sprężynie większą niż siła tarcia suchego, nastąpi zerwanie ciała z taśmy, czyli wystąpi ruch ciała względem taśmy, zmniejszając siłę w sprężynie. W chwili, gdy siła tarcia zrównoważy siłę bezwładności i sprężystości, nastąpi ponowny ruch ciała z taśmą. W ten sposób do układu sprężysto-masowego okresowo są dozowane dawki energii z napędu (źródła energii), który służy do jednostajnego przesuwu taśmy przenośnika.



RYS. 1.1. Przenośnik taśmowy jako generator drgań mechanicznych (samowzbudnych)



RYS. 1.2. Łożyska toczne jako generatory parametrycznych drgań mechanicznych

Drgania mogą być wzbudzone również, gdy w czasie procesu ruchu wystąpią cykliczne zmiany współczynników masowych lub tłumienia i sztywności elementów układu mechanicznego [12, 17, 37, 47]. Powstają wówczas drgania parametryczne. Przykładem tego zjawiska są drgania wałów podpartych na łożyskach tocznych (rys. 1.2). W tym przypadku ruch obrotowy wieńca wałków lub kulek powoduje cykliczną zmianę sztywności podparcia wału w zależności od chwilowej ich konfiguracji przestrzennej.

Należy tu wymienić również drgania typu *chatter* wzbudzone w procesie skrawania [14, 23, 24, 28]. Drgania te powstają samoczynnie, jeżeli własności dynamiczne układu narzędzie-przedmiot, np. częstości drgań swobodnych, oraz pa-