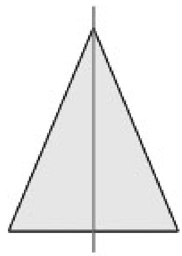
1. Izometrie w dwóch wymiarach

1.1. Wstęp

Kiedy w języku potocznym mówimy, że jakiś obiekt jest symetryczny, myślimy zwykle o symetrii[1] **odbicia** zwierciadlanego. Taką symetrię ma wiele kwiatów, na przykład fiołek, o czym wspominaliśmy już we wstępie (rys. 1.1).

Rys. 1.1. Fiołek ma symetrię zwierciadlaną względem płaszczyzny pionowej



Rys. 1.2. Trójkąt równoramienny ma symetrię zwierciadlaną względem linii pionowej

W przypadku dzieł architektury czy kwiatów symetria ta nie jest idealna. Jeżeli przyjrzeć się portalowi katedry, zobaczymy, że figury świętych po prawej stronie nie są idealnym odbiciem posągów ze strony lewej (rys. 1.3). Podobne różnice występują w przypadku realnego kwiatu czy ludzkiej twarzy. My takie różnice będziemy zaniedbywać i myśleć o symetriach idealnych, takich jak symetrie figur matematycznych. Symetrię odbiciową ma na przykład trójkąt równoramienny (rys. 1.2).

Rys. 1.3. Symetria portalu katedry nie jest idealna

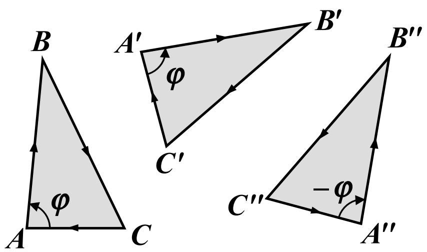
[1] *Symetria* po grecku oznacza dosłownie współmierność; *sym* – współ, *metron* – miara.

1.2. Izometrie w dwóch wymiarach w geometrii elementarnej

Definicja izometrii

W geometrii elementarnej omawia się przekształcenia figur płaskich zwane **izometriami**[2] (patrz np. [5]). Z definicji są to przekształcenia, które zachowują odległości pomiędzy punktami figury. Na przykład po przekształceniu trójkąta uzyskujemy trójkąt przystający (rys. 1.4). Przekształcenia tego typu mogą być dwóch rodzajów:

1) Zachowują orientację płaszczyzny, jak przekształcenie trójkąta ABC w trójkąt $A'B'C'$. W obu tych trójkątach obiegi wskazane przez strzałki są zgodne z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.
2) Zmieniają orientację płaszczyzny, jak przekształcenie trójkąta ABC w trójkąt $A''B''C''$. W tym ostatnim trójkącie strzałki wskazują obieg przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara.



Rys. 1.4. Dwa rodzaje izometrii

Ponieważ izometrie przekształcają figury w figury do nich przystające, w przypadku wielokątów zachowują nie tylko długości boków, ale i wartości bezwzględne kątów pomiędzy nimi.

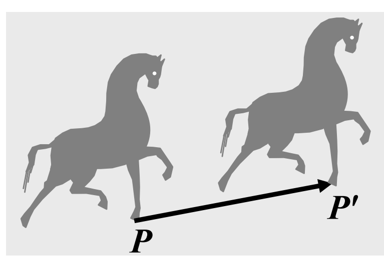
1) Jeżeli orientacja przestrzeni jest zachowana, kąty pozostają niezmienione.
2) Jeżeli orientacja przestrzeni zostaje odwrócona, kąty zmieniają znaki.

Podstawowe typy izometrii

W dwóch wymiarach wyróżniamy trzy podstawowe rodzaje izometrii:

1) **przesunięcia**[3],
2) **obroty**,
3) **odbicia zwierciadlane**[4],
4) wspomnimy także o **inwersji** względem punktu.

Przypomnijmy je krótko po kolei.



Rys. 1.5. Przesunięcie

[2] Nazwa pochodzi z greki: *izos* – równy, *metron* – miara.
[3] Przesunięcie nazywamy też **translacją**; łacińskie *translatio* – przeniesienie.
[4] Symetrię odbiciową w dwóch wymiarach nazywa się także symetrią **osiową**.

Przesunięcie

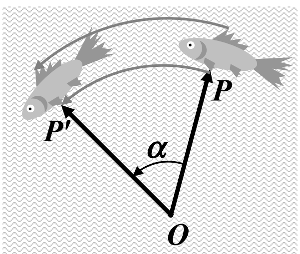
Przesunięcie polega na tym, że każdy punkt przekształconej figury został przemieszczony w tym samym kierunku, z tym samym zwrotem i o tę samą odległość. Przedstawia to rysunek 1.5. Obrazem punktu P jest punkt P', przesunięty o odcinek wskazany strzałką.

W tej książce przesunięciami praktycznie nie będziemy się zajmować. Będziemy się ograniczać niemal wyłącznie do izometrii zachowujących **co najmniej jeden ustalony punkt w przestrzeni**, czyli do **izometrii punktowych**. Jeżeli w dalszym ciągu książki będziemy używać nazwy „izometria” bez dodatkowego objaśnienia, będziemy myśleć o przekształceniach tego rodzaju.

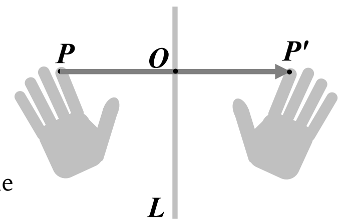
Obrót

Obrotem względem punktu O o kąt α nazywamy przekształcenie, które punktowi P przypisuje punkt P' (rys. 1.6)

- P' leży na prostej OP', która z prostą OP tworzy kat α. Przyjmuje się konwencję, że kąt α jest dodatni, jeżeli obrót zachodzi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
- długość odcinka OP' jest równa długości odcinka OP.



Rys. 1.6. Obrót



Rys. 1.7. Odbicie zwierciadlane

W tej książce na oznaczenie obrotu o kąt α używać będziemy symbolu $\boldsymbol{C}(\alpha)$. Jeżeli następuje obrót o kąt $\frac{2\pi}{n}$, gdzie n jest liczba naturalną, używać będziemy oznaczenia $\boldsymbol{C}_n$.

Zauważmy, że dowolny obrót w płaszczyźnie możemy interpretować jako obrót względem osi do tej płaszczyzny prostopadłej. Inna jest sytuacja w przypadku obrotów w przestrzeni, które mogą być dokonywane względem osi zorientowanych dowolnie. Powrócimy do tej sprawy w podrozdziale 4.1.

Odbicie zwierciadlane

Odbiciem zwierciadlanym figury względem linii L nazywamy przekształcenie, które punktowi P przypisuje punkt P' (rys. 1.7):

- P' leży na prostej przechodzącej przez punkt P i prostopadłej do linii L. Prosta ta przecina prostą L w punkcie O.
- Długość odcinka OP' jest równa długości odcinka OP.

Odbicie zwierciadlane będziemy oznaczać symbolem $\boldsymbol{\sigma}$.

Odbicia mogą być dokonywane względem dowolnie zorientowanej linii L. Aby to doprecyzować, będziemy podawać wersor prostopadły do tej linii: $\vec{s}$. Będziemy więc używać w zasadzie oznaczenia $\boldsymbol{\sigma}(\vec{s})$. Notacja taka jest jednak dość uciążliwa. Jeżeli będziemy mieli do czynienia na raz tylko z kilku różnymi odbiciami, będziemy je po prostu numerować, pisząc: $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$, ... (patrz np. podrozdział 2.1).

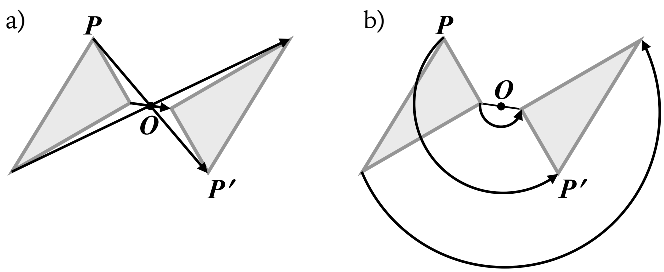
Inwersja

Inwersją[5] figury względem punktu O nazywamy przekształcenie, które punktowi P przypisuje punkt P' (rys. 1.8a):

– P' leży na prostej przechodzącej przez punkt P i punkt O.

– długość odcinka OP' jest równa długości odcinka OP.

Inwersję będziemy oznaczać symbolem $\boldsymbol{i}$.



Rys. 1.8. a) Inwersja. b) Inwersja w dwóch wymiarach jest równoważna obrotowi o 180°

Z rysunku 1.8b widać, że w dwóch wymiarach inwersja jest tożsamościowo równa obrotowi o kąt 180°, czyli o π. Inaczej jest w trzech wymiarach. Wrócimy do tej sprawy w podrozdziale 4.1.

Tożsamość

„Do kompletu” wprowadza się jeszcze pojęcie **tożsamości**, która odpowiada przekształceniu figury w samą siebie. Tożsamość będziemy oznaczać symbolem $\boldsymbol{e}$.

1.3. Składanie izometrii

Złożenie dwóch izometrii jest też izometrią, bo każda z operacji składowych zachowuje odległości pomiędzy punktami figury. Przypuśćmy, ze najpierw dokonaliśmy izometrii $\boldsymbol{a}$, a potem izometrii $\boldsymbol{b}$. Złożenie tych dwóch przekształceń symetrii daje w wyniku izometrię $\boldsymbol{c}$. Zapisujemy to:

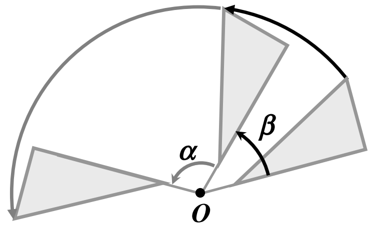
$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ba}. \tag{1.1}$$

[5] Nazwa pochodzi z łaciny: *inversio* – odwrócenie. Przekształcenie to nazywa się także symetrią środkową. W geometrii wprowadza się poza tym inwersję względem okręgu (patrz np. [20]). Tego typu przekształcenie nie jest izometrią, nie będziemy się nim zajmować.

Zgodnie z przyjętą ogólnie konwencją pierwsza operacja zapisana jest po prawej, a druga po lewej. Wygoda takiego zapisu wyjaśni się w dalszym ciągu książki.

Można oczywiście podobnie składać więcej niż dwie izometrie, co wielokrotnie będziemy robić w dalszym ciągu książki.

Jeżeli składamy ze sobą kilka identycznych izometrii, używamy symboli analogicznych do zwykłego potęgowania:



Rys. 1.9. Złożenie dwóch obrotów

$$\boldsymbol{aa} = \boldsymbol{a}^2, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{aaa} = \boldsymbol{a}^3 \text{ itp.} \tag{1.3}$$

Złożenie kilku obrotów

1) Złożenie dwóch obrotów względem punktu, odpowiednio o kąty α i β, jest także obrotem: o kąt równy sumie kątów, czyli o $\alpha + \beta$. Przedstawia to rysunek 1.9.
2) Złożenie obrotów o kąty α i $\beta = -\alpha$ jest operacją tożsamościową $\boldsymbol{e}$.
3) n-krotnie powtórzony obrót o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego daje kąt pełny, czyli transformację **tożsamościową**. Zatem

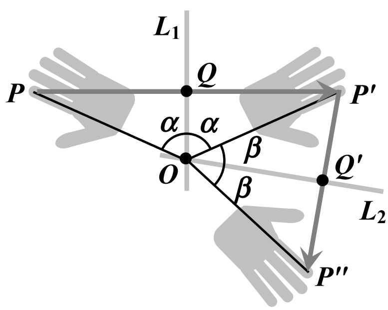
$$(\boldsymbol{C}_n)^n = \boldsymbol{e}. \tag{1.4}$$

Złożenie dwóch odbić zwierciadlanych

Rozpatrzmy złożenie dwóch odbić zwierciadlanych: $\boldsymbol{\sigma}_1$ względem linii L_1 i $\boldsymbol{\sigma}_2$ względem linii L_2. Linie L_1 i L_2 tworzą ze sobą kąt γ. Złożenie to jest obrotem o kąt 2γ.

Przedstawia to rysunek 1.10. Na rysunku tym kąt pomiędzy liniami odbić jest równy $\gamma = \alpha + \beta$. Trójkąty PQO i $P'QO$ są przystające. Przystające są także trójkąty $P'Q'O$ i $P''Q'O$. Z rysunku widać, że punkt P został obrócony względem punktu O o kąt $2\alpha + 2\beta = 2\gamma$. Zatem

$$\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = \boldsymbol{C}(2\gamma). \tag{1.5}$$



Rys. 1.10. Złożenie dwóch odbić

Dwukrotne powtórzenie tego samego odbicia daje operację tożsamościową $\boldsymbol{e}$, czyli

$$\boldsymbol{\sigma\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^2 = \boldsymbol{e}. \tag{1.6}$$

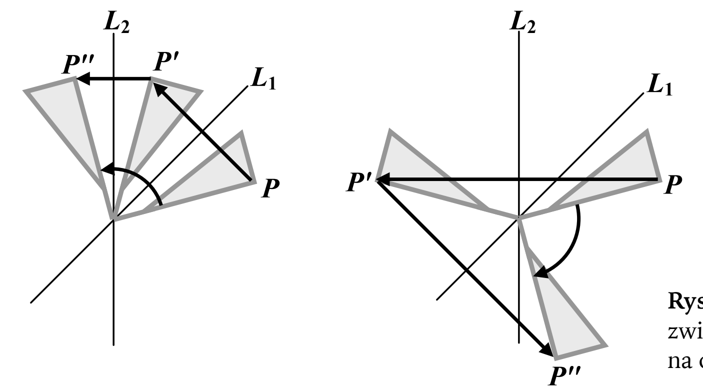
Wynika to też ze wzoru (1.5): Jeżeli kąt γ pomiędzy liniami L_1 i L_2 jest równy zeru, to i $2\gamma = 0$, a obrót o kąt zerowy jest tożsamością.

Złożenie izometrii nie zawsze jest przemienne

Operacja złożenia izometrii na ogół nie jest przemienna, czyli może zachodzić

$$\boldsymbol{ba} \neq \boldsymbol{ab}. \tag{1.7}$$

Nie jest na ogół przemienne składanie dwóch odbić zwierciadlanych (rys. 1.11). Na rysunku tym kąt między liniami L_1 i L_2 jest równy γ (por. rys. 1.10).



Rys. 1.11. Składanie odbić zwierciadlanych nie jest na ogół przemienne

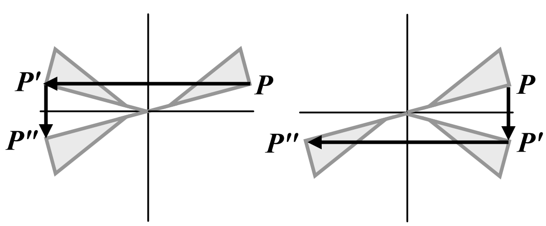
a) wykonanie najpierw odbicia względem linii L_1, a potem względem linii L_2 daje obrót o kąt $+2\gamma$

$$\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_1 = \mathbf{C}(2\gamma), \tag{1.8}$$

b) wykonanie najpierw odbicia względem linii L_2, a potem względem linii L_1 daje obrót o kąt -2γ

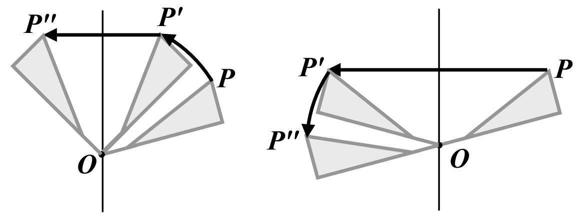
$$\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2 = \mathbf{C}(-2\gamma). \tag{1.9}$$

Przemienne jest natomiast złożenie odbić względem dwóch linii prostopadłych, czyli dla kąta $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Wtedy $2\gamma = \pi$, a obrót o $+\pi$ jest równoważny obrotowi o $-\pi$ (rys. 1.12).



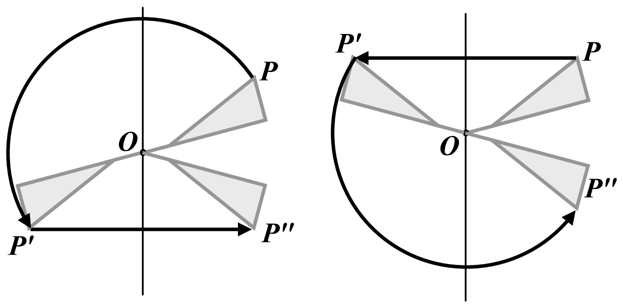
Rys. 1.12. Składanie odbić względem linii prostopadłych jest przemienne

Złożenie obrotu o kąt α i odbicia zwierciadlanego także zależy od kolejności wykonania tych operacji (rys. 1.13).



Rys. 1.13. Złożenie obrotu i odbicia zwierciadlanego nie jest na ogół przemienne

Przemienne jest natomiast złożenie odbicia i obrotu o kąt π (rys. 1.14).



Rys. 1.14. Złożenie obrotu o kąt π i odbicia zwierciadlanego jest przemienne

Omówione cechy przemienności składania izometrii będą miały istotne znaczenie na przykład przy omawianiu symetrii prostokąta czy rombu (podrozdział 2.8).

Izometrie odwrotne

Do każdej izometrii $\boldsymbol{a}$ można dobrać izometrię $\boldsymbol{b}$, która złożona z izometrią $\boldsymbol{a}$ daje tożsamość. Taką izometrię nazywamy **izometrią odwrotną** do $\boldsymbol{a}$ i oznaczamy symbolem $\boldsymbol{a}^{-1}$. Zapisujemy to:

$$\boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{e}. \tag{1.10}$$

1) Izometrią odwrotną do obrotu o kąt α jest obrót o kąt $-\alpha$:

$$\boldsymbol{C}(\alpha)^{-1} = \boldsymbol{C}(-\alpha). \tag{1.11}$$

2) Obrót o kąt π jest równoważny obrotowi o kąt $-\pi$. Zatem izometrią odwrotną do obrotu o kąt π, czyli $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{i}$ jest też obrót o kąt π, czyli $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{i}$:

$$\boldsymbol{C}_2^2 = \boldsymbol{e}, \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{e}. \tag{1.13}$$

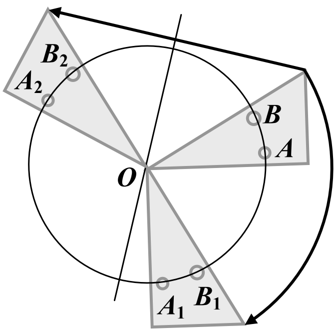
3) Izometrią odwrotną do odbicia $\boldsymbol{\sigma}$ jest to samo odbicie $\boldsymbol{\sigma}$, bo $\boldsymbol{\sigma\sigma} = \boldsymbol{e}$.

1.4. Wynik złożenia izometrii w dwóch wymiarach

Zarówno obroty wokół określonego punktu O, jak i odbicia względem linii przechodzących przez ten punkt zachowują odległości punktów od punktu O. Zatem przekształcają okrąg o środku w O w samego siebie. Można więc wybrać dwa punkty przekształcanej figury A i B, które znajdują się na okręgu tego rodzaju. Po dokonaniu dowolnej liczby przekształceń uzyska się parę punktów figury przekształconej, które są obrazami punktów A i B. Punkty te leżą na tym samym okręgu, co punkty A i B. Są przy tym tylko dwie możliwości (rys. 1.15):

1) Orientacja nowych punktów A_1, B_1 jest względem okręgu identyczna jak punktów A i B. Wtedy parę punktów A, B można przekształcić w A_1, B_1 **jednym obrotem**.
2) Orientacja nowych punktów A_2, B_2 jest względem okręgu przeciwna niż punktów A i B. Wtedy parę punktów A, B można przekształcić w A_2, B_2 **jednym odbiciem**.

Zatem wynik dowolnej liczby punktowych operacji symetrii w dwóch wymiarach da się przedstawić jako jedna operacja tego rodzaju.



Rys. 1.15. Wynik przekształceń symetrii. Szczegóły w tekście

1.5. Izometrie sprzężone

Wprowadzenie

Niektóre z rozważanych przez nas operacji symetrii są do siebie „podobne". Czujemy, że na przykład:

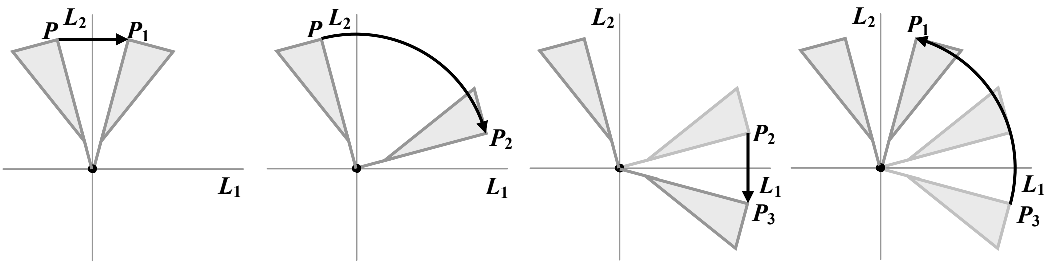
– odbicie zwierciadlane względem linii L_2 jest „podobne" do odbicia względem linii L_1,

– obrót o kąt 90° jest „podobny" do obrotu o –90° itp.

Spróbujmy sformułować to bardziej precyzyjnie.

PRZYKŁAD 1

Jeżeli chcemy w dwóch wymiarach dokonać odbicia jakiejś figury względem linii L_2 (pozioma strzałka), możemy to zrobić w sposób bardziej skomplikowany (rys. 1.16):

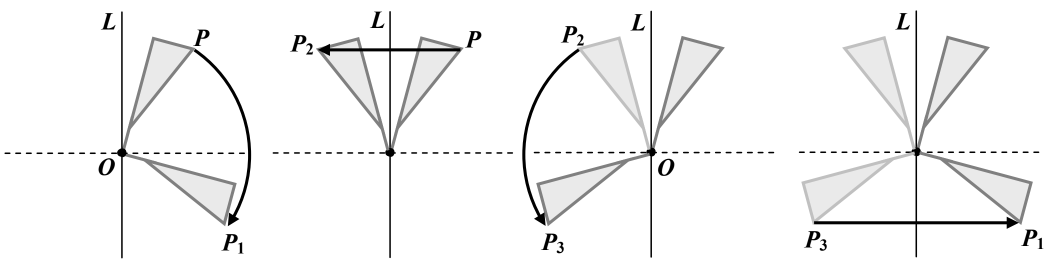


Rys. 1.16. Odbicie względem osi 2 jako złożenie trzech operacji

1) Najpierw obrócić figurę o kąt –90°, czyli dokonać transformacji C_4^3, która jest transformacją odwrotną względem C_4 (łuk w prawo).
2) Następnie odbić figurę względem linii L_1 (pionowa strzałka).
3) Na końcu obrócić uzyskaną figurę o kąt +90°, czyli dokonać transformacji C_4 (łuk w lewo).

Przykład 2

Podobnie obrócić figurę o –90° możemy następująco (rys. 1.17):



Rys. 1.17. Obrót o –90° jako złożenie trzech operacji

1) Odbić ją względem osi L (pozioma strzałka w lewo).
2) Obrócić o kąt +90° (łuk).
3) Ponownie odbić względem osi L (pozioma strzałka w prawo).

Izometrie sprzężone

Jeżeli izometria $\boldsymbol{c}$ da się przedstawić przez izometrie $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ w postaci

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{bab}^{-1}, \tag{1.14}$$

mówimy, że izometrie $\boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{a}$ są **sprzężone**.

Zgodnie z tą definicją sprzężone są ze sobą na przykład:
– odbicie względem osi L_1 i odbicie względem osi L_2 z przykładu 1,
– obrót o +90° i –90° z przykładu 2.

Uogólniając rozważania z przykładów 1 i 2, można wykazać, że:
1) Wszystkie odbicia zwierciadlane sprzężone są ze sobą.
2) Sprzężone są obroty o kąty α i $-\alpha$.

Izometria jest sprzężona sama ze sobą

Zgodnie z podaną definicją każda izometria jest sprzężona sama ze sobą.
1) Przykład trywialny. Jeżeli wybrać we wzorze $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$, wtedy $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{bab}^{-1} = \boldsymbol{aaa}^{-1} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{aa}^{-1}) = \boldsymbol{a}$.
2) Przykład mądrzejszy. Rozpatrzmy wybór: $\boldsymbol{a}$ jest obrotem w płaszczyźnie o kąt α, $\boldsymbol{b}$ jest obrotem o kąt β. Wtedy złożenie (1.14) odpowiada obrotowi o kąt $\varphi = -\beta + \alpha + \beta = \alpha$.

Do problemu operacji sprzężonych będziemy powracać w przyszłości wielokrotnie. Na przykład będziemy omawiać klasy elementów sprzężonych, kiedy zajmiemy się bardziej szczegółowo grupami symetrii (np. podrozdział 2.11).

1.6. Przekształcanie wektora

Do tej pory omawialiśmy problem izometrii zupełnie ogólnie. Teraz zastosujemy te rozważania do transformacji wektorów. Rozpatrzmy pewien wektor $\vec{x}$ o początku w punkcie O. Punkt ten zachowują rozważane izometrie. Pod wpływem izometrii $\boldsymbol{a}$ wektor $\vec{x}$ przejdzie w inny wektor $\vec{y}$.

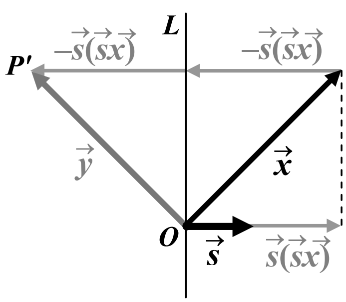
Napiszemy to formalnie:

$$\vec{y} = \hat{\boldsymbol{a}}\vec{x}. \tag{1.15}$$

Symbolem $\hat{\boldsymbol{a}}$ oznaczyliśmy **operator** przekształcający pierwszy z wektorów w drugi. Ponieważ operacja przekształcenia jest izometrią, wartość wektora $\vec{y}$ jest taka sama jak wartość wektora $\vec{x}$. Natomiast kierunek i zwrot są na ogół inne.

Transformacja wektora przy odbiciu

Rozpatrzmy teraz wektor $\vec{y}$, który stanowi odbicie wektora $\vec{x}$ względem linii L (rys. 1.18).



Rys. 1.18. Odbicie wektora względem linii L

Wersor $\vec{s}$ jest do tej linii prostopadły. Z rysunku widać, że

$$\vec{y} = \vec{x} - 2(\vec{s}\vec{x})\vec{s}. \tag{1.16}$$

Możemy zauważyć, że $(\vec{s}\vec{x})\vec{s}$ jest składową wektora $\vec{x}$ prostopadłą do linii L. Oznaczmy ją symbolem $\vec{x}_\perp$. Wzór (1.16) można wtedy zapisać w równoważnej postaci

$$\vec{y} = \vec{x} - 2\vec{x}_\perp. \tag{1.17}$$

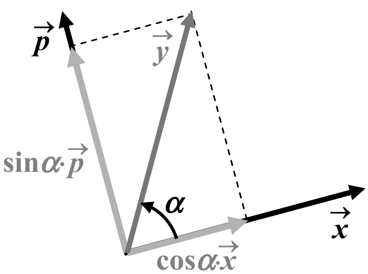
Z definicji wersor $\vec{s}$ jest prostopadły do linii L, od której następuje odbicie. Są jednak dwie możliwości wyboru takiego wersora:

1) Pierwsza jak na rysunku 1.18. Wersor $\vec{s}$ jest zwrócony w prawo.
2) Druga z wersorem $\vec{s}\,' = -\vec{s}$, czyli zwróconym w lewo.

Wybór zwrotu wersora nie wpływa jednak na wektor $\vec{y}$, określony wzorem (1.16). W znajdującym się w nim iloczynie wersor $\vec{s}$ występuje dwukrotnie.

Transformacja wektora przy obrocie

Rozpatrzmy teraz obrót o kąt α (rys. 1.19). Pod wpływem takiego obrotu wektor $\vec{x}$ przechodzi w wektor $\vec{y}$.



Rys. 1.19. Obrót wektora o kąt α. Szczegóły w tekście

Wprowadźmy jeszcze pomocniczy wektor $\vec{p}$, który

– ma taką samą długość jak wektor $\vec{x}$,
– jest do wektora $\vec{x}$ prostopadły i ma taki zwrot, że kąt obrotu od $\vec{x}$ do $\vec{p}$ jest dodatni.

Z rysunku widać, że zachodzi związek

$$\vec{y} = \cos\alpha \cdot \vec{x} + \sin\alpha \cdot \vec{p}. \tag{1.18}$$

Dygresja

W zasadzie prowadzimy na razie rozważania w dwóch wymiarach. Dopuśćmy jednak na moment wymiar trzeci i wprowadźmy wersor $\vec{r}$ prostopadły do rozważanej płaszczyzny i zwrócony przed kartkę. Wtedy wektor $\vec{p}$ moglibyśmy zapisać w postaci iloczynu wektorowego

$$\vec{p} = \vec{r} \times \vec{x}. \tag{1.19}$$

Wrócimy do tego zapisu w podrozdziale 4.7.

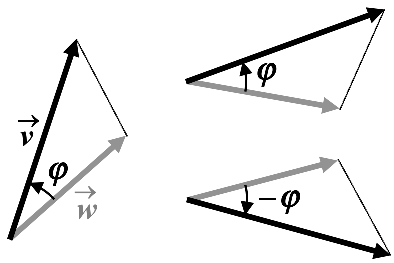
1.7. Iloczyn skalarny

Iloczynem skalarnym dwóch wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ nazywamy skalar określony wzorem

$$\vec{w}\vec{v} = wv\cos\varphi, \tag{1.20}$$

gdzie w i v oznaczają odpowiednio wartości wektorów, a φ kąt pomiędzy nimi. Pamiętamy, że cosinus jest funkcją parzystą: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$.

Ponieważ izometrie zachowują długości odcinków i wartości bezwzględne kątów, zachowują także wynik iloczynu skalarnego (rys. 1.20).



Rys. 1.20. Iloczyn skalarny pary wektorów przekształconych przez izometrię jest taki sam, jak iloczyn skalarny wektorów wyjściowych

Możemy to zapisać w formie (patrz też wzór (1.15)):

$$(\hat{\boldsymbol{a}}\vec{w})(\hat{\boldsymbol{a}}\vec{v}) = \vec{w}\vec{v}. \tag{1.21}$$

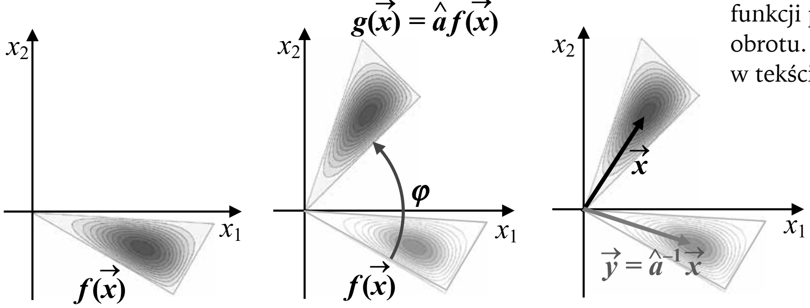
1.8. Przekształcanie funkcji

Na zakończenie tego rozdziału rozpatrzmy jeszcze pewną funkcję dwóch zmiennych

$$f(\vec{x}) = f(x_1,\ x_2) \tag{1.22}$$

określoną na rozważanej płaszczyźnie. Pod wpływem operacji $\boldsymbol{a}$ funkcja ta przejdzie w na ogół nową funkcję (rys. 1.21)

$$g(\vec{x}) = \hat{\boldsymbol{a}}f(\vec{x}). \tag{1.23}$$



Rys. 1.21. Przekształcenie funkcji pod wpływem obrotu. Szczegóły w tekście

Podobnie jak w podrozdziale 1.6 symbolem $\hat{\boldsymbol{a}}$ oznaczyliśmy **operator**, działający teraz na funkcję $f(\vec{x})$. Rysunek 1.21 przedstawia to dla obrotu. Nowa funkcja $g(\vec{x})$ jest funkcją $f(\vec{x})$ obróconą o kąt α, na rysunku równy 75°.

Zauważmy na tym rysunku, że nowa funkcja $g(\vec{x})$ w punkcie $\vec{x}$ ma taką wartość, jaką miała stara funkcja $f(\vec{x})$ w punkcie $\vec{y}$, gdzie wektor $\vec{y}$ jest wektorem $\vec{x}$ obróconym o kąt $-\alpha$ (na rysunku 1.21 o kąt –75°).

$$\vec{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}. \tag{1.24}$$

Ogólnie możemy to zapisać w formie:

$$g(\vec{x}) = \hat{\boldsymbol{a}}f(\vec{x}) = f(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}). \tag{1.25}$$

W rozdziale 4 uogólnimy nasze dotychczasowe rozważania na przypadek trzech wymiarów.

PRZYKŁAD

Zastosujmy te ogólne wzory do szczególnego przypadku, kiedy funkcja $f(\vec{x})$ ma postać

$$f(\vec{x}) = \vec{n}\vec{x}F(x), \tag{1.26}$$

gdzie $\vec{n}$ jest wersorem, a $F(x)$ funkcją jedynie wartości wektora $\vec{x}$. Oznacza to, że $F(x)$ przechodzi w siebie pod wpływem dowolnej izometrii $\boldsymbol{a}$.

Jako przykład funkcji o postaci (1.26) mogą służyć (ograniczone do dwóch wymiarów):

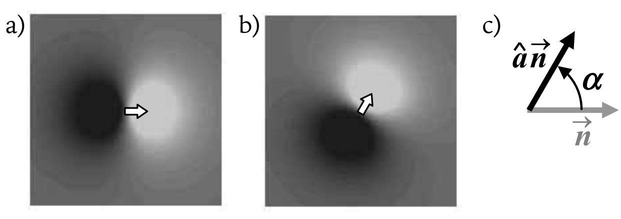
1) Funkcja opisująca potencjał dipola

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}_e\vec{x}}{x^3} = \vec{n}\vec{x}\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 x^3}, \tag{1.27}$$

gdzie $\vec{p}_e = \vec{n}p_e$ jest momentem dipolowym.

2) Funkcja falowa stanu 2p atomu wodoru (bez czasu, rys. 1.22):

$$\psi_{2p}(\vec{x}) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_B^3}}\frac{\vec{n}\vec{x}}{a_B}e^{-\frac{x}{2a_B}} = \vec{n}\vec{x}\frac{1}{4\sqrt{2\pi a_B^5}}e^{-\frac{x}{2a_B}}. \tag{1.28}$$



Rys. 1.22. Obrót funkcji elektronowej p atomu wodoru

Z rysunku 1.22 widać, że obrócenie takiej funkcji sprowadza się do obrócenia wersora $\vec{n}$ o kąt α. Wykażmy to jednak „naukowo”, korzystając ze wzoru (1.15).

1) Dla funkcji o postaci (1.26) i izometrii $\boldsymbol{a}$ mamy

$$g(\vec{x}) = \hat{\boldsymbol{a}}f(\vec{x}) = f(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}) = \vec{n}(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x})F(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}) = \vec{n}(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x})F(x). \tag{1.29}$$

   Skorzystaliśmy z tego, że funkcja $F(x)$ przechodzi w siebie pod wpływem dowolnej izomerii $\boldsymbol{a}$, czyli $F(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}) = F(x)$.
2) Stwierdziliśmy w poprzednim podrozdziale, że dla dowolnych wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ i dowolnej izometrii $\boldsymbol{a}$ zachowany jest iloczyn skalarny, czyli zachodzi $\vec{w}\vec{v} = (\hat{\boldsymbol{a}}\vec{w})(\hat{\boldsymbol{a}}\vec{v})$. Zastosujmy tę równość do iloczynu skalarnego $\vec{n}(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x})$, kładąc $\vec{w} = \vec{n}$ i $\vec{v} = \hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}$:

$$\vec{n}(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}) = (\hat{\boldsymbol{a}}\vec{n})(\hat{\boldsymbol{a}}\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}) = (\hat{\boldsymbol{a}}\vec{n})\vec{x}. \tag{1.30}$$

Stąd

$$g(\vec{x}) = \hat{\boldsymbol{a}}f(\vec{x}) = f(\hat{\boldsymbol{a}}^{-1}\vec{x}) = (\hat{\boldsymbol{a}}\vec{n})\vec{x}F(x). \tag{1.31}$$

Jak oczekiwaliśmy – przekształcenie funkcji (1.26) sprowadza się do przekształcenia wersora $\vec{n}$.