

EUGENIA CHENG

RAD
OŚC
Z ABSTRAKCJI

O matematyce, teorii kategorii i... życiu

Helion 

Tytuł oryginału: The Joy of Abstraction: An Exploration of Math, Category Theory, and Life

Tłumaczenie: Filip Kamiński

ISBN: 978-83-289-0039-4

© Eugenia Cheng 2023

This translation of The Joy of Abstraction: An Exploration of Math, Category Theory, and Life is published by arrangement with Cambridge University Press.

Polish edition copyright © 2024 by Helion S.A.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from the Publisher.

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz wydawca dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz wydawca nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<https://helion.pl/user/opinie/radzab>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Helion S.A.

ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice

tel. 32 230 98 63

e-mail: helion@helion.pl

WWW: <https://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Printed in Poland.

- Kup książkę
- Poleć książkę
- Oceń książkę

- Księgarnia internetowa
- Lubię to! » Nasza społeczność

Spis treści

Prolog	11
Status matematyki	12
Dziedziny tradycyjnej matematyki	13
Metody tradycyjnej matematyki	15
Zawartość tej książki	16
Dla kogo jest ta książka	18
CZĘŚĆ I W STRONĘ KATEGORII	21
1 Kategorie — idea	23
1.1. Abstrakcja i analogie	25
1.2. Połączenia i unifikacja	25
1.3. Kontekst	26
1.4. Relacje	26
1.5. Bycie tym samym	27
1.6. Charakteryzowanie rzeczy według roli, jaką pełnią	28
1.7. Przybliżanie i oddalanie	29
1.8. Ramy i techniki	30
2 Abstrakcja	32
2.1. Czym jest matematyka?	32
2.2. Logika i abstrakcja — bliźniacze dyscypliny	33
2.3. Zapominanie szczegółów	34
2.4. Zalety i wady	34
2.5. Przekładanie analogii na rzeczywistość	36
2.6. Różne abstrakcje tej samej rzeczy	37
2.7. Abstrakcyjna podróż przez poziomy matematyki	39
3 Wzorce	43
3.1. Matematyka jako wykrywanie wzorców	43
3.2. Wzory jako analogie	45
3.3. Wzory jako oznaki struktury	46

3.4.	Struktura abstrakcyjna jako rodzaj wzoru	48
3.5.	Abstrakcja pomaga nam dostrzec wzorce	49
4	Kontekst	52
4.1.	Odległość	53
4.2.	Światy liczb	56
4.3.	Świat zerowy	58
5	Relacje	60
5.1.	Relacje rodzinne	61
5.2.	Symetria	62
5.3.	Arytmetyka	63
5.4.	Arytmetyka modularna	64
5.5.	Czworokąty	65
5.6.	Kraty czynników	68
6	Formalizmy	74
6.1.	Rodzaje turystów	74
6.2.	Dlaczego wyrażamy rzeczy w sposób formalny	75
6.3.	Przykład: przestrzenie metryczne	77
6.4.	Podstawy logiki	81
6.5.	Przykład: arytmetyka modularna	83
6.6.	Przykład: kraty czynników	87
7	Relacje równoważności	88
7.1.	Badanie równości	88
7.2.	Idea relacji abstrakcyjnych	89
7.3.	Zwrotność	90
7.4.	Symetria	92
7.5.	Przechodniość	94
7.6.	Relacje równoważności	96
7.7.	Przykłady z matematyki	98
7.8.	Ciekawe porażki	99
8	Kategorie — definicja	101
8.1.	Dane — obiekty i relacje	101
8.2.	Struktura — co możemy zrobić z danymi	102
8.3.	Własności — wymagania dotyczące konstrukcji	105
8.4.	Formalna definicja kategorii	108
8.5.	Problem rozmiaru	108
8.6.	Geometria łączności	109
8.7.	Rysowanie przydatnych diagramów	110
8.8.	Cel kompozycji	111

	INTERLUDIUM WYCIECZKA PO ŚWIECIE MATEMATYKI	115
9	Przykłady, które już pokazałam, ale nie wprost	117
	9.1. Symetria	118
	9.2. Relacje równoważności	118
	9.3. Czynniki pierwsze	120
	9.4. Systemy liczbowe	121
10	Zbiory uporządkowane	123
	10.1. Zbiór uporządkowany liniowo	123
	10.2. Zbiory częściowo uporządkowane	126
11	Małe struktury matematyczne	130
	11.1. Małe, możliwe do narysowania przykłady	130
	11.2. Monoidy	131
	11.3. Grupy	134
	11.4. Punkty i ścieżki	138
12	Zbiory i funkcje	141
	12.1. Funkcje	142
	12.2. Struktura — identyzacja i kompozycja	147
	12.3. Własności — prawa jednostkowe i łączność	147
	12.4. Kategoria zbiorów i funkcji	148
13	Duże światy struktur matematycznych	150
	13.1. Monoidy	150
	13.2. Grupy	154
	13.3. Zbiory częściowo uporządkowane	156
	13.4. Przestrzenie topologiczne	160
	13.5. Kategorie	161
	13.6. Macierze	163
	CZĘŚĆ II UPRAWIANIE TEORII KATEGORII	167
14	Izomorfizmy	169
	14.1. Bycie tym samym	169
	14.2. Odwracalność	171
	14.3. Izomorfizmy w kategorii	173
	14.4. Traktowanie obiektów izomorficznych jako takich samych	175
	14.5. Izomorfizmy zbiorów	177
	14.6. Izomorfizmy dużych struktur	180
	14.7. Inne zagadnienia dotyczące izomorfizmów	187

15	Moniki i epiki	189
	15.1. Asymetria funkcji	190
	15.2. Iniekcje i surjekcje	191
	15.3. Moniki — kategoryjne iniekcje	196
	15.4. Epiki — kategoryjne surjekcje	199
	15.5. Związki z izomorfizmami	203
	15.6. Monoidy	204
	15.7. Inne zagadnienia	205
16	Własności uniwersalne	207
	16.1. Rola a charakter	207
	16.2. Skrajności	209
	16.3. Definicja formalna	210
	16.4. Unikalność	212
	16.5. Obiekty końcowe	214
	16.6. Sposoby na porządek	215
	16.7. Przykłady	219
	16.8. Kontekst	223
	16.9. Inne zagadnienia	225
17	Dualność	227
	17.1. Obracanie strzałek	227
	17.2. Kategoria dualna	229
	17.3. Moniki i epiki	231
	17.4. Obiekty początkowe i końcowe	234
	17.5. Alternatywna definicja kategorii	234
18	Produkty i koprodukty	237
	18.1. Idea produktów w kategorii	237
	18.2. Definicja formalna	238
	18.3. Produkty jako obiekty końcowe	240
	18.4. Produkty w Set	243
	18.5. Unikalność produktów w Set	246
	18.6. Produkty w kategorii zbiorów częściowo uporządkowanych	250
	18.7. Kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych	252
	18.8. Monoidy i grupy	257
	18.9. Niektóre kluczowe morfizmy indukowane przez produkty	260
	18.10. Dualność — koprodukty	260
	18.11. Koprodukty w Set	261
	18.12. Dekategoryfikacja — związki z arytmetyką	263
	18.13. Koprodukty w innych kategoriach	264
	18.14. Inne zagadnienia	266

19	Pullbacki i pushouty	268
	19.1. Pullbacki	268
	19.2. Pullbacki w Set	271
	19.3. Pullbacki jako obiekty końcowe w jakiejś kategorii	273
	19.4. Przykład: definiowanie kategorii za pomocą pullbacków	274
	19.5. Pojęcie dualne — pushout	276
	19.6. Pushouty w Set	277
	19.7. Pushouty w topologii	283
	19.8. Inne zagadnienia	284
20	Funktory	287
	20.1. Tworzenie definicji	287
	20.2. Funktory pomiędzy małymi przykładami	289
	20.3. Funktory z małych, możliwych do narysowania kategorii	291
	20.4. Funktory wolne i zapominania	294
	20.5. Zachowanie i odzwierciedlanie struktury	298
	20.6. Inne zagadnienia	301
21	Kategorie kategorii	305
	21.1. Kategoria Cat	305
	21.2. Kategorie końcowe i początkowe	309
	21.3. Produkty i koprodukty kategorii	309
	21.4. Izomorfizmy kategorii	312
	21.5. Funktory pełne oraz wierne	317
22	Transformacje naturalne	323
	22.1. Definicja na podstawie naszych intuicji	323
	22.2. Uwaga na temat homotopii	325
	22.3. Kształt	326
	22.4. Kategorie funktorów	326
	22.5. Diagramy i stożki nad diagramami	328
	22.6. Izomorfizmy naturalne	330
	22.7. Równoważność kategorii	332
	22.8. Przykłady równoważności dużych kategorii	337
	22.9. Kompozycja pozioma	338
	22.10. Wymiennność	341
	22.11. Połączenie tego wszystkiego w jedną całość	344
23	Yoneda	345
	23.1. Radość z Yonedy	345
	23.2. Ponowne spojrzenie na bycie tym samym	346
	23.3. Funktory reprezentowalne	348
	23.4. Osadzenie Yonedy	351
	23.5. Lemat Yonedy	358
	23.6. Inne zagadnienia	359

24	Wyższe wymiary	361
	24.1. Dlaczego wyższe wymiary?	361
	24.2. Bezpośrednia definicja 2-kategorii	363
	24.3. Powtórne spojrzenie na homsety	364
	24.4. Od grafów bazowych do 2-grafów	367
	24.5. Kategorie monoidalne	370
	24.6. Ścisłość kontra słabość	372
	24.7. Spójność	375
	24.8. Degeneracja	377
	24.9. n i nieskończoność	381
	24.10. Morał z tej historii	386
	Epilog. Myślenie kategorialne	388
	DODATKI	393
	Dodatek A. Alfabety	395
	Dodatek B. Podstawy logiki	396
	Dodatek C. Podstawy teorii mnogości	397
	Dodatek D. Podstawy przestrzeni topologicznych	399
	<i>Słowniczek</i>	402
	<i>Literatura</i>	408
	<i>Podziękowania</i>	410

Abstrakcja

Przegląd abstrakcyjnej strony matematyki, który ma przygotować Twój umysł na poznanie teorii kategorii. Istotne jest, aby nie traktować matematyki w powszechny, wąski sposób jako nauki o liczbach, równaniach i rozwiązywaniu problemów. W tym rozdziale nadal nie będzie zbyt wiele formalizmów.

2.1. Czym jest matematyka?

W poprzednim rozdziale nazwałam teorię kategorii „matematyką matematyki”. Powinam więc zacząć od dokładniejszego opisanie tego, w jaki sposób myślę o matematyce. Jeśli spojrzymy na definicję matematyki w zbyt wąski sposób, to wyrażenie „matematyka matematyki” nie będzie miało żadnego sensu.

Matematyka to nie tylko nauka o liczbach i równaniach i nie polega ona wyłącznie na rozwiązywaniu problemów. Są to wprawdzie elementy matematyki, na które często kładzie się nacisk w szkołach i podczas nauczania matematyki niematematyków. Nauczanie matematyki w szkołach zwykle zaczyna się od liczb i arytmetyki, następnie przechodzi się do równań, a potem zajmuje się takimi rzeczami jak trygonometria i wybrane zagadnienia geometrii. Trygonometria i geometria tak naprawdę nie dotyczą liczb, ale kształtów. Niemniej w trakcie ich studiowania pojawia się wiele liczb i kwestie takie jak obliczanie kątów i długości opisywane są właśnie za pomocą liczb.

Matematyka stosowana wymaga rozwiązywania wielu problemów za pomocą liczb i równań. Zwykle przedmiotem jej zainteresowania są jakieś mierzalne w liczbach wartości i związane z nimi równania, a celem jest obliczenie wartości nieznanymi parametrów na podstawie tych, które da się zmierzyć.

Jest to najbardziej widoczny i oczywisty sposób wykorzystania matematyki, więc nie winię nikogo za myślenie, że jest to jedyny sposób jej uprawiania. Pod hasłem „matematyka” kryje się jednak coś więcej, a mianowicie również *teoria* działania tych rzeczy. Dzięki tej teorii możemy upewnić się, że liczby i równania działają, teoria ta pozwala je udoskonalać i opracowywać ich nowe wersje, które poradzą sobie z bardziej złożonymi i pełnymi niuansów sytuacjami. Teoria jest jak fundamenty — wprawdzie ich nie widać, ale nie da się bez nich postawić domu.

Każda dyscyplina naukowa zapewnia jakiś sposób dotarcia do jej prawd. W każdej z nich poszukuje się określonego rodzaju prawdy i opracowuje metody lub ramy, w oparciu o które decyduje się o tym, co będzie uważane za prawdziwe. Myślę, że w dobie nadmiaru informacji (a właściwie nadmiaru wszystkiego) zrozumienie tych metod i ram jest o wiele ważniejsze niż poznanie samych prawd. Ważne, aby wiedzieć, *jak* zdecydować, co należy uznać

za prawdę, czyli jak stworzyć dobre fundamenty, na których można oprzeć nasze zrozumienie. Mocno wierzę, że zrozumienie tych procesów i ram jest tym elementem studiowania dowolnej dziedziny, w tym i matematyki, który najłatwiej przenosi się na inne obszary.

2.2. Logika i abstrakcja — bliźniacze dyscypliny

Ramy matematyki zawierają dwie bliźniacze dyscypliny: logikę i abstrakcję. Ich wykorzystanie nie jest unikalną cechą matematyki, ale uważam ją za mniej lub bardziej zdefiniowaną poprzez ich połączenie.

Powiedziałabym, że logiką posługuje się również filozofia, ale ona stosuje ją do znajdowania odpowiedzi na rzeczywiste pytania o doświadczenia życiowe. Sztuka posługuje się abstrakcją, ale nie tworzy jej w oparciu o logikę. Matematyka łączy w sobie logikę i abstrakcję. W matematyce wykorzystujemy logikę do budowania rygorystycznych argumentów, a za pomocą abstrakcji gwarantujemy, że działamy w świecie, w którym da się prowadzić rygorystyczne rozumowania logiczne.

Może to sprawiać wrażenie, że za pomocą matematyki nigdy nie możemy mówić o „rzeczywistym” (a raczej konkretnym¹) świecie, ponieważ zawsze działamy w abstrakcji. Chociaż jest to w pewnym sensie prawda, własność ta ma również charakter redukcyjny. Abstrakcje to aspekty konkretnego świata lub widoki przedstawiające go z określonego punktu widzenia. Chociaż nigdy nie pozwolą nam one uzyskać pełnego wyjaśnienia, pozwalają nam uzyskać pełne zrozumienie poszczególnych jego aspektów. Dopóki mamy jasność, że każda z abstrakcji jest jedynie częściowym widokiem, możemy w elastyczny sposób poruszać się między różnymi widokami, aby uzyskać dokładniejszy obraz.

Istnieje subtelna różnica między tym podejściem a bezpośrednim badaniem konkretnego świata. W podejściu bezpośrednim zazwyczaj uzyskujemy jedynie częściowe zrozumienie, ponieważ konkretny świat jest zbyt chaotyczny, aby dało się go opisać za pomocą logiki. Różnicę tę pokazano na poniższym diagramie.



A zatem matematyka abstrakcyjna nadal bada świat, tyle że w mniej bezpośredni sposób. Jej punktem wyjścia jest abstrakcja, a punktem wyjścia abstrakcji jest zapomnienie o pewnych szczegółach opisywanej przez nią sytuacji.

¹ Cóż może znaczyć, że coś jest rzeczywiste?

2.3. Zapominanie szczegółów

Abstrahowanie polega na zagłębieniu się w sytuację w celu ustalenia, co leży u jej podstaw. Innym sposobem myślenia o abstrakcji jest traktowanie jej jako procesu pomijania nieistotnych szczegółów lub procesu usuwania szczegółów, które są nieistotne w stosunku do tego, o czym teraz myślimy. Choć szczegóły te mogą mieć znaczenie dla innych kwestii, po prostu uznajemy, że na razie nie musimy się nimi martwić. Co najważniejsze, szczegóły należy pomijać w ostrożny i kontrolowany sposób, a nie bezmyślnie je ignorować z lenistwa lub z chęci skierowania argumentacji w określonym kierunku.

Jeśli ktoś mówi, że „kobiety są gorsze z matematyki od mężczyzn”, to pomija istotne szczegóły i wprowadza dwuznaczności lub celowo wykorzystuje dane w mylący sposób. To oburzające stwierdzenie zawiera *w pewnym sensie* ziarno prawdy — obecnie na uczelniach na stanowiskach profesorów matematyki zatrudnionych jest mniej kobiet niż mężczyzn, ale nie oznacza to, że istnieją jakiegokolwiek dowody na to, że kobiety są *z natury* gorszymi matematykami niż mężczyźni. Jest to pedantycznie poprawne wyrażenie faktu, że obecnie kobiety radzą sobie w dyscyplinie matematyki gorzej niż mężczyźni².

Natomiast jeśli zaobserwujemy, że jedno jabłko plus drugie jabłko daje dwa jabłka i że jeden banan plus drugi banan to dwa banany, i powiemy, że jedna rzecz w połączeniu z inną daje dwie rzeczy, to szczegóły związane z jabłkami i bananowcami zostają zignorowane i stają się naprawdę nieistotne w kontekście koncepcji, że jedna rzecz plus druga rzecz daje dwie rzeczy. Jest to abstrakcja i w ten sposób powstają liczby. Liczby to jedno z pierwszych pojęć abstrakcyjnych, z jakimi się spotykamy, choć nie zawsze myślimy o liczbach jako o abstrakcji. To dobrze, ponieważ pokazuje to, że poznając liczby, podnieśliśmy podstawowy poziom abstrakcji, z którym czujemy się komfortowo w naszych głowach. To tak jak z faktem, że na początku rzeczy mogą wydawać się trudne, ale później wydają się tak łatwe, że stają się drugą naturą. To wszystko jest znakiem, że poczyniliśmy postępy.

2.4. Zalety i wady

Zanim przejdę do szczegółów tego, jak przeprowadzamy abstrakcję, chcę napisać kilka słów o jej wadach i zaletach. Choć kuszące może być wspomnienie jedynie o korzyściach, może to przynieść efekt odwrotny do zamierzonego, jeśli inni ludzie zobaczą wady i pomyślą, że jesteś nieuczciwy lub celowo wprowadzasz ich w błąd. Uważam, że warto zapoznać się z wadami i zaletami robienia czegoś, a następnie odpowiednio je wyważyć. Bardzo rzadko coś ma wyłącznie pozytywne lub negatywne strony.

Według mnie największą zaletą abstrakcji jest możliwość sprowadzenia wielu różnych sytuacji do pewnej klasy przykładów. Pozwala nam to stosować pozyskane wnioski w różnych sytuacjach i tym samym zwiększa efektywność naszych procesów myślowych, pozwalając nam badać wiele rzeczy naraz. Świat jest skomplikowanym miejscem i aby móc go zrozumieć za pomocą naszych biednych i małych mózgów, musimy go uprościć. Jednym z popularnych sposobów upraszczania jest ignorowanie pewnych szczegółów. Moim

² W *The Art of Logic* pisałam o tym, że pedanteria to precyzja pozbawiona światła. W tym przypadku jest jeszcze gorzej: to precyzja z aktywnym zaciemnianiem.

zdaniem jest to dość niebezpieczny sposób upraszczania. Innym jest tworzenie połączeń pomiędzy pewnymi szczegółami, dzięki którym nasz mózg jest w stanie poradzić sobie z większą liczbą rzeczy jednocześnie. Myślę, że to lepszy sposób. Najlepszym sposobem jest zwiększenie naszej inteligencji, dzięki czemu świat stanie się prostszy w stosunku do poziomu naszych mózgów.

Tyle o zaletach; czas na wady. Po pierwsze abstrahowanie wymaga pewnego wysiłku, ale wydaje mi się, że wysiłek ten należy włożyć na początku, a później można już tylko czerpać z niego korzyści. Uważam, że to inwestycja, a dodatkowy wysiłek *na wczesnych etapach* oznacza, że *później* możemy zrozumieć więcej rzeczy kosztem mniejszego wysiłku.

Kolejną wadą jest to, że tracimy szczegóły. Oznacza to po prostu, że nie powinniśmy pozostawać *wyłącznie* w świecie abstrakcji. Zawsze musimy pamiętać, że w pewnym momencie będziemy musieli zająć się pewnymi szczegółami. Tymczasowa utrata szczegółów jest ważną częścią znajdowania powiązań pomiędzy sytuacjami, a zatem wydaje mi się, że wynik tego procesu jest pozytywny.

Kolejną wadą jest to, że abstrahowanie oddala nas od normalnego, codziennego świata, do którego jesteśmy przyzwyczajeni. Może to być nieco przerażające, ponieważ możemy odnosić wrażenie, że nie stąpamy już po ziemi. Może to być przerażające również dlatego, że nie możemy dotykać, czuć ani widzieć rzeczy i nie możemy już opierać się na naszej życiowej intuicji. Intuicja sama w sobie jest jednak mieczem obosiecznym³. Czy to w matematyce, czy w życiu intuicja zarówno nam pomaga, jak i przeszkadza. Pomaga w sytuacjach, w których nie mamy wystarczającej ilości informacji lub czasu, aby posługiwać się logiką. Intuicja pomaga nam w oparciu o nasze doświadczenia, które jednak równocześnie nas ograniczają. Jeśli posłuszysz się nią zamiast logiki, może Cię ona wyprowadzić na manowce. Na przykład, gdy poznaje się nową osobę, nieuniknione jest posiadanie jakiegoś przeczucia na jej temat. Błędem jest natomiast kurczowe trzymanie się tego przeczucia, które zastępuje reakcję na cechy charakteru poznawanej osoby, zwłaszcza gdy nasz pierwotny instynkt jest wypaczony przez jakieś ukryte uprzedzenia, a (z definicji) jest tak zawsze.

Tak samo w matematyce posiadanie intuicji co do różnych rzeczy nie jest niczym złym. W rzeczywistości wiele badań w tej dziedzinie rozpoczyna się od przejawu instynktu w głowie jakiegoś matematyka. Kluczem jest jednak zbadanie tej koncepcji za pomocą logiki i niepoleganie zbyt na intuicji.

Jedną z kluczowych kwestii jest to, że argumentowanie w oparciu o rygorystyczną logikę matematyczną może zaprowadzić nas znacznie dalej, niż zaprowadziłaby nas intuicja. Rozumowanie logiczne może nas zabrać w miejsca, co do których nie mamy żadnych intuicji, takie jak przestrzenie nieskończone wymiarowe lub światy liczb, które nie mają konkretnej interpretacji w życiu codziennym. Na przykład jednym z celów rachunku różniczkowego jest zrozumienie, co powoduje powstawanie interesujących cech na wykresach funkcji, takich jak przerwy, piki i miejsca, w których krzywa zmienia kierunek. Dzięki rachunkowi różniczkowemu możemy szukać tych cech, nawet jeśli sam wykres jest zbyt skomplikowany do narysowania (a więc nie da się tego zrobić w wizualny sposób).

Jednym z możliwych zarzutów wobec tej „zalety” jest to, że możesz uważać, że nigdy nie znajdziesz się w miejscu, w którym nie obowiązuje Twoja intuicja. Może to być prawda,

³ Zawsze uważałam tę metaforę za nieco dziwną, ponieważ nie wydaje mi się, aby dwa ostrza takiego miecza działały przeciwko sobie.

ale ćwiczenie swojego umysłu w takich obszarach nadal może pomóc Ci rozwinąć swoją intuicję. Jestem przekonana, że lata ćwiczenia umysłu w ten abstrakcyjny sposób umożliwiły mi jaśniejsze myślenie o otaczającym mnie świecie i łatwiejsze tworzenie powiązań między sytuacjami, które dla innych osób nie wiążą się ze sobą w żaden sposób. Często gdy prezentuję abstrakcyjne wyjaśnienia argumentów dotyczących kwestii społecznych, takich jak molestowanie seksualne, seksizm, rasizm, przywileje, brak równowagi sił itd., ludzie pytają mnie, jak na nie wpadłam. Odpowiadam, że dzięki temu, że poświęciłam całe życie na ćwiczenie abstrakcyjnego matematycznego myślenia, rzeczy te przychodzą mi całkiem gładko. Dobrze jest ćwiczyć tak, aby być w stanie zrobić więcej, niż uważa się, że będzie się kiedykolwiek potrzebowało. Dzięki temu rzeczy, które musisz zrobić, staną się łatwiejsze.

Ostatnią zaletą jest to, że abstrahowanie może być zabawne. W tych trudnych czasach chęć zabawy może wydawać się nieco niepoważna, ale skupianie się jedynie na użyteczności brzmi strasznie nudno. Moim zdaniem usuwanie zewnętrznych warstw jakiejś sytuacji i odnajdywanie jej sedna jest bardzo satysfakcjonujące. Odpowiada to mojej postawie, która zazwyczaj polega na tym, że nie interesuje mnie to, co widoczne na pierwszy rzut oka, tylko to, co dzieje się w sercu rzeczy, głęboko w sobie, daleko pod powierzchnią. Abstrahowanie samo w sobie naprawdę sprawia mi wielką radość.

2.5. Przekładanie analogii na rzeczywistość

Abstrakcja powstaje na skutek dostrzeżenia analogii między różnymi sytuacjami. Jest to szczególna forma zapominania o szczegółach polegająca na znajdowaniu powiązań między różnymi sytuacjami, a nie na arbitralnym ignorowaniu szczegółów.

Jeśli mówimy, że jedna sytuacja jest „analogiczna” do drugiej, to mamy na myśli to, że jeśli w każdej z tych sytuacji pominiemy pewne powierzchniowe szczegóły, to w rzeczywistości obie sytuacje będą takie same. W odróżnieniu od normalnego życia w matematyce nie mówimy jedynie, że sytuacje są „analogiczne”, ale dodatkowo bardzo precyzyjnie określamy, które cechy są jednakowe w obu sytuacjach i powodują, że pomiędzy nimi zachodzi analogia. Część z kwestii przedstawionych poniżej poruszyłam również w książce *The Art of Logic*.

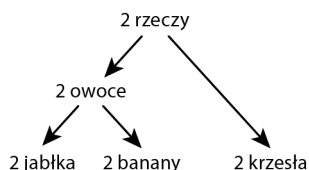
Jeśli pomyślimy o dwóch jabłkach i dwóch bananach, możemy uznać je za analogiczne, ponieważ oba są przykładami dwóch rzeczy. Możemy je również uznać za analogiczne, ponieważ oba są przykładami dwóch owoców. Żadne z nich nie jest „dobre” ani „złe”, żadne nie jest też „lepsze” ani „gorsze”. Możemy jednak powiedzieć, że „dwie rzeczy” to wyższy poziom abstrakcji niż „dwa owoce”, ponieważ w pierwszym określeniu pomijamy więcej szczegółów dotyczących obserwowanej sytuacji; i odwrotnie, powiedzenie „dwa owoce” jest mniej abstrakcyjne i zbliża nas do rzeczywistego stanu rzeczy.

Bardziej abstrakcyjna wersja oddala nas od „rzeczywistości” (czykolwiek ona jest), a jedną z głównych jej zalet jest to, że pozwala ona na uwzględnienie w naszej analogii bardziej odległych przykładów. W tej sytuacji oznacza to, że moglibyśmy uwzględnić w niej dwa krzesła, dwie małpy lub dwie planety.

Abstrahowanie przypomina w pewnym sensie głębsze przyglądanie się danej sytuacji, ale jest to również cofnięcie się o krok i spojrzenie na szerszą perspektywę zamiast

skupiania się na szczegółach. Fakt, że możemy znaleźć różne abstrakcje tej samej rzeczy, sugeruje pewną dwuznaczność, ale w rzeczywistości jest to kluczowa cecha abstrakcji. Za pomocne uważam rysowanie diagramów na różnych poziomach abstrakcji.

Oto diagram pokazujący analogię pomiędzy dwoma jabłkami i dwoma bananami wynikającą z tego, że oba te byty są owocami. Jeśli przejdziemy dalej do poziomu dwóch rzeczy, to za pomocą naszej abstrakcji możemy opisać również dwa krzesła.



W matematyce kluczowe jest to, że nie mówimy po prostu, że rzeczy są *analogiczne*, ale precyzyjnie określamy poziom analogii, a następnie idziemy o krok dalej i traktujemy go jako przedmiot sam w sobie oraz prowadzimy na nim badania. W ten sposób wkraczamy do świata abstrakcji i to właśnie w tych abstrakcyjnych światach „uprawiamy” matematykę. W powyższym przykładzie jest to poziom „dwóch rzeczy”, czyli świat liczb.

Różnica pomiędzy określeniem przyczyny analogii a jedynie stwierdzeniem, że rzeczy są względem siebie analogiczne, przypomina różnicę między powiedzeniem komuś, że przez pole przechodzi ścieżka, a faktycznym wskazaniem, gdzie się ona znajduje. Pamiętam, jak w dzieciństwie brałam udział w wycieczkach po wzgórzach South Downs w południowo-wschodniej Anglii. Wchodziliśmy na pola po przełazach⁴, a małe drewniane drogowskazy informował nas, że na polu znajduje się ścieżka. Tak naprawdę nie mówiły one, gdzie dokładnie się ona znajduje. Z tego powodu zazwyczaj po dotarciu do drugiego końca pola nie trafialiśmy na kolejny przełaz, ponieważ po drodze prawie zawsze zbaczaliśmy z rzekomej „ścieżki”.

Określenie struktury, a nie tylko zauważenie jej istnienia to koncepcja, do której powrócę w dalszej części książki, gdy zajmiemy się bardziej subtelnymi aspektami teorii kategorii. Na razie najważniejsze jest to, że uszczegółowienie pewnych kwestii pomaga nam rozwiązać pewne niejasności, zwłaszcza że zawsze istnieje możliwość stworzenia więcej niż jednej abstrakcji danej sytuacji.

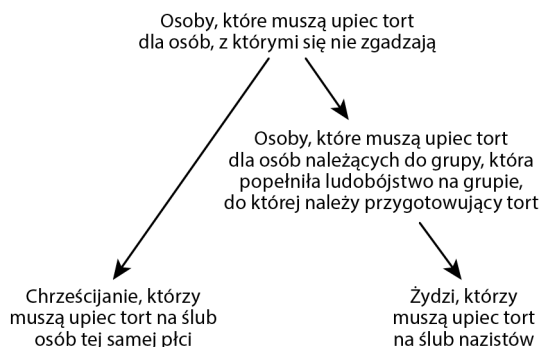
2.6. Różne abstrakcje tej samej rzeczy

To, że mogą istnieć różne abstrakcje tej samej rzeczy, może wydawać się nieco mylące, ale w pewnym sensie o to właśnie chodzi. Abstrahowanie nie jest dobrze zdefiniowanym procesem, co oznacza, że może dawać różne wyniki w zależności od tego, jak się je przeprowadzi. (W matematyce „dobrze zdefiniowany” oznacza „jednoznacznie określony”; nie oznacza to jedynie, że ktoś stworzył dobrą definicję). W życiu codziennym jest to przyczyna wielu sporów, ponieważ uznanie, że coś jest „analogiczne” do czegoś innego, pozostawia niejasności co do tego, o jakim poziomie mówimy. Ktoś inny prawdopodobnie zmiażdży Twoją argumentację lub powie, że „to nie to samo, ponieważ...”, a następnie

⁴ Przełaz (ang. *stile*) to rodzaj tradycyjnego drewnianego stopnia umożliwiający ludziom przechodzenie przez płot ograniczający pole w sposób uniemożliwiający uwolnienie znajdujących się na nim zwierząt gospodarskich. Przełazy występują dość powszechnie w Wielkiej Brytanii, na terenie której często obowiązują „prawa do swobodnego przejścia”, które dają społeczeństwu prawo do poruszania się po polach.

wskaże Ci, w jaki sposób te dwie rzeczy się od siebie różnią, lub powie: „No cóż, to tak, jakby powiedzieć, że...”, a następnie odwoła się do jakiegoś absurdalnego poziomu abstrakcji i pośrednio oskarży Cię, że operujesz właśnie na nim. W poprzednim przykładzie w pierwszym przypadku ktoś mógłby powiedzieć, że „dwa jabłka to nie to samo co dwa banany, bo przecież nie można zjeść skórki od banana”. W drugim przypadku ktoś może powiedzieć: „No cóż, jeśli myślisz, że dwa jabłka są takie same jak dwa krzesła, to najwyraźniej nigdy nie próbowałaś siedzieć na jabłku!”.

Oto znacznie mniej trywialny przykład. W 2018 roku w Kolorado toczył się proces dotyczący chrześcijańskich piekarzy, którzy odmówili przygotowania tortu na wesele osób tej samej płci. Widziałam w sieci, że pewna osoba próbowała argumentować, że twierdzenie, że chrześcijanie powinni upiec tort na ślub osób tej samej płci, to tak, jakby twierdzić, że Żydzi powinni upiec ciasto na ślub nazistów. Mam głęboką nadzieję, że Twoja instynktowna reakcja brzmiała: „To nie to samo!”. Niemniej uważam umiejętność uznania *sensu, w jakim* te rzeczy są analogiczne, za ważną, nawet jeśli sens ten nas obrzydza. Naprawdę uważam, że zwykła riposta w stylu „To nie to samo” będzie nieskuteczna, a lepsze rezultaty da zastosowanie bardziej ostrożnej logiki. Oto poziom abstrakcji, który faktycznie prowadzi do tej analogii, oraz inny poziom, który pozwala rozróżnić te dwa wnioski:



Mój wspaniały promotor, Martin Hyland, nauczył mnie, że gdy zajmujesz się matematyką abstrakcyjną, celem nie jest znalezienie możliwie najwyższego poziomu abstrakcji, ale znalezienie poziomu wystarczającego do tego, co próbujesz osiągnąć. Można powiedzieć, że chcemy znaleźć „właściwego człowieka na właściwe miejsce”⁵. Martin zaszczylił we mnie również zwyczaj rozpoczynania zdań słowami „W pewnym sensie...”. Matematyka nie zajmuje się dobrem i złem ani prawdą absolutną. Chodzi o różne konteksty, w których różne rzeczy mogą być prawdziwe, i o różne sensy, w których różne rzeczy mogą być ważne. W matematyce abstrahowanie polega na precyzyjnym określeniu, o jaki sens nam chodzi. Dzięki temu możemy skuteczniej zbadać, co powoduje powstawanie określonych wyników, zamiast prowadzić dzielące nas spory, i to niezależnie od tego, czy dotyczą one abstrakcyjnych teorii, czy homofobicznych piekarzy.

Ostatecznie zapominając o wszystkich szczegółach, zawsze moglibyśmy uczynić wszystko dokładnie tym samym. Na przykład, gdy zdejmę okulary, wszystko wygląda równie

⁵ Albo i nie, jeśli ktoś nigdy nie słyszał tego powiedzenia.

niewyraźnie. Robimy tak również w życiu: czasami kuszące jest stwierdzenie, że wszyscy jesteśmy ludźmi, więc tak naprawdę wszyscy jesteśmy tacy sami. Choć w stwierdzeniu tym słyhać wspaniałego jednoczącego ducha, neguje ono walkę różnych ludzi z uciskiem, uprzedzeniami, biedą, chorobami i wieloma innymi rzeczami. Istnieje również odwrotna tendencja polegająca na podziale ludzkości na bardzo wiele różnych tożsamości i ich kombinacji, które podkreślają nasze wyjątkowe doświadczenia. Popadanie w którąkolwiek z tych skrajności prawdopodobnie nie będzie pomocne. Pomocna będzie możliwość zobaczenia wszystkich poziomów i zachowania wystarczającej elastyczności, aby móc poruszać się między nimi i wyciągać wnioski na różnych stopniach szczegółowości.

Do przemyślenia

2.1. W jakich sensach dodawanie i mnożenie są „tym samym”, a w jakich „różnią się” od siebie?

Zarówno dodawanie, jak i mnożenie są **operacjami dwuargumentowymi**: przyjmują dwie dane wejściowe i zwracają jedną odpowiedź. Na początkowym etapie poznawania matematyki są to operacje wykonywane na dwóch liczbach, ale w miarę przechodzenia na inne poziomy abstrakcji możliwe jest zdefiniowane dodawania i mnożenia również na innych typach obiektów matematycznych.

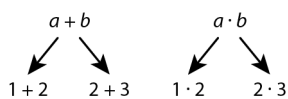
Jako operacje dwuargumentowe mnożenie i dodawanie współdzielą pewne cechy, w tym to, że kolejność liczb, na których wykonywane są operacje, nie ma znaczenia (nazywamy to **przemiennością**), tak samo jak kolejność wykonywania tych operacji w sekwencji (jest to tak zwana **łączność**). Pomimo tych cech dodawanie i mnożenie działają w różny sposób. Na przykład efekty dodawania możemy zawsze „cofnąć” za pomocą odejmowania, natomiast efekty mnożenia nie zawsze da się „cofnąć” za pomocą dzielenia — za pomocą dzielenia nie da się cofnąć efektów mnożenia przez 0. Czasami uważa się, że po prostu „nie można dzielić przez 0”, ale w dalszej części książki przedstawię Ci lepsze i bardziej abstrakcyjne wyjaśnienie tego problemu.

2.7. Abstrakcyjna podróż przez poziomy matematyki

W miarę rozwoju matematyki jej aspekty stają się coraz bardziej abstrakcyjne. Podczas przechodzenia przez kolejne poziomy abstrakcji możemy zauważyć pewną progresję, którą można przedstawić za pomocą następujących kroków:

1. Dostrzeżenie analogii pomiędzy różnymi rzeczami.
2. Ustalenie, co naszym zdaniem powoduje tę analogię.
3. Uznanie tej rzeczy za nową, bardziej abstrakcyjną koncepcję samą w sobie.
4. Oswojenie się z nowymi abstrakcyjnymi koncepcjami i zaprzestanie uważania ich za aż tak abstrakcyjne.
5. Dostrzeżenie analogii pomiędzy niektórymi z tych nowych koncepcji.
6. I tak w kółko...

Jedną z zalet traktowania abstrakcyjnych koncepcji jako nowych obiektów jest możliwość tworzenia w oparciu o nie kolejnych koncepcji. Oto przykład początkowego procesu abstrahowania z podstawowej matematyki.



Oto niesławny proces „zamieniania liczb na litery”, czyli etap w nauce matematyki, na którym wiele osób kończy swoją przygodę z tą dziedziną.

(Właściwie istnieje też niższy poziom, na którym przechodzimy od obiektów takich jak jabłka i banany do liczb). Dlaczego liczby zmieniły się w litery? Stało się to, abyśmy mogli zauważyć rzeczy, które są prawdziwe w sposób abstrakcyjny, niezależnie od tego, jakich dokładnie liczb używamy. Na przykład:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 2 + 1 \\ 1 + 3 &= 3 + 1 \\ 2 + 3 &= 3 + 2 \\ 5 + 7 &= 7 + 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

We wszystkich tych sytuacjach dzieje się coś analogicznego i nie sposób byłoby wymienić wszystkie kombinacje liczb, dla których jest to prawda, ponieważ jest ich nieskończenie wiele. Moglibyśmy opisać tę zależność następującymi słowami: „jeśli dodamy do siebie dwie liczby, nie ma znaczenia, w jakiej kolejności to zrobimy”, ale takie działanie jest trochę naciągane.

Zwięzły, abstrakcyjny sposób wyrażenia tej zależności jest następujący: dla dowolnych dwóch liczb a i b :

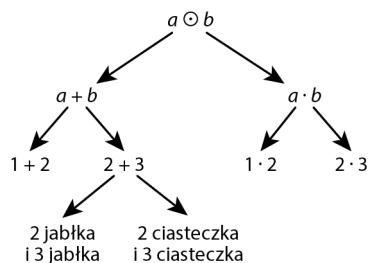
$$a + b = b + a.$$

„Zamieniliśmy liczby na litery”, abyśmy mogli jednocześnie opisać tysiące różnych liczb i dokładnie określić wzór, który opisuje obserwowaną przez nas analogię. Jest on nie tylko bardziej zwięzły i w efekcie łatwiejszy do zapisania (matematycy okazują się być bardzo leniwi, gdy muszą wielokrotnie zapisywać bardzo rozwlekłe rzeczy). Abstrakcyjne sformułowanie tej zależności może pomóc nam pójść o krok dalej i określić jej podobieństwo do innych sytuacji.

Istnieje też wyższy poziom abstrakcji, o który zahaczyliśmy pod koniec poprzedniego podrozdziału. Jeśli zastanowimy się nad podobieństwami pomiędzy dodawaniem i mnożeniem, zobaczymy, że mają one pewne wspólne cechy. Po pierwsze oba te procesy przyjmują dwie liczby (na poziomie podstawowym) i wykorzystują je do wyznaczenia odpowiedzi. Procesy te mają również pewne zaobserwowane przez nas własności, takie jak przemienność i łączność.

Nazwanie dodawania i mnożenia „procesem, który przyjmuje dwie liczby i zwraca odpowiedź” to kolejny poziom abstrakcji. Jest to kolejna analogia pomiędzy dodawaniem i mnożeniem.

Oto diagram przedstawiający ten nowy poziom abstrakcji. Symbol \odot reprezentuje operację binarną, którą może być $+$, \cdot lub coś innego. Przechodząc w górę tego diagramu, podróżujemy przez kolejne poziomy abstrakcji. Podróż ta przypomina trochę podróż przez edukację matematyczną.

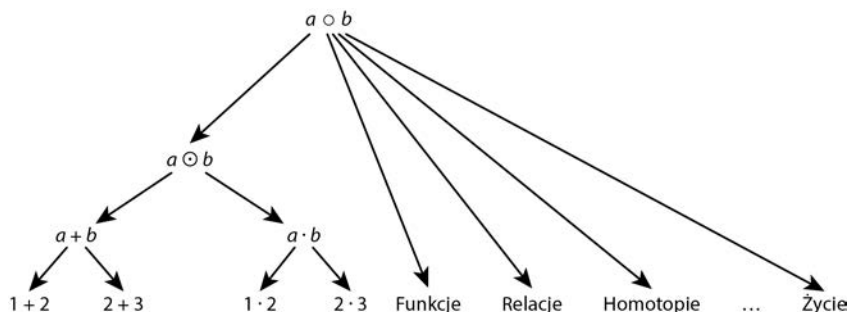


Na samym dole mamy rzeczy, które być może robiłeś w przedszkolu, gdy bawiłeś się znanymi Ci przedmiotami i ktoś chciał skierować Twoją uwagę w kierunku liczb. Na wyższym poziomie znajduje się arytmetyka, być może znana Ci ze szkoły podstawowej. Następnie przechodzimy do algebry, która nadal trochę przypomina szkolną matematykę. W tym

przykładzie na najwyższym poziomie mamy do czynienia z abstrakcyjnymi operacjami dwuargumentowymi, czyli z czymś, co można spotkać, jeśli na studiach wyższych wybierze się zajęcia z „algebry abstrakcyjnej”. Operatory dwuargumentowe bada się na przykład w teorii grup i jest to jeden z tematów, do których jeszcze powrócę. Nawiasem mówiąc, zawsze uważałam termin „algebra abstrakcyjna” za dość dziwny, ponieważ każda algebra jest abstrakcyjna i (jak już wspomniałam) to, co uważamy za abstrakcyjne, zmienia się wraz z naszymi przyzwyczajeniami.

Istnieje też wyższy poziom abstrakcji, który możemy nazwać „bardzo abstrakcyjną algebrą”. Na tym poziomie możemy myśleć o bardziej subtelnych sposobach łączenia dwóch rzeczy. Zamiast brać dowolne dwie rzeczy i na ich podstawie ustalać odpowiedź, na tym poziomie możemy wziąć jedynie rzeczy, które pasują do siebie jak w układance. Na przykład w kontekście podróżowania pociągiem możemy wydłużyć trasę naszej podróży, odbywając po pierwszej przejażdżce kolejną. Możemy to zrobić jedynie wtedy, gdy druga podróż zaczyna się w miejscu, w którym kończy się ta pierwsza, tak abyśmy byli w stanie się przesiąść. Oznacza to, że do wydłużenia trasy nie możemy wykorzystać *żadnych starych* podróży, a jedynie te rozpoczynające się w miejscu, w którym kończy się poprzednia podróż.

Właśnie w ten sposób łączy się rzeczy w teorii kategorii. Operacje dwuargumentowe również są przykładem takich połączeń, ale podobnie jak w przypadku wszystkich wyższych poziomów abstrakcji, w tego typu rozważaniach możemy uwzględnić o wiele więcej rodzajów połączeń, które są bardziej subtelne od operacji dwuargumentowych. Prawidłowość ta dotyczy prawie każdej gałęzi matematyki, ponieważ prawie wszystkie (a może nawet wszystkie) gałęzie matematyki zawierają jakąś formę łączenia rzeczy. Oto diagram pokazujący tę relację. Zamieściłam na nim również nazwy zagadnień, którymi zajmujemy się w dalszej części tej książki.



Na diagramie uwzględniłam również „życie”, aby podkreślić, że choć wyższy poziom abstrakcji może wydawać się nieco odleglejszy od normalnego życia, to poziom ten pozwala nam ujednoclić przykłady należące do znacznie szerszego zakresu, włączając w to przykłady z normalnego życia, które zwykle nie są uwzględniane w matematyce abstrakcyjnej. Moim zdaniem przypomina to trochę huśtanie się na linie — jeśli powiesz linę wyżej, to pod warunkiem że jest ona odpowiednio długa, będziesz się w stanie huścić znacznie dalej. Podobnie jest ze światłem. Jeśli podniesiesz żarówkę, to światło stanie się słabsze, ale oświetlisz nim większy obszar. W rezultacie będziesz mógł spojrzeć raczej na zarys oświetlanego obszaru, a nie na jego szczegóły. Jeśli jednak zachowasz możliwość przesuwania


żarówkę w górę i w dół, to nie stracisz tych szczegółów na zawsze. Co więcej, jeśli znajdziesz sposób na zwiększenie mocy żarówki, będziesz mógł jednocześnie spojrzeć na więcej szczegółów w szerszym kontekście. Uważam, że jest to ważny element zwiększania swojej inteligencji oraz że może w tym pomóc abstrakcyjna matematyka.

Coś „bardziej abstrakcyjnego” nie musi oznaczać czegoś mniej istotnego lub trudniejszego. Zbyt często zakładamy, że w miarę przechodzenia na wyższe poziomy abstrakcji sprawy się komplikują, a zatem nie powinniśmy próbować wspiąć się wyżej, dopóki nie opanujemy poprzedniego poziomu. Moim zdaniem jest to jedna z rzeczy, które mogą powstrzymać niektórych ludzi przed przejściem na kolejny poziom lub odrzucać ich od matematyki. W rzeczywistości dla niektórych osób działanie na wyższych poziomach abstrakcji może być łatwiejsze, ponieważ albo tak jak ja lubią oni abstrakcję i uważają ją za bardziej satysfakcjonującą, albo dlatego, że opisuje ona większą liczbę przykładów, które mogą być bardziej motywujące niż przykłady podawane na niższych poziomach. Jeśli utkniesz na poziomie $a + b$, na którym jedyne dostępne przykłady odnoszą się do dodawania liczb, to możesz odczuć, że cała ta koncepcja jest nudna i niezbyt pomocna. W końcu niektóre rzeczy są zabawne, inne przydatne, a niektóre mają obie te cechy. Natomiast te, które są pozbawione obu z nich, tak naprawdę są do niczego.

Uważam, że powinniśmy odrzucić konieczność znajomości niższych poziomów abstrakcji przed rozpoczęciem studiowania tych wyższych. Jeśli na wyższych poziomach abstrakcji będziesz mieć do czynienia z przykładami z prawdziwego życia, na których zależy Ci bardziej niż na liczbach (na przykład z przykładami dotyczącymi ludzi i ludzkości), to być może taka sytuacja bardziej zmotywuje Cię do dalszej nauki. A jeśli lubisz tworzyć połączenia, spoglądać pod powierzchnię i świecić światłem, to poznawanie wyższych poziomów będzie nie tylko przydatne, ale również zabawne.

PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —

- 
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
 2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
 3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA
Helion 

Matematyka nie ma najlepszej opinii. Niektórzy wręcz jej nienawidzą, wielu narzeka na jej nieprzydatność. Inni twierdzą, że jest sztywna, nietwórcza, nieciekawa i trudna, a także że nie ma nic wspólnego z prawdziwym życiem i przydaje się jedynie naukowcom i inżynierom. Nic bardziej mylnego! Matematyka, a szczególnie matematyka abstrakcyjna, jest nie tylko dziedziną nauki, ale i efektywnym sposobem myślenia. Koncentruje uwagę na tym, co istotne, a to z kolei pozwala dotrzeć do sedna. Jest przydatna w wielu praktycznych kwestiach, którymi każdy z nas zajmuje się na co dzień.

Ta książka stanowi twardy dowód, że matematyka jest elastyczna, kreatywna i radosna. Potraktuj ją jako fascynującą podróż przez świat matematyki abstrakcyjnej do teorii kategorii. Przekonaj się, że bez formalnej wiedzy w tej dziedzinie możesz rozwinąć umiejętność matematycznego myślenia. Abstrakcyjne idee matematyczne pomogą Ci inaczej spojrzeć na aktualne wydarzenia, kwestie sprawiedliwości społecznej i przywilejów społecznych czy nawet na COVID-19. Najpierw poznasz idee i zasady matematyki abstrakcyjnej, aby stopniowo przechodzić do bardziej technicznych zagadnień i istoty teorii kategorii. Omówienie jej najważniejszych elementów, takich jak transformacje naturalne i dualność, znajdziesz w ostatniej części książki, gdzie zawarto także wyniki bieżących badań nad wielowymiarową teorią kategorii.

Przekonaj się, jak piękna i fascynująca jest królowa nauk!

Dr Eugenia Cheng

Brytyjka o chińskich korzeniach, autorka nagradzanych książek popularnonaukowych. Wykłada matematykę w School of the Art Institute of Chicago. Słynie z jasnego stylu pisania i umiejętności przekazywania złożonych idei w przystępny sposób. Jej książki i wystąpienia publiczne przyczyniły się do popularyzacji matematyki wśród szerokiego grona odbiorców.

Helion 



helion.pl



HELION S.A.
ul. Kościuszki 1c
44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
helion@helion.pl

KOD KORZYŚCI

Sięgnij po więcej! ▶



ISBN 978-83-289-0039-4



9 788328 900394

Cena: 59,00 zł