Rachunek prawdopodobieństwa dla studentów studiów ekonomicznych

Sabina Denkowska
Monika Papież

Wydawnictwo C.H. Beck

Rachunek prawdopodobieństwa

dla studentów studiów ekonomicznych

Rachunek prawdopodobieństwa
dla studentów studiów ekonomicznych

Sabina Denkowska
Monika Papież

WYDAWNICTWO C.H. BECK
WARSZAWA 2011

Wydawca: Dorota Ostrowska-Furmanek
Redakcja merytoryczna: Dorota Ostrowska-Furmanek
Recenzenci: prof. dr hab. Michał Kolupa, prof. dr hab. Włodzimierz Szkutnik
Projekt okładki i stron tytułowych: Maryna Wiśniewska
Ilustracja na okładce: ©MarkEvans/iStockphoto

Publikacja dofinansowana przez Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Seria: Metody ilościowe

Złożono programem TEX

Wydawnictwo C.H. Beck Sp. z o.o.
ul. Bonifraterska 17, 00-203 Warszawa

Skład i łamanie: Wydawnictwo C.H. Beck
Druk i oprawa: P.W.P. Interdruk, Warszawa

ISBN 978-83-255-2133-2
ISBN e-book 978-83-255-2436-4

Spis treści

Wstęp

Rachunek prawdopodobieństwa na Uniwersytecie Ekonomicznym w Krakowie jest wykładany jako przedmiot obowiązkowy na kierunku Informatyka i Ekonometria oraz na kierunku unikatowym Analityka gospodarcza. Elementy rachunku prawdopodobieństwa pojawiają się również na innych kierunkach studiów w ramach przedmiotu statystyka matematyczna oraz wnioskowanie statystyczne, bowiem jednym z głównych zadań rachunku prawdopodobieństwa jest wprowadzenie w zagadnienia dotyczące teorii estymacji i weryfikacji hipotez statystycznych.

Od kilkunastu lat prowadzimy zajęcia z rachunku prawdopodobieństwa na naszej Uczelni. Niestety, mimo dostępności polecanych przez nas wielu świetnych pozycji wydawniczych, studenci od lat sygnalizowali brak podręcznika napisanego językiem przystępnym dla studentów studiów ekonomicznych, prezentującego teorię ilustrowaną przykładami, które nawiązują do praktyki ekonomicznej. Dostępna literatura jest skierowana przede wszystkim do studentów studiów matematycznych i technicznych, stąd posługuje się hermetycznym językiem matematyki, natomiast przykłady są dalekie od praktycznych zastosowań ekonomicznych. Elementy rachunku prawdopodobieństwa można spotkać również w podręcznikach akademickich dotyczących statystyki matematycznej, jednak materiał dotyczący rachunku prawdopodobieństwa w nich zawarty jest zazwyczaj zbyt okrojony, aby stanowić podstawę dla prowadzenia niezależnego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa. Skłoniło nas to do podjęcia próby wprowadzenia w sposób prosty i przystępny pojęć z rachunku prawdopodobieństwa, ilustrując ich zastosowanie w licznych przykładach. Zawartość merytoryczna tego podręcznika akademickiego jest zgodna z treściami kształcenia zawartymi w standardach kształcenia na kierunku Informatyka i Ekonometria oraz standardach kształcenia na kierunku Analityka gospodarcza. Podręcznik zawiera również zadania do samodzielnego rozwiązania, co ma służyć ugruntowaniu zdobytej wiedzy. Na końcu zamieszczono odpowiedzi do zadań.

Podręcznik ten może służyć studentom również jako przekrojowe repetytorium z rachunku prawdopodobieństwa, m.in. dla przedmiotu metody aktuarialne.

Składamy podziękowanie na ręce recenzentów: prof. Michała Kolupy i prof. Włodzimierza Szkutnika za trafne uwagi, które przyczyniły się do poprawy kształtu tej pracy.

Serdecznie dziękujemy pani dr Alinie Karskiej za wiele cennych uwag, wskazówek i uważną korektę tekstu.

Rozdział 1. Zdarzenia losowe i prawdopodobieństwo

1.1. Zdarzenia losowe

Rachunek prawdopodobieństwa to dział matematyki zajmujący się zdarzeniami, jakie zachodzą, gdy przeprowadzamy doświadczenia losowe. **Doświadczenie nazywamy losowym**, jeżeli można je powtarzać wielokrotnie w tych samych warunkach, a wyniku doświadczenia nie potrafimy z góry przewidzieć.

Pierwsze znane zagadnienia z rachunku prawdopodobieństwa dotyczyły gier hazardowych, w szczególności gry w kości. Mimo że gra znana była już w starożytności, pierwsze teoretyczne zainteresowanie tą grą przejawiali dopiero matematycy francuscy Pierre de Fermat i Blaise Pascal w XVII wieku. Podstawowymi pojęciami rachunku prawdopodobieństwa są: przestrzeń zdarzeń elementarnych z jej elementami, doświadczenie oraz zdarzenie losowe, prawdopodobieństwo zajścia określonego zdarzenia.

Pojęciem pierwotnym, czyli niedefiniowalnym w teorii prawdopodobieństwa, jest **zdarzenie elementarne**. Intuicyjnie możemy powiedzieć, że zdarzenia elementarne są to najprostsze wyniki doświadczenia losowego czy obserwacji. Zdarzenia elementarne oznaczamy małą grecką literą ω.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych związanych z danym doświadczeniem losowym nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy wielką grecką literą Ω.

Ze względu na liczbę elementów przestrzenie zdarzeń elementarnych można podzielić na skończone, przeliczalne[1] lub nieprzeliczalne.

Przykład 1.1.

1) Rzut kostką. Przestrzeń zdarzeń jest skończona i składa się z 6 zdarzeń elementarnych: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, gdzie ω_i oznacza wyrzucenie i-oczek.
2) Rzut monetą do chwili pojawienia się orła. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots\}$, gdzie ω_i oznacza, że dopiero w i-tym rzucie wypadł orzeł (w pierwszych $i-1$ rzutach wypadły reszki). Zdarzenie elementarne ω_i możemy zapisać jako ciąg $\left(\underbrace{\mathrm{R}, \mathrm{R}, \ldots \mathrm{R}}_{i-1}, \mathrm{O}\right)$,

[1] Mówimy, że zbiór jest przeliczalny, gdy jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

w którym dopiero po $i-1$ reszkach R pojawia się orzeł O. Możliwych wyników jest nieskończenie wiele i dadzą się ustawić w ciąg, a tzn. że jest ich przeliczalnie wiele.

3) Spóźnienie (w minutach) studenta na 45-minutowe ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa. $\Omega = (0\,\mathrm{min}; 45\,\mathrm{min}]$ – nieprzeliczalna przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Jeżeli przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest co najwyżej przeliczalna (skończona lub przeliczalna), to każdy podzbiór Ω nazywamy **zdarzeniem losowym** (w skrócie: **zdarzeniem**).

Zdarzenia losowe oznaczamy wielkimi literami: $A, B, C, \ldots$ i mówimy, że zaszło zdarzenie A, gdy w wyniku doświadczenia losowego wybrano w przestrzeni Ω element ω należący do zbioru A.

Przykład 1.2. Doświadczenie losowe polega na rzucie monetą. Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest zbiorem dwuelementowym złożonym ze zdarzeń elementarnych polegających na wypadnięciu orła ω_O lub reszki ω_R.

Dla zbioru $\Omega = \{\omega_O, \omega_R\}$ możemy wyróżnić następujące zdarzenia losowe:

$\emptyset$	– zdarzenie niemożliwe[2],
$A = \{\omega_R\}$	– zdarzenie polegające na wypadnięciu reszki,
$A' = \{\omega_O\}$	– zdarzenie przeciwne[3] do A, polegające na wypadnięciu orła,
$\Omega = \{\omega_O, \omega_R\}$	– zdarzenie pewne[4], polegające na wypadnięciu orła lub reszki.

Przykład 1.3. Rzucamy dwiema kostkami. Przestrzeń zdarzeń Ω ma $36 = \overline{V}_6^2 = 6^2$ różnych zdarzeń elementarnych: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots, (6,6)\}$.

Możemy wyróżnić 2^{36} zdarzeń, bo tyle jest podzbiorów zbioru 36-elementowego.

Jeżeli Ω jest zbiorem nieprzeliczalnym, to wówczas zdarzeniami losowymi są tylko te podzbiory, które tworzą pewną rodzinę podzbiorów nazywaną σ-ciałem.

Rodzinę podzbiorów Z przestrzeni Ω nazywamy **σ-ciałem**, gdy spełnione są następujące warunki:

1) $\Omega \in Z$;
2) $A \in Z \Rightarrow A' \in Z$;
3) $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots \in Z \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots . \in Z$.

Dowolny zbiór należący do Z nazywamy **zdarzeniem losowym**.

Zdarzenia losowe są zbiorami, więc na zdarzeniach wykonuje się analogiczne działania jak na zbiorach i podlegają one prawom analogicznym do praw rachunku zbiorów: przemienności, łączności, rozdzielności oraz prawom de Morgana.

1.2. Prawdopodobieństwo

Możemy spotkać wiele różnych definicji prawdopodobieństwa. Za najważniejszą z nich uważana jest aksjomatyczna definicja Kołmogorowa (oparta na teorii

[2] Nie zachodzi ono przy żadnym powtórzeniu danego doświadczenia.

[3] Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A (oznaczamy A') to zdarzenie składające się z tych wszystkich zdarzeń elementarnych, które nie należą do zdarzenia A.

[4] Zachodzi przy każdym powtórzeniu danego doświadczenia.

miary), która zapoczątkowała nowoczesne matematyczne spojrzenie na teorię prawdopodobieństwa.

1.2.1. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

W 1933 roku A. Kołmogorow sformułował aksjomaty, jakie musi spełniać funkcja, aby można ją było nazwać prawdopodobieństwem. Kołmogorow nie podaje wprost, jak liczyć prawdopodobieństwa zdarzeń, a nawet pozwala prawdopodobieństwa zdarzeń określać różnie, ale tak by spełnione były poniższe trzy warunki.

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych, a Z zbiorem zdarzeń losowych[5] na Ω.

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję rzeczywistą P przyporządkowującą $\forall A \in Z \quad P\colon A \mapsto P(A)$ zgodnie z warunkami:

1) $P(A) \geqslant 0$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ dla zdarzeń parami rozłącznych ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$).

Definicja aksjomatyczna nakłada pewne warunki formalne, jakie ma spełniać przyporządkowanie prawdopodobieństw zdarzeniom. Dla danego zdarzenia A liczba $P(A)$ wyrażająca jego prawdopodobieństwo powinna być dobierana tak, aby przy niezależnych powtórzeniach doświadczenia, częstość występowania tego zdarzenia zbliżała się do $P(A)$ przy wzroście liczby doświadczeń.

Prawdopodobieństwem zdarzenia A będziemy nazywali liczbę z przedziału $\langle 0, 1\rangle$ oznaczoną przez $P(A)$ i przyporządkowaną temu zdarzeniu.

Reasumując, można stwierdzić, że z każdym doświadczeniem losowym jest związana **przestrzeń probabilistyczna danego doświadczenia**, rozumiana jako taka trójka (Ω, Z, P), że: $\Omega \neq \emptyset$, Z – σ-ciało na Ω, P – funkcja prawdopodobieństwa zdefiniowana powyżej. Trójka (Ω, Z, P) stanowi matematyczny opis tego doświadczenia.

Elementarne własności prawdopodobieństwa wynikające z definicji aksjomatycznej:

1) $P(\emptyset) = 0$ – prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego równa się zero;
2) jeżeli zdarzenie A pociąga[6] zdarzenie B ($A \subset B$) to $P(A) \leqslant P(B)$;
3) $\forall A \in Z \quad 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;
4) jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B ($A \subset B$) to $P(B - A) = P(B) - P(A)$;

[5] Z – σ ciało określone na Ω.

[6] Mówimy, że zdarzenie A pociąga zdarzenie B, gdy z zajścia zdarzenia A wynika zajście zdarzenia B.

5) jeżeli zdarzenia losowe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$$

6) suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych równa się jedności:

$$P(A) + P(A') = 1;$$

7) prawdopodobieństwo alternatywy dwóch dowolnych zdarzeń jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich koniunkcji:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

Prawdopodobieństwo alternatywy trzech dowolnych zdarzeń liczymy następująco:

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

1.2.2. Inne definicje prawdopodobieństwa

Klasyczną „definicję" prawdopodobieństwa podał po raz pierwszy P.S. de Laplace w roku 1812. Definicja klasyczna pozwala obliczać prawdopodobieństwo w prostych przypadkach, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona, a wszystkie zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne. W praktyce często spotykamy się z zagadnieniami, gdzie wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne i wówczas prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A można wyrazić wzorem:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}},$$

gdzie: $\overline{\overline{A}}$ – moc zbioru A, $\overline{\overline{\Omega}}$ – liczba wszystkich zdarzeń elementarnych.

Przykład 1.4. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że – losując z talii 52 kart jedną kartę – wylosujemy asa lub karo?

Rozwiązanie

Niech A oznacza zdarzenie polegające na wylosowaniu asa, a K zdarzenie polegające na wylosowaniu karo. Wówczas $A \cup K$ jest zdarzeniem polegającym na wylosowaniu asa lub karo. Korzystając z definicji klasycznej oraz własności 7 – dotyczącej sumy dwóch dowolnych zdarzeń losowych, otrzymujemy:

$$P(A \cup K) = P(A) + P(K) - P(A \cap K) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

Prawdopodobieństwo wylosowania asa lub karo wynosi $\frac{4}{13}$.

Podsumujmy wspomniane wcześniej wady klasycznej definicji prawdopodobieństwa: przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω musi być skończona, a wszystkie zdarzenia elementarne jednakowo prawdopodobne. Zauważmy również pewną niekonsekwencję, polegającą na użyciu w definicji słowa definiowanego – w definicji prawdopodobieństwa zdarzenia elementarne mają być jednakowo prawdopodobne.

Geometryczna definicja prawdopodobieństwa wymaga znajomości miary zbiorów, którymi się posługuje.

Przykład 1.5. W koło o promieniu r wpisano kwadrat. We wnętrzu koła pojawia się losowo punkt. Oblicz prawdopodobieństwo, że punkt pojawi się we wnętrzu kwadratu.

Rozwiązanie

Niech:

Ω – przestrzeń wyników – punkt w kole o promieniu r,

A – zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany punkt pojawi się we wnętrzu kwadratu.

Zauważmy, że bok kwadratu wpisanego w koło o promieniu r wynosi $\sqrt{2}r$. Wówczas:

$$P(A) = \frac{\text{pole zbioru } A}{\text{pole zbioru } \Omega} = \frac{\left(\sqrt{2}r\right)^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64.$$

U podstaw **częstościowej definicji prawdopodobieństwa** leży pojęcie liczebności względnej, czyli częstości, którą obliczamy jako iloraz liczby doświadczeń, w których zrealizowało się zdarzenie losowe i liczby wykonanych doświadczeń. Definicja częstościowa jest szczególnie użyteczna w praktyce, kiedy obserwujemy, że częstości występowania zdarzeń losowych w długich seriach doświadczeń są obdarzone pewną regularnością. Jeżeli warunki, w których jest realizowane doświadczenie, pozostają niezmienione, to częstość można wykorzystać jako ocenę prawdopodobieństwa $P(A)$, a przybliżenie to jest tym lepsze, im większa jest liczba wykonanych doświadczeń. Przyjmuje się więc, że prawdopodobieństwo jest teoretycznym odpowiednikiem pojęcia częstości. Na przykład, ponieważ częstość urodzin dziewczynki wynosi w przybliżeniu 0,483, przyjmujemy, że prawdopodobieństwo urodzenia dziewczynki jest w przybliżeniu równe 0,483.

1.3. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi określonymi na tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, przy czym $P\left(B\right) > 0$.

Prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia A **pod warunkiem, że zaszło zdarzenie** B, nazywamy liczbę $P\left(A|B\right)$ określoną następująco:

$$P\left(A|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{1.1}$$

Z wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe wynika wzór na prawdopodobieństwo koniunkcji dwóch dowolnych zdarzeń A, B:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B), \quad \text{gdzie zakładamy, że } P(B) > 0,$$

lub analogicznie: (1.2)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A), \quad \text{gdzie zakładamy, że } P(A) > 0.$$

Przykład 1.6. W urnie znajdują się 3 kule białe i 4 czarne. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych, przy założeniu że losujemy z urny dwa razy i po pierwszym losowaniu kula nie zostaje zwrócona do urny?

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:
B_1 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej w pierwszym losowaniu,
B_2 – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli białej w drugim losowaniu.

Korzystając z wzoru na koniunkcję dwóch dowolnych zdarzeń (1.2), otrzymujemy:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}.$$

Dwa zdarzenia losowe A, B nazywamy **zdarzeniami niezależnymi**, gdy:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{1.3}$$

Twierdzenie 1.1. Przy założeniu, że $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, warunek $P(A|B) = P(A)$ i $P(B|A) = P(B)$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zdarzenia A, B były niezależne.

Przykład 1.7. Prawdopodobieństwo wygrania w jednej loterii wynosi 0,3. Prawdopodobieństwo wygrania w drugiej loterii wynosi 0,2. Ile wynosi prawdopodobieństwo wygrania w obu loteriach?

Rozwiązanie

Niech A_i oznacza zdarzenie losowe polegające na wygraniu w i-tej loterii ($i = 1{,}2$). Ponieważ zdarzenia A_1 i A_2 są niezależne, ze wzoru (1.3) otrzymujemy:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}06.$$

Przykład 1.8. Sprawdźmy, czy w jednokrotnym rzucie kostką zdarzenia A, B są niezależne, gdzie:
A – oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu liczby oczek nie większej od 2,
B – oznacza zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczy oczek.

Rozwiązanie
Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, gdzie ω_i – zdarzenie elementarne polegające na wypadnięciu i oczek. Wówczas:

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \text{czyli} \quad P(A) = \frac{1}{3},$$
$$B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \quad \text{czyli} \quad P(B) = \frac{1}{2},$$
$$A \cap B = \{\omega_2\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A)P(B).$$

Zdarzenia A i B są niezależne.

W przypadku większej liczby zdarzeń losowych sytuacja jest bardziej złożona, gdyż rozróżniamy dwa rodzaje niezależności: niezależność zespołową i niezależność parami. Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są **niezależne** (**zespołowo** lub **wzajemnie niezależne**), gdy prawdopodobieństwo łącznego zajścia dowolnych m różnych zdarzeń jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń, dla każdego $m \leqslant k$. Natomiast zdarzenia losowe $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są **niezależne parami**, gdy:

$$\forall i \neq j \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (i, j = 1, \ldots, k).$$

Z tego wynika, że trzy zdarzenia losowe A_1, A_2, A_3 są niezależne (zespołowo), gdy spełnione są następujące warunki: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ oraz

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2); \quad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3);$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3).$$

Zauważmy, że z niezależności zespołowej wynika niezależność parami.

Zwróćmy również uwagę na to, że wykluczanie[7] i niezależność to są dwa różne pojęcia[8].

1.4. Prawdopodobieństwo całkowite i twierdzenie Bayesa

Mówimy, że zdarzenia losowe $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tworzą **układ zupełny** (**całkowity**) **zdarzeń**, gdy:

- parami się wykluczają: $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$,
- ich suma jest zdarzeniem pewnym: $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \Omega$.

Twierdzenie 1.2 (o prawdopodobieństwie całkowitym). Niech B będzie dowolnym zdarzeniem losowym określonym na przestrzeni zdarzeń Ω,

[7] Zdarzenia A i B wykluczają się, jeżeli $A \cap B = \emptyset$, czyli dla zdarzeń wykluczających się zachodzi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

[8] Zauważmy, że zdarzenia wykluczające się A, B mogą być niezależne (gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$) lub zależne (gdy $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$). Natomiast zdarzenia niezależne A, B mogą się wykluczać (np. gdy $A = \emptyset$) lub mieć niepustą część wspólną (patrz: przykład 1.8).

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ – takimi zdarzeniami losowymi określonymi na przestrzeni zdarzeń Ω tworzącymi układ zupełny zdarzeń, że: $\forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad P(A_i) > 0$, to wówczas prawdopodobieństwo zdarzenia B wyraża się następującym wzorem:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_k)P(A_k). \quad (1.4)$$

Wzór (1.4) jest nazywany **wzorem na prawdopodobieństwo całkowite**.

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym (zupełnym) jest często ilustrowane za pomocą tzw. drzew stochastycznych (rys. 1.1).

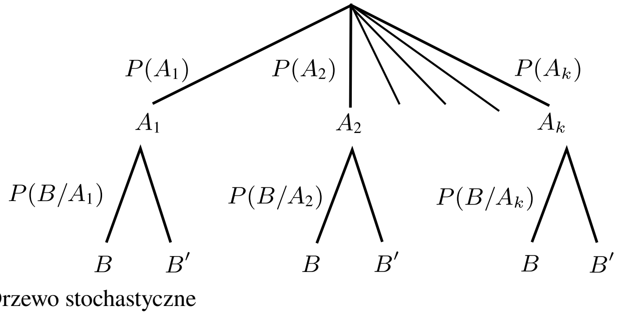
Twierdzenie 1.3 (twierdzenie Bayesa). Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tworzą układ zupełny zdarzeń oraz $P(B) > 0$, to prawdopodobieństwa warunkowe $P(A_r|B)$ $(r = 1, \ldots, k)$ wyrażają się wzorami:

$$P(A_r|B) = \frac{P(B|A_r)P(A_r)}{P(B)} = \frac{P(B|A_r)P(A_r)}{\sum\limits_{i=1}^{k} P(B|A_i)P(A_i)}. \quad (1.5)$$

Wzór (1.5) nazywamy **wzorem Bayesa**. Pozwala on wyznaczyć prawdopodobieństwo zajścia jednego ze zdarzeń, np. A_r $(r = 1, \ldots, k)$, jeśli zaszło zdarzenie B.

Prawdopodobieństwo $P(A_r|B)$ nazywamy **prawdopodobieństwem *a posteriori*** („po fakcie” lub „w następstwie faktu”), gdyż opisuje prawdopodobieństwo zrealizowania się zdarzenia A_r dopiero po wystąpieniu zdarzenia B, a prawdopodobieństwa $P(A_r)$ nazywamy **prawdopodobieństwami *a priori*** („z góry”).

Twierdzenie Bayesa stosujemy głównie wtedy, gdy znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg.



Rysunek 1.1. Drzewo stochastyczne

Przykład 1.9. Agencja nieruchomości „Mój dom” chce sprzedać nieruchomość. Szacuje, że nieruchomość ta zostanie sprzedana w ciągu pół roku z prawdopodobieństwem 0,8, jeżeli banki złagodzą warunki przyznawania kredytów, oraz z prawdopodobieństwem 0,3, jeżeli dotychczasowa polityka kredytowa banków nie ulegnie zmianie. Ekonomiści twierdzą, że jest 40 % szans na zmianę polityki kredytowej banków w najbliższym półroczu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nieruchomość zostanie sprzedana w ciągu tego okresu?

Rozwiązanie

Oznaczmy:

R – zdarzenie losowe polegające na złagodzeniu polityki kredytowej banków,

S – zdarzenie losowe polegające na sprzedaniu nieruchomości w ciągu pół roku.

Zdarzenia R i R' tworzą układ zupełny zdarzeń. Prawdopodobieństwo, że nieruchomość zostanie sprzedana w ciągu tego okresu, liczymy z wzoru (1.4):

$$P(S) = P(S|R)P(R) + P(S|R')P(R') = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}5.$$

Prawdopodobieństwo, że nieruchomość zostanie sprzedana w ciągu pół roku wynosi 0,5.

Przykład 1.10. Zauważono, że jedna na 1000 osób zapada na „dziwną" infekcję wirusową X. Lekarze dysponują testem rozpoznającym ten wirus w organizmie z prawdopodobieństwem 0,99. W pozostałych przypadkach wirus nie zostaje rozpoznany.

Z drugiej strony, zdarza się z prawdopodobieństwem 0,002, że test ten daje fałszywy wynik pozytywny, czyli „wykryje" wirus w organizmie, w którym nie występuje. Test dał wynik pozytywny. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, u której test dał wynik pozytywny, jest rzeczywiście zarażona wirusem?

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenia:

I – zdarzenie losowe polegające na zachorowaniu na infekcję wirusową typu X,

W – zdarzenie losowe polegające na wykryciu wirusa w organizmie przez test (co jest równoważne temu, że test dał wynik pozytywny).

Prawdopodobieństwo $P(I|W)$, że osoba, u której test dał wynik pozytywny, jest rzeczywiście chora, obliczamy z wzoru Bayesa (1.5):

$$P\left(I|W\right) = \frac{P(W|I)P(I)}{P(W)} = \frac{P(W|I)P(I)}{P(W|I)P(I) + P(W|I')P(I')}.$$

Wiadomo, że $P(I) = 0{,}001$. Wykrycie wirusa w organizmie przez ten test wcale nie musi oznaczać, że wirus jest w organizmie. Prawdopodobieństwo, że test wykrył wirus u osoby chorej na tą infekcję wynosi $P(W|I) = 0{,}99$. Z kolei u osoby niezainfekowanej prawdopodobieństwo, że test da fałszywy wynik pozytywny, wynosi: $P(W|I') = 0{,}002$.

Podstawiając do wzoru, otrzymujemy:

$$P(I|W) = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}001}{0{,}99 \cdot 0{,}001 + 0{,}002 \cdot 0{,}999} = 0{,}33.$$

Prawdopodobieństwo, że osoba, u której test dał wynik pozytywny, jest rzeczywiście zarażona wirusem, wynosi 0,33. Oznacza to, że zaledwie $1/3$ osób z pozytywnym wynikiem testu jest rzeczywiście zainfekowana.

1.5. Zadania do samodzielnego rozwiązania

1.1. Wykazać, że dla n-elementowej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω możemy wyróżnić 2^n zdarzeń losowych.

1.2. Prawdopodobieństwo, że do konsumenta dotrze reklama telewizyjna pewnego produktu, wynosi 0,1, natomiast prawdopodobieństwo, że zauważy on billboard reklamowy na ulicy, 0,2. Oba te zdarzenia uważamy za niezależne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do konsumenta dotrze przynajmniej jedna forma reklamy?

1.3. Prawdopodobieństwo, że w najbliższym miesiącu zdrożeje bawełna, wynosi 0,5, a prawdopodobieństwo, że zdrożeje zboże, wynosi 0,2. Wiadomo ponadto, że w 10% przypadków obie ceny – bawełny i zboża – idą w górę. Czy ceny bawełny i zboża są niezależne?

1.4. Badając wyniki spisu powszechnego analitycy GUS stwierdzili nieprawidłowości w 10 % wszystkich ankiet. Nieprawidłowości takie mogą powstać wskutek pomyłki lub celowego działania. Jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo pojawienia się nieprawidłowości na skutek niezamierzonej pomyłki jest równe 0,05, to jaki procent ankietowanych celowo sfałszował swoje dane?

1.5. Pisarz chce, aby korekta jego książki dotarła do wydawnictwa najpóźniej do jutra do godziny 8:00 rano. Żeby zwiększyć szanse dotarcia książki na czas, przekazał trzy egzemplarze korekty, korzystając z usług trzech firm świadczących usługi kurierskie. Pierwsza firma jest znana z tego, że wywiązuje się z dostarczania przesyłek na czas w 90%, druga w 88%, a trzecia w 91% przypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przynajmniej jeden egzemplarz korekty jego książki dotrze do wydawnictwa w wymaganym czasie?

1.6. Rzucono dwiema kostkami do gry. Czy zdarzenie „wyrzucenie liczby oczek, których iloczyn jest podzielny przez 3”, oraz „wyrzucenie liczby oczek, których suma jest parzysta”, są zdarzeniami niezależnymi?

1.7. Firma stara się o kontrakt w dwóch spółkach A i B. Dyrektor firmy szacuje prawdopodobieństwo zawarcia kontraktu ze spółką A na 0,40. Uważa też, że gdyby firma zawarła kontrakt ze spółką A, to szansa zawarcia kontraktu ze spółką B wynosiłaby, aż 95 %. Jakie jest prawdopodobieństwo, że firma zawrze oba kontrakty?

1.8. Wykazać, że jeżeli dwa zdarzenia A i B są niezależne, to wtedy niezależne są zdarzenia im przeciwne: A' i B'.

1.9. Badanie w 800 firmach branży spożywczej pokazało, że 40% firm przeprowadza analizę skuteczności promocji, 60% firm dokonuje analizy wizerunku firmy na rynku, a 30% firm prowadzi oba rodzaje analiz. Określamy zdarzenia losowe A i B następująco: A – firma analizuje skuteczność promocji, B – firma dokonuje analizy wizerunku firmy na rynku. Podać następujące prawdopodobieństwa: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$.

1.10. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych pewnego doświadczenia. Zakładając, że zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, zbadać, czy zdarzenia $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$, $C = \{\omega_3, \omega_4\}$ są:
- niezależne parami,
- niezależne (zespołowo).

1.11. Z przeprowadzonych badań wynika, że 80% kobiet i 45% mężczyzn ogląda w telewizji programy typu „*reality show*”. Z grupy złożonej z 1500 kobiet i 2000 mężczyzn wybrano losowo jedna osobę.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana osoba ogląda programy typu „*reality show*”?

b) Okazało się, że wylosowana osoba ogląda programy typu „*reality show*”. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna?

1.12. Asystent prowadzący ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa wie z doświadczenia, że prawdopodobieństwo uzyskania zaliczenia przez studenta pracującego systematycznie na ćwiczeniach jest równe 0,9, podczas gdy dla niesystematycznego studenta wynosi 0,15. Wiadomo, że 70% studentów w grupie pracuje systematycznie.

a) Jaki procent studentów otrzyma zaliczenie?

b) Po sesji spotykamy studenta, który uzyskał zaliczenie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pracował systematycznie?

1.13. Wysyłany jest sygnał binarny 0 lub 1. Prawdopodobieństwo wysłania sygnału 0 wynosi 0,4, natomiast sygnału 1 wynosi 0,6. Prawdopodobieństwa zniekształcenia sygnałów wynoszą odpowiednio: dla sygnału 0 prawdopodobieństwo 0,02, dla sygnału 1 prawdopodobieństwo 0,01. Wiadomo, że sygnał został zniekształcony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to sygnał 0?

1.14. Wiadomo, że 65% mężczyzn i 50% kobiet nie zdaje egzaminu na prawo jazdy za pierwszym razem. Wybrana losowo osoba nie zdała egzaminu. Zakładając, że zdających mężczyzn było trzy razy więcej niż kobiet, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybraną osobą jest kobieta.

1.15. Firma ochrony mienia „Spokój” zainstalowała w domu pana Karola instalację alarmową połączoną z siedzibą firmy. Przy próbie włamania alarm ten zadziała w 95% przypadków. Może się jednak zdarzyć i tak, że alarm włączy się wtedy, gdy nie ma żadnego zagrożenia. Prawdopodobieństwo takiego fałszywego alarmu jest małe i wynosi 0,02. Biorąc pod uwagę poziom zamożności pana Karola oraz lokalizację jego domu, prawdopodobieństwo włamania oszacowano na 0,004. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gdy włączy się alarm, naprawdę istnieje zagrożenie?

Rozdział 2. Zmienna losowa jednowymiarowa

2.1. Zmienna losowa i jej dystrybuanta

Elementarne wyniki doświadczeń losowych często nie są liczbami. Na przykład w jednokrotnym rzucie monetą otrzymujemy orła lub reszkę. Zdarzeniom elementarnym można jednak zawsze przyporządkować liczby i zazwyczaj takie przyporządkowanie ma sens merytoryczny.

W celu ujednolicenia rozważań dotyczących różnych przestrzeni zdarzeń elementarnych dokonuje się przekształcenia przestrzeni Ω w zbiór liczb rzeczywistych R i zamiast analizować zdarzenia elementarne o różnych interpretacjach praktycznych, odwzorowujemy je na liczby i zyskujemy możliwość liczbowego opisu w przypadku dowolnej przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Niech (Ω, Z, P) będzie przestrzenią probabilistyczną.

Funkcję X odwzorowującą Ω w R nazywamy **zmienną losową**, gdy dla każdego $x \in R$ zbiór $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) < x\} \in Z$ (czyli jest zdarzeniem losowym).

W przypadku, gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest co najwyżej przeliczalna, każda funkcja $X\colon \Omega \to R$ jest zmienną losową.

Wartość zmiennej losowej dla konkretnego zdarzenia elementarnego zazwyczaj nazywa się jej realizacją. Zmienne losowe oznaczamy dużymi literami z końca alfabetu łacińskiego X, Y, Z itp., natomiast ich wartości (realizacje) małymi literami x, y, z itp.

Pojęcie zmiennej losowej jest kluczowym pojęciem rachunku prawdopodobieństwa przede wszystkim dlatego, że pozwala przejść od modelu probabilistycznego (Ω, Z, P) do typowych pojęć matematycznych, jakimi są liczby i funkcje.

Przykład 2.1. Zorganizowano loterię. W loterii wypuszczono 5 losów ponumerowanych od 1 do 5. Na los z numerem 1 pada główna wygrana 10 zł, na losy z numerami 2, 3 wygrana jest po 1 zł, a wyciągnięcie pozostałych losów oznacza, że musimy zapłacić po 2 zł. Załóżmy, że wyciągnięcie każdego z losów jest jednakowo prawdopodobne. Doświadczenie polega na wyciągnięciu jednego losu.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest postaci: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, gdzie ω_i oznacza zdarzenie elementarne polegające na wylosowaniu losu o numerze i. Przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona, więc każdy podzbiór Ω jest zdarzeniem loso-