

Prognozowanie i symulacje w ekonomii i zarządzaniu

Jan B. Gajda

Wydawnictwo C.H.Beck 

Prognozowanie i symulacje w ekonomii i zarządzaniu

Prognozowanie i symulacje w ekonomii i zarządzaniu

Jan B. Gajda



WYDAWNICTWO C.H.BECK
WARSZAWA 2017

Wydawca: Dorota Ostrowska-Furmanek
Redakcja merytoryczna: Danuta Kamińska-Hass
Recenzent: prof. dr hab. Jerzy W. Wiśniewski
Projekt okładki i stron tytułowych: Maryna Wiśniewska
Ilustracja na okładce: © Mark Evans/iStockphoto.com

Seria: Metody ilościowe

Złożono programem T_EX


Publikacja dofinansowana przez Wydział Zarządzania
Uniwersytetu Warszawskiego



© Wydawnictwo C.H.Beck 2017

Wydawnictwo C.H.Beck Sp. z o.o.
ul. Bonifraterska 17, 00-203 Warszawa

Skład i łamanie: Wydawnictwo C.H.Beck
Druk i oprawa: www.bookfactory.pl

ISBN 978-83-255-9440-4
 e-book 978-83-255-9441-1

Spis treści

Od Autora	9
Wstęp	11
1. Model	12
2. Modele analogowe i cyfrowe	12
3. Prognozowanie a symulacja	14
4. Modele zdarzeń dyskretnych a modele procesów ciągłych	14
Rozdział 1. Wprowadzenie do symulacji	15
1.1. Wstęp	15
1.2. Symulacja – przegląd definicji	16
Rozdział 2. Symulacja zdarzeń dyskretnych	22
2.1. Przykład 1. Ocena kontraktu	22
2.1.1. Eksperyment fizyczny	23
2.1.2. Symulacja stochastyczna	23
2.2. Metoda odwracania dystrybuanty	24
2.3. Zmienność z próby	28
2.4. Przykład 2. Planowanie produkcji	29
2.4.1. Symulacja na kracie	31
2.4.2. Podsumowanie symulacji na kracie za pomocą funkcji reakcji	34
2.5. Przykład 3. Symulacja dynamiczna – sterowanie zapasami	40
2.6. Problemy symulacji dynamicznej	43
2.7. Symulacja w konwencji „termin następnego zdarzenia”	44
2.8. Przykład 4. Kasjer	45
2.8.1. Trzy fazy symulacji	48
2.9. Alternatywne podejścia do symulacji zdarzeń dyskretnych	54
Rozdział 3. Komputerowe generatory liczb losowych	57
3.1. Rozkład równomierny – generator fizyczny	57
3.2. Rozkład równomierny – generator komputerowy	59
3.3. Rozkład normalny (Gausa)	60
3.4. Rozkład logarytmiczno-normalny	60
3.5. Rozkład chi-kwadrat (χ^2)	61
3.6. Rozkład <i>t</i> -Studenta	61
3.7. Rozkład Pareto	62
3.8. Rozkład wykładniczy	62
Rozdział 4. Symulacja modeli ciągłych	64
4.1. Wstęp	64

4.2. Modele ekonometryczne	65
4.2.1. Jednorównaniowy model liniowy	65
4.2.2. Prosta symulacja stochastyczna modelu jednorównaniowego	68
4.2.3. Wielorównaniowy model liniowy	70
4.3. Rozwiązania modeli ekonometrycznych	75
4.3.1. Rozwiązania a postacie modeli	76
4.3.2. Rozwiązania równaniowe a rozwiązania systemowe	77
4.4. Symulacja deterministyczna modelu	79
4.4.1. Metoda Gaussa–Seidela	79
4.4.2. Symulacja deterministyczna w analizie własności modelu	81
4.5. Symulacja stochastyczna	90
4.5.1. Dokładność symulacji stochastycznej	91
4.5.2. Wybrane problemy losowania zaburzeń	92
4.5.3. Symulacja Monte Carlo na współczynnikach	95
4.5.4. Symulacja z reestymacją	96
4.5.5. Losowość zmiennych egzogenicznych	97
Rozdział 5. Prognozowanie – podstawowe pojęcia	99
5.1. Wstęp	99
5.2. Podstawy prognozowania	101
5.2.1. Prognozowanie strukturalne i niestukturalne	102
5.2.2. Etapy prognozowania	103
5.2.3. Warunki prognozowania z modelu ekonometrycznego	104
5.2.4. Zasady prognozowania	105
5.3. Prognozy ex post i ex ante oraz ich błędy	107
Rozdział 6. Prognozowanie z modeli strukturalnych	109
6.1. Prognozowanie z modeli jednorównaniowych	109
6.1.1. Oczekiwany błąd prognozy w modelu z jedną zmienną objaśniającą	109
6.1.2. Przedział ufności prognozy	112
6.1.3. Oczekiwany błąd prognozy w modelu z wieloma zmiennymi objaśniającymi	114
6.2. Prognozowanie na wiele okresów	116
6.2.1. Prognoza z modelu statycznego	116
6.2.2. Prognoza z modelu dynamicznego	116
6.2.3. Prognozowanie na podstawie modeli wielorównaniowych	118
6.3. Prognozy z modeli nieliniowych i ich obciążenie	119
6.4. Symulacja stochastyczna w prognozowaniu z modeli nieliniowych	122
6.5. Symulacja stochastyczna modelu KOSMOS	124
Rozdział 7. Prognozowanie przy wykorzystaniu modeli niestukturalnych	129
7.1. Naiwne metody prognozowania	131
7.1.1. Naiwna prognoza bez zmian	132
7.1.2. Naiwna prognoza z trendem liniowym	132
7.1.3. Naiwna prognoza z trendem wykładniczym	132
7.2. Metody filtracji w prognozowaniu	133
7.2.1. Średnie ruchome skończone	133
7.2.2. Metody wygładzania wykładniczego	135
7.2.3. Proste wygładzanie wykładnicze (metoda Browna)	135
7.2.4. Wygładzanie wykładnicze z trendem liniowym i sezonowością (metoda Wintersa)	139

7.2.5. Modele trendu	144
Rozdział 8. Sztuczne sieci neuronowe w prognozowaniu	151
8.1. Model sztucznego neuronu	152
8.2. Sieci neuronowe	155
8.3. Sieć jednokierunkowa jednowarstwowa	156
8.4. Sieć jednokierunkowa wielowarstwowa	156
8.4.1. Sieć wielowarstwowa realizująca lub-rozłączne	157
8.4.2. Uczenie sieci	160
8.5. Sieć neuronowa a model ekonometryczny	162
8.6. Podsumowanie	168
Bibliografia	169
Indeks rzeczowy	175

Navigare necesse est, vivere non est necesse
(Żeglowanie jest rzeczą konieczną, życie – niekonieczną)
słowa Pompejusza, tłumaczenie Kopalińskiego, 1989
wersja dla ekonomistów:
Jeśli chcesz gospodarować, musisz prognozować

Od Autora

Cechą szczególną niniejszej książki jest to, że wspólnym mianownikiem rozważań jest stosowanie sformalizowanego opisu rzeczywistości – modelu wprawianego następnie w ruch celem analizy i prognozowania zjawisk gospodarczych. Ze względu na konieczność wykonywania skomplikowanych obliczeń położono nacisk na wykorzystanie ogólnie dostępnych narzędzi obliczeniowych, w szczególności arkusza kalkulacyjnego typu Excel czy Calc. Do obliczeń ekonometrycznych wykorzystano program Gretl autorstwa profesora Allina Cottrella rozwijany i spolszczony przez profesora Tadeusza Kufła, który udostępnia go na swojej stronie internetowej (www.kufel.torun.pl). Aby ułatwić Czytelnikowi opanowanie procesu obliczeniowego, w podręczniku zamieszczono szereg zrzutów ekranowych pokazujących okno programu w trakcie wykonywania obliczeń.

Kładąc nacisk na pogłębienie wywodów oraz ułatwienie Czytelnikowi zrozumienia istoty wywodów, staram się jednocześnie ograniczyć obciążenie rozważaniami teoretycznymi. Wzory i ich uzasadnienie są podporządkowane celowi głównemu – wyjaśnieniu zasad i mechanizmów obliczeń oraz interpretacji wyników.

Rozważania zaczynamy od modeli zdarzeń dyskretnych. Rozdział 1. wprowadza Czytelnika w podstawowe pojęcia dotyczące modelu i symulacji. W rozdziale 2. uwaga jest skupiona na symulacji zdarzeń dyskretnych. Przykłady, od których rozpoczniemy rozważania, można zrealizować z wykorzystaniem programu Excel. Tabele, którymi zilustrujemy nasze przykłady będą nawiązywały do struktury tabel arkusza kalkulacyjnego. W przykładzie pierwszym opiszemy przypadek elementarny: statyczny, dający się rozwiązać również przez fizycznie przeprowadzony eksperyment. Przykład pierwszy określa pewien podstawowy moduł – cegielkę, z której będą budowane kolejne przykłady, gdzie najpierw zniknie możliwość eksperymentu fizycznego, a modelowanie i symulacja da nam jedyną możliwość eksperymentowania, następnie zaś pojawi się model dynamiczny z czasem „w plasterkach” oraz model z czasem w konwencji „czasu termin następnego zdarzenia”. Rozdział 3. jest poświęcony komputerowym generatorom

liczb losowych, w szczególności zaś formułom pozwalającym na transformowanie zmiennych o rozkładzie równomiernym w zmienne o innych rozkładach, najczęściej stosowanych w badaniach symulacyjnych. W rozdziale 4. omawiamy zastosowania symulacji do analizy modeli ekonometrycznych. W rozdziale tym łączymy problemy prognozowania z problemami symulacji – deterministycznej i stochastycznej. W dalszej części książki, w rozdziale 5., omawiamy podstawowe pojęcia związane z prognozowaniem. W rozdziale 6. skupiamy uwagę na prognozowaniu za pomocą modeli strukturalnych, w rozdziale 7. zaś – na niestructuralnych metodach prognozowania. Książkę kończy rozdział 8. poświęcony jednemu z najnowszych instrumentów prognozowania – sztucznym sieciom neuronowym, z naciskiem na: wskazanie analogii między liniowymi sieciami neuronowymi a układami równań regresji, powiązanie zjawiska przeuczenia sieci z przypadkiem podwymiarowej próby/współliniowości w modelach regresyjnych, podobieństwie funkcji pełnionych przez współczynniki momentum oraz uczenie ze współczynnikami relaksacji i wygładzania w symulacji i prognozowaniu.

Książka niniejsza podsumowuje doświadczenia autora zebrane w trakcie badań empirycznych oraz podczas wieloletnich cykli wykładów poświęconych modelowaniu zjawisk gospodarczych, ich prognozowaniu, a także wykorzystaniu symulacji do badania zjawisk gospodarczych i prognozowania. Program wykładu dostosowano do programu nauczania *Prognozowania i symulacji* na wydziałach ekonomii i zarządzania. W podręczniku wykorzystano fragmenty pracy [Gajda, 2001], które szczególnie sprawdziły się w praktyce dydaktycznej.

Materiał omówiony w poszczególnych rozdziałach tworzy dość autonomiczne bloki, zatem lektura wybranych rozdziałów przy pominięciu innych nie powinna sprawiać Czytelnikowi większych trudności.

Osoby zainteresowane wykorzystaniem symulacji w badaniach operacyjnych i zarządzaniu mogą być zainteresowane wstępem oraz rozdziałami 2 oraz 3, w ekonometrii także rozdziałami 4 i 5. Do zajęć z prognozowania użyteczne mogą okazać się rozdziały 4–8.

Na zakończenie chciałbym wyrazić wdzięczność dr Dorocie i Markowi Miszczyńskim za zgodę na wykorzystanie obszernych fragmentów pracy [Miszczyńska, Miszczyński, 1998], dr Marii Magdalenie Kaźmierskiej-Zatoń za udostępnienie danych i współpracę. Wykorzystanie Gretla nie byłoby możliwe bez pomocy i rad prof. Marioli Piłatowskiej oraz prof. Tadeusza Kufla, za co składam im szczególne podziękowania.

Oczywiście wszelkimi błędami obarczam wyłącznie siebie.

Jan B. Gajda

Wstęp

W swej racjonalnej działalności człowiek zawsze formułował – w sposób bardziej lub mniej przemyślany – cele, stanowiące wypadkową jego doświadczeń i oczekiwań. Cele te mógł jednak realizować tylko pod warunkiem posiadania umiejętności przewidywania procesów rozwojowych. Należy więc przyjąć, że elementy prognostyki tkwiły w działalności ludzkiej już od dawna (por. [Zeliaś, 1997, s. 12]).

Podjmując decyzję gospodarczą, ekonomista bierze pod uwagę okoliczności, jakie będą towarzyszyły w przyszłości przekształcaniu tej decyzji w realizację; świadom tego lub nie – **przewiduje** przyszłość.

Praca niniejsza jest poświęcona problemom **prognozowania** i **symulacji** traktowanych jako techniki wspomagające podejmowanie decyzji zarówno w ekonomii, jak i w zarządzaniu. W symulacji budujemy model zjawiska, aby następnie wprawić go w ruch i obserwować reakcje na różnego rodzaju bodźce i zmiany. Badacz uzyskuje możliwość obserwacji zjawisk gospodarczych i eksperymentowania z nimi w sposób podobny do badań możliwych w naukach eksperymentalnych. Budowa i uruchomienie modelu symulacyjnego pozwala na obserwację dynamiki modelowanego systemu w warunkach kontrolowanych przez eksperymentatora. Co ważne, eksperymentator może zmieniać warunki eksperymentów tak, aby przetestować zasadność badanych hipotez. Symulacja stwarza laboratorium, w którym możemy analizować problemy ekonomiczne tak, jak w rzeczywistości nigdy tego nie moglibyśmy zrobić.

Jedną z ważnych dziedzin zastosowania symulacji jest prognozowanie. Symulacja pozwala na przeprowadzenie pogłębionej analizy własności modelu przedstawiającego badany system, czym prowadzi do uściślenia przewidywań dotyczących zachowania się modelu. Obserwacja modelu, a w szczególności pomiar jego własności, pozwala na przewidywanie reakcji oraz własności **modelowanego systemu**. To, jak dalece model jest podobny do modelowanego systemu, rzutuje na dokładność wniosków o własnościach modelowanego systemu.

1. Model

Systemy występujące wokół nas, a także zachodzące w nich procesy bywają tak złożone, że ich zrozumienie sprawia poważne trudności, a czasem wręcz przekracza nasze możliwości. Opisując badany system z pominięciem mniej istotnych jego elementów, tworzymy **model** – nowy system, uproszczony, a przez to łatwiejszy do zrozumienia. Zrozumiawszy model, lepiej rozumiemy modelowany system. Posługiwanie się modelem często okazuje się tańsze, kiedy indziej szybsze lub bezpieczniejsze. W przypadku systemów nieistniejących (lub jeszcze nieistniejących, jak np. prom kosmiczny w fazie projektowania, czy też już nieistniejących, jak np. atmosfera Ziemi z okresu, gdy rodziło się życie) symulacja modelu może stwarzać jedyną szansę badań. Warto podkreślić, że istotną cechą modelu jest to, że stanowi on uproszczony opis rzeczywistości. Zakres uproszczeń oraz ich skala są wyznaczone celami, dla których model jest budowany. W tym sensie cel budowy modelu staje się elementem składowym tego modelu. Czasem udaje się wykorzystać model do realizacji innego celu niż ten, dla którego został zbudowany; z reguły jednak operacja taka prowadzi do niepoprawnych wniosków.

2. Modele analogowe i cyfrowe

Modele, w zależności od tworzywa, z jakiego są ukształtowane, możemy podzielić na **analogowe** oraz **cyfrowe**. Modele analogowe (nazywane też modelami fizycznymi) mogą być zbudowane z tego samego tworzywa, co modelowany system (np. w modelu Portu Północnego, zbudowanym przed podjęciem prac nad budową samego portu, tworzywem były beton – falochrony i nabrzeża, woda wypełniająca model oraz piasek dna portu), lub z innego tworzywa (np. model karoserii samochodu przeznaczony do badań aerodynamicznych jest budowany z plastiku, drewna czy papier *mâché*). W modelach cyfrowych, zwanych też **numerycznymi**, „tworzywem” są liczby, zmienne i wiążące je relacje. Modele cyfrowe są zbudowane z matematycznych relacji: równań, nierówności, warunków logicznych, tabel, wykresów, opisujących zachowanie się zmiennych endogenicznych modelowanego systemu i ich reakcje na zmiany otoczenia reprezentowanego przez zmienne egzogeniczne.

Zmienne występujące w modelach mogą przyjmować **wartości ciągłe** lub **dyskretne** (skokowe). Względy praktyczne zmuszają czasem do przybliżenia zmiennej ciągłej za pomocą zmiennej dyskretnej. Proces ten nazywamy **dyskretyzacją** zmiennej (np. zmienna ciągła, jaką jest wzrost każdego z nas, jest zapisywana w dokumentach w postaci zdyskretyzowanej – w zaokrągleniu do pełnych centymetrów).

Zmienne modelu mogą być ciągłe lub dyskretne w czasie. W pierwszym przypadku wartości zmiennej są określone w każdym momencie czasu, w drugim przypadku są określone w wybranych momentach czasu. Momenty te jak gdyby tną czas w „plasterki”. Odległości pomiędzy kolejnymi momentami mogą być

stałe lub zmienne. Analiza wartości przyjmowanych przez zmienne modelu może odbywać się w równooddalonych momentach. Powstaje tu konieczność wyboru odległości czasowej dt pomiędzy dwoma kolejnymi momentami (wybór grubości „plasterka” czasu). Zbyt długi odstęp czasu dt sprawia, że przybliżenie trajektorii zmiennych modelu okazuje się nazbyt ziarniste, czasem pozbawione ważnych szczegółów opisujących zmiany zachodzące w systemie w okresie krótszym od dt . Zbyt krótki odstęp czasu dt zmusza do zatrzymywania symulacji modelu i badania wartości jego zmiennych w odcinkach na tyle krótkich, że żadne ważne zmiany stanu badanego systemu nie miały możliwości się zrealizować. Wydłuża to czas eksperymentu oraz zwiększa objętość wygenerowanych wyników.

Ze zmienną odległością między momentami czasu spotykamy się wtedy, gdy model jest skonstruowany tak, aby generował czas nadciągającego zdarzenia (najbliższego z przyszłych zdarzeń). Bieg czasu zatrzymujemy w momencie związanym z tym zdarzeniem w celu zbadania zmienionego stanu modelu i wykonania przypadających czynności. Następnie jest wyznaczany czas kolejnego nadciągającego zdarzenia itd. Przy tej technice odległości czasowe dt_i pomiędzy kolejnymi zdarzeniami i są zmienne (jeśli odległości między zdarzeniami są jednakowe, model oparty na zasadzie następnego zdarzenia będzie zachowywał się tak, jak model oparty na równoodległych momentach czasu), model taki dostosowuje się do sytuacji, gdy w systemie zachodzą zmiany – raz szybko, kiedy indziej powoli. Ceną za to jest konieczność zbudowania modelu w specyficzny sposób, z reguły konieczna jest większa wiedza o modelowanym systemie.

Model analogowy często działa w sposób ciągły w czasie, natomiast rejestracja wyników jest dokonywana w sposób dyskretny, w wybranych momentach czasu. Mówimy wówczas o dyskretyzacji zmiennej w czasie. Dyskretyzacja w czasie jest typowa dla modeli cyfrowych.

Dla modeli matematycznych (zwłaszcza liniowych) ze zmiennymi ciągłymi można znaleźć formuły analityczne opisujące trajektorie, po jakich biegą zmienne endogeniczne, tj. rozwiązanie analityczne ciągłe w czasie. Modele matematyczne mogą jednak być na tyle skomplikowane, że znalezienie rozwiązania analitycznego jest bądź bardzo trudne, bądź wręcz niemożliwe, przynajmniej przy współczesnym stanie rozwoju matematyki. Ograniczamy się wówczas do numerycznego poszukiwania rozwiązań, wyliczając współrzędne punktów leżących na trajektoriach zmiennych endogenicznych. Także i w tym przypadku mamy do czynienia z dyskretyzacją w czasie zmiennej ciągłej.

Ważnym elementem modelu są jego parametry charakteryzujące siłę, z jaką jedna zmienna reaguje na zmianę innej zmiennej. Parametry są w zasadzie wielkościami stałymi (w szczególnych typach modeli parametry mogą się zmieniać, por. np. [Dziechciarz 1996], ich zmiany są jednak stosunkowo powolne i gładkie w porównaniu z wahaniami zmiennych modelu). Realizm modelu wymaga, aby parametry miały wartości możliwie bliskie wartościom w populacji generalnej,

zatem przed wykorzystaniem modelu do symulacji jego parametry muszą zostać oszacowane lub uzyskane w inny sposób (np. przez kalibrację, analizę porównawczą, rozumowanie *per analogiam* itp.).

Wiele modeli stosowanych w symulacji zawiera elementy losowe sprawiające, iż przewidywania oparte na takich modelach nie są dokładne czy też znane z całkowitą pewnością. W symulacji **deterministycznej** elementy losowe są traktowane jako znane (zastępowane np. wartościami oczekiwanymi) lub przynajmniej mało znaczące w skali mechanizmu opisanego przez model. W symulacji **stochastycznej** losowe elementy modelu podlegają samodzielnemu modelowaniu, a proces ich generowania staje się istotnym elementem składowym symulacji.

Symulacja, zwłaszcza stochastyczna, generuje znaczną liczbę wyników. Opracowanie **wyników symulacji** oraz wybór miar pozwalających na ocenę jakości i zachowania się modelu są ważnym elementem procesu symulacji, wpływającym na użyteczność otrzymanych wyników.

3. Prognozowanie a symulacja

Prognozowanie oraz symulacja wzajemnie się uzupełniają i wspomagają. W wielu przypadkach prognozy wyliczamy przez symulację, czyli wprawienie w ruch modelu. W innych wypadkach sensowna symulacja modelu wymaga dysponowania prognozami jego zmiennych egzogenicznych. Nie zawsze jednak prognozowanie musi posilkować się symulacją. Z wielu modeli można wyznaczyć prognozy bez pośrednictwa symulacji, można też prognozować bez wykorzystywania modelu. Symulację zaś można wykorzystywać do celów innych niż prognozowanie, np. w statystyce – do oceny zachowania się zmiennych losowych mających rozkłady niedające się wyrazić w postaci zapisu matematycznego, w matematyce – do poszukiwania pola obszaru ograniczonego krzywą o nieregularnym kształcie.

4. Modele zdarzeń dyskretnych a modele procesów ciągłych

Modele zdarzeń dyskretnych opisują zjawiska raczej mikroekonomiczne, będące szczególnie często przedmiotem zainteresowania badań operacyjnych. Ich zróżnicowanie sprawia, że łatwiej nam będzie rozpocząć rozważania od kilku przykładów o narastającym stopniu komplikacji. W odróżnieniu od nich – modele procesów ciągłych, często stosowane do opisu zjawisk makroekonomicznych, w większości przypadków mają charakter układów równań różniczkowych bądź różnicowych (tylko tymi ostatnimi, zwłaszcza modelami ekonometrycznymi, zajmujemy się dalej). Tu uwagę naszą zajmą problemy analizy własności modeli i ich rozwiązań, tj. trajektorii, po których biegą zmienne endogeniczne modelu.

Rozdział 1. Wprowadzenie do symulacji

1.1. Wstęp

Do najważniejszych okoliczności towarzyszących podejmowaniu optymalnych decyzji gospodarczych należy ocena skutków tych decyzji. Do oceny skutków można podejść na dwa sposoby – przez eksperyment fizyczny na rzeczywistym systemie lub przez eksperyment intelektualny na modelu systemu.

Sposób pierwszy polega na wdrożeniu wybranego wariantu rozważanej decyzji, a więc wykonaniu **eksperymentu na badanym systemie** (przedsiębiorstwie, grupie przedsiębiorstw, gospodarce narodowej etc.). W praktyce gospodarczej zdarzają się eksperymenty polegające na przykład na zastosowaniu różnych technik reklamy oraz marketingu celem późniejszego porównania rezultatów różnych rozwiązań. Jest to jednak sposób kosztowny, praco- i czasochłonny, a co ważniejsze potencjalnie niekorzystny, a nawet niebezpieczny, gdyż skutki eksperymentu dotyczą uczestniczących w nim ludzi. Szczególnym utrudnieniem jest tu konieczność uwzględnienia wpływu wszystkich parametrów czy zmiennych istotnie wpływających na zróżnicowanie wyników eksperymentu. Nawet przy niewielkiej liczbie zmiennych i parametrów warunkujących reakcję wypadaloby zrealizować znaczną liczbę wariantów eksperymentu, co bardzo podwyższa koszty badania.

Sposób drugi polega na eksperymentcie przy wykorzystaniu modelu wiążącego interesujące nas zmienne endogeniczne, reagujące na rozważaną decyzję, ze zmiennymi egzogenicznymi będącymi instrumentem realizacji tej decyzji. Parametry modelu mogą zostać oszacowane na podstawie informacji zgromadzonej w wyniku obserwacji zachowania się badanego systemu. Parametry te mogą też być przyjęte na podstawie opinii ekspertów, oparte na założeniach etc. Prostsze modele, mające postać układów równań liniowych, różniczkowych lub różnicowych, mogą dać się rozwiązać analitycznie. Modele bardziej skomplikowane mogą nie posiadać rozwiązań analitycznych, wówczas są rozwiązywane numerycznie. Do szczególnie użytecznych technik poszukiwania rozwiązań należy **symulacja** – rozwiązanie uzyskane w wyniku **wprawienia modelu w ruch** i obserwacji reakcji zmiennych endogenicznych na zmiany wartości zmiennych egzogenicznych. Badanie symulacyjne ma tę przewagę, że może być prowadzone na modelu systemu już nieistniejącego (np. analogowy model atmosfery ziemskiej jaka panowała trzy miliardy lat temu wykorzystano do badania możliwości

samorzutnego powstania aminokwasów – jednych z najprostszych związków organicznych, por. hasło Stanley L. Miller w Wikipedii) bądź też systemu jeszcze nieistniejącego (np. model cyfrowy kadłuba promu kosmicznego wykorzystano do badań zdolności skutecznego wyhamowania promu przez tarcie o atmosferę ziemską – z jego prędkości orbitalnej wynoszącej ponad 28 000 km/godz. do prędkości lądowania wynoszącej ok. 220 km/godz., bez ryzyka spalnięcia wskutek nadmiernego rozgrzania przez tarcie).

1.2. Symulacja – przegląd definicji

W wielu publikacjach terminy, takie jak symulacja, Monte Carlo, gry (gry operacyjne) lub próbkowanie modelu (*model sampling*), są używane zamiennie, podczas gdy w innych pracach te same pojęcia są używane w zróżnicowanym sensie.

Morgenthaler stwierdza, że **symulować** to znaczy odtworzyć istotę systemu lub jego działanie bez rzeczywistego uruchamiania samego systemu (*To duplicate the essence of the system or activity without actually attaining reality itself* [Meier i in., 1969, s. 2]). Zatem symulacja wykorzystuje model do przedstawienia przebiegu w czasie istotnych charakterystyk badanego systemu lub procesu. Przy tym modelem możemy manipulować w sposób, który w odniesieniu do rzeczywistego systemu jest nieosiągalny lub niepraktyczny. Zakłada się, że badanie modelu daje możliwość wyciągnięcia wniosków o dynamice modelowanego systemu.

Naylor definiuje symulację jako technikę numeryczną służącą do dokonywania eksperymentów na pewnych rodzajach modeli matematycznych, które opisują za pomocą maszyny cyfrowej zachowanie się złożonego systemu w ciągu długiego okresu czasu [Naylor, 1975, s. 21]. Poniżej rozważymy wybrane elementy definicji Naylora.

Cel symulacji: eksperyment prowadzony na modelu systemu złożonego; z jednej strony chodzi tu o odcięcie się od problemów trywialnych, rozwiązywalnych bez uciekania się do symulacji, z drugiej strony – podkreśla wagę układu eksperymentu (tego, jakie zmienne i parametry mają ulegać zmianie w kolejnych wariantach) oraz analizę danych wynikowych (jakie charakterystyki wyników będą wyliczane i pod kątem jakich własności czy też cech wyniki te będą analizowane, w szczególności czy proponowane charakterystyki rzetelnie informują o własnościach będących przedmiotem badania).

Charakter symulacji: analiza zachowania się systemu w czasie; eksperymenty można w zasadzie prowadzić zarówno w określonej chwili (symulacje przekrojowe), jak i w czasie (symulacje szeregów czasowych).

Technika postępowania: numeryczna, choć może to sugerować, iż symulacja jest techniką ostatniej szansy i jest stosowana wówczas, gdy nie ma możliwości uzyskania rozwiązania w drodze analitycznej; w praktyce często okazuje się,

że symulacja jest techniką tańszą, łatwiejszą i mniej pracochłonną, wymagającą prostszego oprogramowania komputerowego, a przy tym znacznie elastyczniejszą.

Rozważmy system ze zmienną wyjściową y pozostającą w zależności funkcyjnej Φ (dla uproszczenia przyjmijmy na razie, że jest to funkcja liniowa) od zmiennych x_k :

$$y_t = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_K) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_Kx_K, \quad k = 1, \dots, K.$$

W projektowaniu układów eksperymentów zmienna y jest nazywana **reakcją**, zmienne x_k ($k = 1, \dots, K$) są nazywane **bodźcami** (czynnikami), funkcja Φ zaś opisuje **powierzchnię reakcji**.

W eksperymencie kontrolowanym zmieniamy wartości x , aby obserwować reakcję y . Daje to możliwość wygenerowania **próby** liczącej T obserwacji na zmiennych zależnych y oraz niezależnych x . Na podstawie zgromadzonych obserwacji możemy oszacować parametry b_k powierzchni reakcji $\hat{\Phi}$, otrzymując model

$$\hat{y}_t = \hat{\Phi}(x_1, x_2, \dots, x_K) = \hat{b}_1x_1 + \hat{b}_2x_2 + \dots + \hat{b}_Kx_K,$$

który można poddawać dalszej interpretacji i analizie.

W sytuacji, gdy eksperyment kontrolowany jest kosztowny lub wręcz niemożliwy – uciekamy się do symulacji traktowanej jako quasi-eksperyment (eksperyment na modelu systemu), w którym zmianie ulegają parametry b_k , zmienne x_k lub jedno i drugie.

Powyższy model jest na tyle prosty, że łatwo przeanalizować bezpośrednio jego własności, natomiast stosowanie do tego celu symulacji (wprawianie modelu w ruch) wydaje się zbędną rozrzutnością. Modele spotykane w praktyce wyróżniają się wyższym stopniem komplikacji – składają się z wielu równań, zawierają nieliniowe funkcje Φ_m o skomplikowanej sieci powiązań pomiędzy zmiennymi objaśnianymi zarówno jednoczesnych, jak dynamicznych (z opóźnieniami w czasie), zawierają losowe zakłócenia, losowe zmienne–bodźce, losowe parametry równań. Losowe elementy modelu mogą ze swej strony zależeć od dodatkowych parametrów realizujących się z pewnym prawdopodobieństwem oraz podlegać pewnym ograniczeniom.

Dla Lawrence’a R. Kleina, laureata Nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii i ojca symulacji w badaniach ekonometrycznych, symulacja sprowadza się do znalezienia całkowitej ścieżki rozwiązania skończonego równania różnicowego. Numeryczna symulacja jest sekwencją liczbowych obliczeń na danych gospodarczych i oszacowanych parametrach układu równań, a wielkości ze ścieżki wzrostu: y_1, y_2, \dots, y_t są liczbową aproksymacją rozwiązania końcowego [Klein, 1983, s. 119].

W niniejszej pracy, za Kleinem, pod nazwą symulacja (dodamy deterministyczna) będziemy rozumieli proces numerycznego rozwiązywania modelu (równania lub układu równań/nierówności) celem wyznaczenia trajektorii zmiennych

endogenicznych. W symulacji deterministycznej najczęściej chodzi o rozwiązanie układu równań różnicowych, jest więc ona odpowiednikiem numerycznego całkowania układu równań.

W wielu eksperymentach pojawia się konieczność uwzględnienia źródeł niepewności w zachowaniu modelowanego systemu. Stwarza to zapotrzebowanie na wprowadzenie do modelu wielkości przybierających wartości losowe zgodnie z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Metoda Monte Carlo to technika rozwiązywania modelu stochastycznego wielkości losowych z wybranego rozkładu prawdopodobieństwa. Nazwa Monte Carlo często jest kojarzona z siedzibą kasyna znanego z gier związanych z losowaniem wygrywającego numeru czy wygrywającej karty. W gruncie rzeczy nazwa ta wywodzi się od kryptonimu jednego z zadań w projekcie Manhattan budowy amerykańskiej bomby atomowej, por. [Vose, 1996, s. 40].

Już w roku 1733 książę Buffon zastosował metodę Monte Carlo, próbując oszacować liczbę π w eksperymencie polegającym na wielokrotnym rzucaniu igły o długości l na podłogę z równoległych desek o szerokości $2l$ i wyliczeniu stosunku całkowitej liczby rzutów do liczby rzutów, w których igła spadła w poprzek szpary między deskami [Mihram, 1972, s. 186].

Popularyzacja metody Monte Carlo w badaniach naukowych jest związana z pracami Johna von Neumanna oraz Polaka Adama Ulama, realizowanych w ramach projektu Manhattan. Metoda ta okazała się szczególnie użyteczna w rozwiązywaniu zagadnień nieliniowych. Symulację z wykorzystaniem metody Monte Carlo nazwiemy **symulacją stochastyczną** (spotyka się też określenie symulacja Monte Carlo, por. np. [Vose, 1996]).

Pojęcie symulacja stochastyczna jest używane w odniesieniu do eksperymentów typu **próbkowania z modelu** (*model sampling*), służących do badania własności modelu (lub zastosowanej doń metody) metodą Monte Carlo. Metoda ta polega na tym, że we fragmenty modelu (parametry, zmienne, ograniczenia) stanowiące źródło jego niepewności są wstawiane zaburzenia wylosowane z odpowiedniego rozkładu prawdopodobieństwa, a następnie jest wyznaczane rozwiązanie modelu (pojedyncze rozwiązanie otrzymane po wstawieniu wartości konkretnych zaburzeń nazywamy **replikacją**). Operacja ta jest powtarzana N -krotnie, dając próbę zawierającą N replikacji. Rozwiązanie modelu z zaburzeniami losowymi jest także losowe, a wynikowy rozkład prawdopodobieństwa rozwiązań pozostaje zwykle w tak skomplikowanej relacji do rozkładów wylosowanych zakłóceń, że analityczne prześledzenie związków pomiędzy tymi rozkładami jest trudne lub niemożliwe. Symulacja stochastyczna rozumiana jako próbkowanie modelu polega na generowaniu reprezentatywnej próby zmiennych modelu, aby następnie wyliczyć pewne sumaryczne charakterystyki trajektorii po jakiej biegają zmienne modelu, w domyśle – zmienne modelowanego systemu. Próbkowanie modelu pozwala na określenie charakteru rozkładów wynikowych tam, gdzie zastosowanie technik analitycznych jest trudne. W najprostszym przypadku jesteśmy zainteresowani podstawowymi parametrami rozkładów

wynikowych, takimi jak **średnia** i/lub **rozproszenie** badanych zmiennych. W przypadkach bardziej zaawansowanych badamy dalsze charakterystyki rozkładów, jak miary asymetrii, miary kurtozy, kwantyle czy też wreszcie całe rozkłady pod względem np. ich jednododalności czy zgodności z takimi rozkładami wzorcowymi, jak rozkłady: normalny, *t*-Studenta, beta, gamma etc.

Jedno z pierwszych zastosowań próbkowania z modelu zawiera praca W.S. Gosseta (publikującego pod pseudonimem Student) z roku 1908 wprowadzająca rozkład *t*-Studenta [Teichroew, 1965]. *Zanim udało mi się rozwiązać problem analitycznie, spróbowałem rozwiązać go empirycznie. Wykorzystany materiał miał postać tablicy z informacją o wzroście oraz rozmiarze środkowego palca lewej dłoni 3000 kryminalistów (...). Pomiarzy zostały naniesione na 3000 kartek (...) następnie po starannym ich wymieszaniu losowano próby czteroelementowe (...). Z każdej 4-elementowej próby wyliczano wartość średnią oraz odchylenie standardowe (...). Dało to dwa 750-elementowe zbiory do testowania wyników teoretycznych [dotyczących rozkładu *t* nazwanego później rozkładem Studenta – przyp. aut.]. Wzrost i rozmiar palca zostały wybrane, gdyż ich rozkład był praktycznie normalny (...)* (tłum. własne na podstawie [Morgan, Byron, 1984, s. 6]).

Pojęcie symulacja pojawia się także w kontekście **gier kierowniczych**, w których dynamiczny model symuluje otoczenie, gracze zaś podejmują decyzje zależne od stanu otoczenia i gromadzą doświadczenia. Modele te wykorzystuje się do trenowania kadry podejmującej decyzje [Skrzypek, Szubra, 1996]. Można też mówić o **grze operacyjnej** (*operational gaming*), jeżeli celem nie jest trening uczestników, lecz poważne wykorzystanie grania jako narzędzia służącego uściśleniu mechanizmu gry oraz zdobyciu wyniku gry bądź uzyskaniu ważnej informacji o charakterze rozwiązania gry. Jako przykład wymienia się tu wojenne gry sztabowe rozgrywane na modelu teatru działań przed planowaną operacją wojskową.

Do symulacji są zaliczane pewne metody heurystyczne (nie obejmuje ich niniejsza praca, por. [Cieślak, 1998]) naśladujące w ten czy inny sposób proces podejmowania decyzji w ludzkim umyśle czy też proces rozwiązywania problemów decyzyjnych. W klasie metod naśladujących umysł wyróżniamy metody **sieci neuronowych**, w klasie metod naśladujących ewolucję – **algorytmy genetyczne**, w klasie metod naśladujących zjawiska fizyczne zaś – **symulowane wyżarzanie** (*simulated annealing*).

Powyższy przegląd pokazuje zróżnicowanie zarówno znaczenia, jak i kontekstu używania słowa symulacja. Nie przedstawiliśmy wyczerpująco zakresu zjawisk, w których pojawia się to słowo, zwłaszcza że zakres jego stosowania stale się rozszerza.

Warto zwrócić uwagę na różnicę między modelem symulacyjnym a modelem optymalizacyjnym. W modelu optymalizacyjnym, obok opisu procesu przekształcania wartości zmiennych decyzyjnych (egzogonicznych) w skutki (zmienne endogeniczne), wprowadzamy kryterium przypisujące każdej z dopuszczalnych decyzji (wartości zmiennych egzogenicznych) jej użyteczność (koszt lub korzyść). Natomiast model symulacyjny opisuje jedynie proces przekształcania wartości