

**SCIENTIFIC  
STUDIES**  
Monographs

**PRACE  
NAUKOWE**  
Monografie

Lesław Brunarski

**Podstawy reologii  
konstrukcji z betonu**

Fundamentals of rheology  
of concrete structures



Instytut Techniki Budowlanej

Warszawa 2019

## KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor naczelny  
Z-cy redaktora naczelnego

Sekretarz  
Członkowie

prof. dr hab. inż. LECH CZARNECKI  
prof. dr inż. LESŁAW BRUNARSKI  
dr hab. inż. JADWIGA FANGRAT, prof. ITB  
dr MICHAŁ GAJOWNIK  
dr hab. inż. PAWEŁ LEWIŃSKI, prof. ITB  
dr inż. TERESA MOŻARYN  
mgr inż. JAN SIECZKOWSKI  
dr inż. EWA SZEWCZAK  
dr inż. SEBASTIAN WALL

Recenzenci

prof. dr hab. inż. STANISŁAW JEMIOŁO  
prof. dr hab. inż. MIECZYŚLAW KUCZMA

Redakcja

dr MICHAŁ GAJOWNIK

Opracowanie komputerowe

SŁAWOMIR KOZIARSKI

© Copyright by Instytut Techniki Budowlanej  
Warszawa 2019

*Czterysta sześćdziesiąta ósma pozycja  
„Prac Naukowych ITB”*

ISBN 978-83-249-8540-1, PDF 978-83-249-8548-7

Wydawca i Autorzy dołożyli wszelkich starań, aby publikowane informacje pochodziły z rzetelnych źródeł. Wydawca nie ponosi odpowiedzialności, ani też nie zaciąga zobowiązań w wyniku wykorzystania przez użytkowników treści niniejszej publikacji. W szczególności nie ponosi odpowiedzialności w stosunku do czytelników i/lub strony trzeciej za jakiegokolwiek poniesione straty, wydatki i szkody bezpośrednie i pośrednie, łącznie z utratą zysku i innych korzyści majątkowych, które mogły powstać lub być związane bezpośrednio lub pośrednio z treściami opublikowanymi, w tym ewentualnymi błędami lub pominięciami zawartymi w publikowanych materiałach.



**Instytut Techniki Budowlanej**

Sekcja Wydawnictw Naukowych

02-656 Warszawa, ul. Ksawerów 21, tel.: 22 843 35 19

tel.: 22 56 64 208, e-mail: [wydawnictwa@itb.pl](mailto:wydawnictwa@itb.pl) [www.itb.pl](http://www.itb.pl)

*Monografię dedykuję pamięci*  
*Profesora Wacława Olszaka (1902-1980),*  
*mojego pierwszego Szefa i Promotora,*  
*Twórcy polskiej szkoły teorii plastyczności i reologii*

## Spis treści

<i>Streszczenie</i> .....	7
<i>Summary</i> .....	9
Ważniejsze symbole.....	11
Słowo wstępne.....	15
1. Zjawiska reologiczne w materiałach oraz ich modelowanie .....	19
1.1. Wstęp .....	19
1.2. Badania i opisy zjawisk reologicznych w materiałach budowlanych .....	20
1.3. Modelowanie zjawisk reologicznych .....	26
2. Techniczne teorie pełzania .....	29
3. Modele reologiczne materiałów.....	35
3.1. Mechaniczne modele reologiczne proste i złożone.....	35
3.2. Mechaniczne modele reologiczne uogólnione.....	48
3.3. Mechaniczne modele reologiczne nieliniowe .....	50
4. Uogólnione związki konstytutywne ciał liniowo lepkosprężystych i analogie do ciał liniowo sprężystych.....	55
4.1. Związki konstytutywne reologii opisywane równaniami całkowymi.....	55
4.2. Związki konstytutywne reologii opisywane równaniami operatorowo-różniczkowymi .....	58
4.3. Analogie związków konstytutywnych ciał sprężystych i lepkosprężystych ..	59
5. Kwantyfikacja zjawiska pełzania betonu w poszczególnych reologicznych związkach konstytutywnych .....	63
5.1. Wstęp .....	63
5.2. Kwantyfikatory zjawiska pełzania betonu .....	63
5.3. Kwantyfikatory pełzania w klasycznych teoriach pełzania betonu .....	66
5.4. Funkcje pełzania w normach projektowania konstrukcji z betonu.....	70
5.5. Funkcje pełzania betonu w MC.....	74
6. Studium rozwoju teorii pełzania betonu.....	77
6.1. Wstęp .....	77
6.2. Rozwój teorii dziedziczenia betonu.....	78
6.3. Teorie dziedziczenia w zastosowaniu do ciał nieliniowo sprężystych .....	88
6.4. Teorie dziedziczenia uogólnione na złożony stan naprężenia .....	90
7. Stosowane klasyczne teorie dziedziczenia betonu .....	93
7.1. Wstęp .....	93
7.2. Teoria dziedziczenia .....	94
7.3. Teoria sprężystego dziedziczenia.....	98
7.4. Teoria starzenia .....	99
8. Zastosowania podstaw reologii konstrukcji z betonu .....	107
8.1. Modyfikacje klasycznych teorii dziedziczenia .....	107
8.2. Związki konstytutywne wykorzystane w Eurokodzie 2 .....	122
Posłowie .....	131
Bibliografia.....	135

## Ważniejsze symbole (zgodne z przyjętymi w [70])

### Duże litery łacińskie

- $A_c$  – pole przekroju poprzecznego betonu  
 $A_p$  – pole przekroju cięga lub cięgien sprężających  
 $A_s$  – pole przekroju zbrojenia  
 $C(t)$  – miara pełzania, określająca odkształcenie pełzania przy naprężeniu jednostkowym  
 $E_{ci}, E_{ci(28)}$  – styczny moduł sprężystości betonu zwykłego po 28 dniach przy naprężeniu  $\sigma_c = 0$   
 $E_{c,eff}(t, t_0)$  – efektywny moduł sprężystości betonu  
 $E_{c,adj}(t, t_0)$  – dostosowany do wieku efektywny moduł sprężystości  
 $E_{cd}$  – wartość obliczeniowa modułu sprężystości betonu  
 $E_{cm}$  – sieczny moduł sprężystości betonu  
 $E_c(t)$  – styczny moduł sprężystości betonu zwykłego po czasie  $t$  przy naprężeniu  $\sigma_c = 0$   
 $E_s$  – wartość obliczeniowa modułu sprężystości stali zbrojeniowej  
 $E_p$  – wartość obliczeniowa modułu sprężystości stali sprężającej  
 $F(t, t_0), K(t, t_0), J(t, t_0), F(t), J(t)$  – funkcja pełzania zwana funkcją dostosowania  
 $F_d$  – wartość obliczeniowa oddziaływania  
 $I$  – moment bezwładności przekroju betonu  
 $L$  – długość  
 $M$  – moment zginający  
 $N$  – siła podłużna (osiowa)  
 $P$  – siła sprężająca  
 $P_0$  – siła początkowa na sprężanym końcu cięga bezpośrednio po sprężeniu  
 $R(t, t_0)$  – funkcja relaksacji  
 $S$  – siły przekrojowe  
 $V$  – siła poprzeczna

### Małe litery łacińskie

$a$	– odległość
$b$	– szerokość
$d$	– średnica
$e$	– mimośród
$f_c$	– wytrzymałość betonu na ściskanie
$f_{cd}$	– obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie
$f_{ck}$	– charakterystyczna wytrzymałość betonu na ściskanie
$f_{cm}$	– średnia wytrzymałość betonu na ściskanie
$f_p$	– wytrzymałość stali sprężającej na rozciąganie
$h$	– wysokość przekroju
$i$	– promień bezwładności przekroju
$m$	– masa
$l$ (lub $L$ )	– długość, rozpiętość
$r$	– promień
$1/r$	– krzywizna w określonym przekroju
$t$	– rozważany czas
$t_0, t'$	– chwila obciążenia (wiek w chwili obciążenia)
$u$	– obwód betonowego przekroju poprzecznego o polu $A_c$
$u, v, w$	– składowe przemieszczenia punktu
$x$	– odległość osi obojętnej od krawędzi ściskanej
$x, y, z$	– współrzędne
$z$	– ramię sił wewnętrznych

### Małe litery greckie

$\alpha$	– kąt, stosunek wielkości, współczynnik
$\beta$	– kąt, stosunek wielkości, współczynnik
$\gamma$	– współczynnik
$\delta$	– przyrost
$\xi, C_{creep}$	– współczynnik korekcyjny redystrybucji sił wewnętrznych
$\varepsilon_0$	– odkształcenie sprężyste przy ścisaniu
$\varepsilon(t)$	– odkształcenie całkowite betonu w czasie $t$
$\varepsilon_c(t)$	– odkształcenie pełzania w czasie $t$
$\varepsilon_a$	– odkształcenie zbrojenia lub stali sprężającej
$\rho$	– gęstość betonu w stanie wysuszonym
$\rho_1$	– stopień zbrojenia podłużnego

- $\sigma_c(t)$  – naprężenie ściskające w betonie w czasie  $t$
- $\sigma_{cp}$  – naprężenie ściskające w betonie od siły podłużnej i sprężenia
- $\tau$  – chwila, w której przykładane są kolejne naprężenia  $\sigma(t)$ , przy czym  $0 \leq \tau \leq t$
- $\phi$  – średnica pręta zbrojenia
- $\phi_n$  – równoważna (zastępcza) średnica wiązki prętów
- $\varphi(t, t_0)$  – współczynnik pełzania, określający odkształcenie pełzania betonu w czasie od  $t_0$  do  $t$
- $\varphi(\infty, t_0)$  – wartość końcowa współczynnika pełzania
- $\chi$  – współczynnik starzenia w metodzie AAEM

## SŁOWO WSTĘPNE

Przedkładając Czytelnikowi monografię *Podstawy reologii konstrukcji z betonu*, postaram się uzasadnić tytuł oraz przedstawić zakres tematyczny i jego aktualność, a także osobistą motywację podjęcia się opracowania.

Z rozważanych trzech wersji tytułu: reologia – wybrane zagadnienia reologii – podstawy reologii, za uzasadniony uznałem tytuł ostatni.

Podstawę każdej z teorii konstrukcji budowlanych i inżynierskich tworzą równania równowagi C. Naviera (1785-1836), związki geometryczne A. Cauchy’ego (1780-1857) oraz związki fizykalne, a w przypadku teorii sprężystości – prawa R. Hooke’a (1635-1703).

Reologia, nazywana też teorią pełzania, jest teorią, w której odmienne są tylko specyficzne związki fizyczne, zwane reologicznymi równaniami stanu lub związkami konstytutywnymi. Wyrażają je matematyczne relacje między odkształceniem i naprężeniem, zachodzące w czasie, przy określonej temperaturze, w materiale o zdolnościach do odkształceń sprężystych, plastycznych i lepkich.

Zakres tematyczny wiedzy przedstawionej w monografii zgodnie z tytułem obejmuje dwa główne wątki:

- tworzenie i rozwój podstaw reologii, w postaci jej związków konstytutywnych (reologicznych równań stanu) oraz kwantyfikacji, czyli sposobu ilościowego ujmowania zjawisk reologicznych (pełzania i relaksacji) w odniesieniu do betonu,
- metody uwzględniana podstaw reologii w kolejno nowelizowanych normach projektowania konstrukcji z betonu.

Podstawę do uznania aktualności poruszanej tematyki monografii stanowiło stopniowe, ale stale rosnące podkreślanie znaczenia zjawisk reologicznych w poprzednich normach obliczania konstrukcji z betonu oraz wyraźne ich uwzględnienie w poszczególnych częściach Eurokodu 2, a także sygnalizowana w prenormie *fib Model Code 2010* możliwość ich zintensyfikowania w przyszłych nowelizacjach EC.

O ile znajomość teorii sprężystości oraz teorii plastyczności jest wśród polskich inżynierów dość powszechna, ponieważ od kilkudziesięciu lat wykładane są na uczelniach wyższych na kierunku budownictwo, to na temat reologii – teorii pełzania konstrukcji – wiedza jest ograniczona,



choć monografie polskich autorów poświęcone tej tematyce są bardzo liczne i wszechstronne.

Dostępne są zarówno monografie naukowe, których autorami byli m.in.: W. Olszak i inni [45], C. Eimer [21], Z. Bychawski [11], W. Nowacki [42], P. Perzyna [47], A. Mitzel [40], I. Kisiel [34], W. Wojewódzki, S. Jemioło i inni [65], jak również podręczniki akademickie: M. Chrzanowskiego [14] oraz A. Bodnara i współautorów [5].

Pierwszy z wymienionych autorów, prof. Waław Olszak, był ponadto jednym z pierwszych propagatorów problematyki reologii, o czym świadczy wycinek gazety *Życie Warszawy* z roku 1961.

**Prof. dr Waław Olszak**

Członek rzeczywisty PAN

# **WSZYSTKO PŁYNIE...**

## **czyli problematyka reologii w budownictwie inżynierskim**

Brakuje jednak pracy przedstawiającej syntetycznie zakres wiedzy potrzebnej do zrozumienia i właściwej interpretacji podstaw teoretycznych aktualnie wprowadzonych i planowanych metod uwzględniania zjawiska pełzania w konstrukcjach z betonu. Ten brak stał się motywacją do powstania niniejszej monografii.

W dzisiejszych czasach powszechnego projektowania ze wspomaganie komputerym, z uwagi na dostępność programów obliczania i wymiarowania konstrukcji według aktualnych norm, a także pewność, że w przypadku zmian oferowane będą nowe programy, monografia nie musi już mieć charakteru podręcznika inżynierskiego z przykładami obliczania i projektowania.

Monografia skierowana jest przede wszystkim do inżynierów, projektantów konstrukcji i rzeczoznawców budowlanych oraz pracowników naukowych i studentów, niebędących specjalistami z reologii. Z uwagi na zróżnicowany u odbiorców stan wiedzy o reologii – podanie pewnych informacji encyklopedycznych było nieuniknione.

Osobistą motywację do opracowania monografii stanowiło zainteresowanie autora tematyką reologii z inspiracji prof. W. Olszaka, zapoczątkowane publikacją z roku 1956 o redystrybucji naprężenia w betonie i zbrojeniu w ściskanych słupach żelbetowych (pierwsza polska publi-

kacja cytowana przez I. Ulickiego [61], [62]). Zainteresowanie to było kontynuowane przez autora podczas wieloletniej działalności dydaktycznej na Politechnice Warszawskiej i w Szkole Głównej Gospodarstwa Wiejskiego, prowadzonej równoległe z pracą w Instytucie Techniki Budowlanej.

# 1. ZJAWISKA REOLOGICZNE W MATERIAŁACH ORAZ ICH MODELOWANIE

## 1.1. Wstęp

Reologia, jako wiedza o deformacji i płynięciu materii, dotyczy nie tylko dziedziny nauk inżyniersko-technicznych, lecz także ścisłych oraz przyrodniczych, rolniczych, a nawet medycznych, gdzie np. pod nazwą „hemoreologia” kryją się zagadnienia płynięcia i deformacji krwi.

Nazwą swą nawiązuje do głoszonej przez Heraklita z Efezu (540-480 p.n.e.) filozoficznej zasady o zmienności i względności wszystkiego we wszechświecie, wyrażonej po grecku słowami *panta rhei* – wszystko płynie. Współczesny rozwój reologii datuje się od roku 1928, w którym z inicjatywy amerykańskiego chemika Eugena C. Bingham (1875-1945) powołano działające do dzisiaj *Society of Rheology*.

Za współtwórcę stowarzyszenia oraz nazwy reologia uważany jest Markus Reiner (1886-1976), urodzony w Czerniowcach absolwent Politechniki Wiedeńskiej, autor pierwszych publikacji z reologii teoretycznej i stosowanej w budownictwie [53], [54].



Rys. 1.1. Zjawisko pełzania w naturze, występujące na stokach gruntu przy drodze z Jerozolimy do Jerycha [53]

Podobnie, jak zrobił to M. Reiner we wstępie do pierwszej swojej monografii [53], pozwalam sobie przedstawić historyczną już fotografię (rys. 1.1) skutków zjawisk reologicznych w naturze, trwających bardzo długo i ciągle postępujących dalej.

Zjawiska reologiczne w materiałach występują w postaci pełzania, czyli przyrostów odkształcenia w czasie przy stałym naprężeniu, a także relaksacji, czyli spadku naprężenia przy zachowaniu stałego odkształcenia w czasie.

W budownictwie ze skutkami zjawisk reologicznych należy liczyć się w konstrukcjach, m.in. wykonanych ze stali i stopów metali (pracujących w warunkach wysokiej temperatury) oraz z drewna i polimerów, a szczególnie z betonu, czemu poświęcona jest niniejsza monografia.

Skutkami zjawisk reologicznych w konstrukcjach z betonu są na przykład: narastanie z czasem ugięcia belki żelbetowej oraz redystrybucja naprężenia w betonie i stali zbrojeniowej w elemencie żelbetowym, a w konstrukcjach sprężonych straty siły sprężającej.

Zjawiska reologiczne bada się doświadczalnie na próbkach materiałów, poddawanych długotrwałym jednoosiowym stanom naprężenia lub odkształcenia, z uwzględnieniem wpływu różnych czynników. W przypadku badania stali czynnikiem takim jest podwyższona temperatura, zaś w przypadku betonu – głównie zjawisko skurczu betonu oraz wilgotność otoczenia.

W związku z tym sposoby badania oraz przebieg zjawisk reologicznych w tych materiałach są odmienne.

## **1.2. Badania i opisy zjawisk reologicznych w materiałach budowlanych**

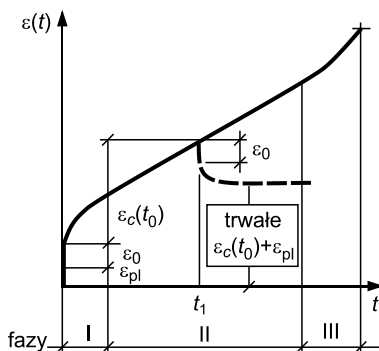
Próba pełzania materiału jednorodnego, niezmienną swych właściwości w czasie (np. stali), prowadzona jest przeważnie przy określonej podwyższonej temperaturze. Badanie polega na osiowym rozciąganiu próbki stałą siłą, wywołującą w niej naprężenia  $\sigma_0$ , oraz na rejestracji natychmiastowego sprężystego odkształcenia  $\varepsilon_0$  i występującego w czasie  $t$  narastania, nieliniowo zależnego od naprężenia, odkształcenia  $\varepsilon_c(t)$  spowodowanego pełzaniem

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_c(t). \quad (1.1)$$

Najbardziej ogólny przebieg odkształcenia pełzania stali  $\varepsilon_c(t)$  czasie  $t$ , przedstawiony na rysunku 1.2, wskazuje na możliwość rozróżnienia trzech faz pełzania z różnymi prędkościami odkształcania, kolejno: male-

jąca, ustaloną i rosnącą. W kolejnych fazach pełzanie określa się jako: niustalone, ustalone oraz niustalone – przyspieszone, prowadzące do zniszczenia próbki.

Przy pewnym poziomie naprężenia i temperatury trzecia faza – przyspieszone odkształcenie pełzania nie występuje, a jeśli ponadto odkształcenia pełzania w fazie pierwszej nie są znaczne, możliwe staje się ich pominięcie. Wówczas wykres funkcji pełzania przedstawia linia prosta, której tangens nachylenia określa prędkość odkształcenia pełzania ustalonego.



Rys. 1.2. Przykładowy przebieg całkowitego odkształcenia w czasie  $t$  próbki stalowej  
linia ciągła – próbka rozciągana osiowo; linia przerywana – częściowy nawrót  
odkształcenia po odciążeniu w chwili  $t_1$

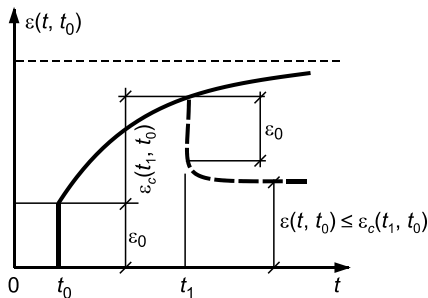
Cechą zjawiska pełzania stali jest, przedstawione linią przerywaną na rysunku 1.2, występujące po odciążeniu zmniejszanie się odkształcenia w postaci nagłego nawrotu sprężystego oraz dalszego opóźnionego. W praktyce jednak odkształcenia pełzania stali uważa się za nieodwracalne.

Próba pełzania betonu jest bardziej złożona, wymaga bowiem rozróżnienia odkształcenia pełzania od odkształcenia niezależnego od naprężenia, spowodowanego skurczem betonu, a także uwzględnienia starzenia się betonu i zmian modułu sprężystości betonu.

Próba oznaczenia pełzania betonu polega na osiowym ściskaniu próbki betonu w wieku betonu określonym czasem  $t = t_0$  stałą siłą, wywołującą w niej naprężenie  $\sigma_0$ , oraz rejestracji natychmiastowego jej odkształcenia sprężystego  $\varepsilon_0$  i występujących w czasie  $t > t_0$  przyrostów odkształcenia, spowodowanych pełzaniem  $\varepsilon_c(t, t_0)$  i skurczem betonu  $\varepsilon_s(t, t_0)$ .

Próba towarzysząca polega na rejestracji odkształcania się dodatkowej nieobciążonej próbki, spowodowanego skurczem betonu w tym samym czasie  $t - t_0$ .

Krzywa w postaci linii ciągłej na rysunku 1.3 przedstawia przykładowy przebieg w czasie całkowitego odkształcenia  $\varepsilon(t)$  próbki betonu (z pomięciem skurczu), spowodowanego naprężeniem  $\sigma_0$ , przyłożonym w chwili  $t = t_0$ . Linia przerywana na rysunku 1.3 pokazuje nawrót sprężysty oraz nawrót opóźniony odkształcenia pełzania betonu.

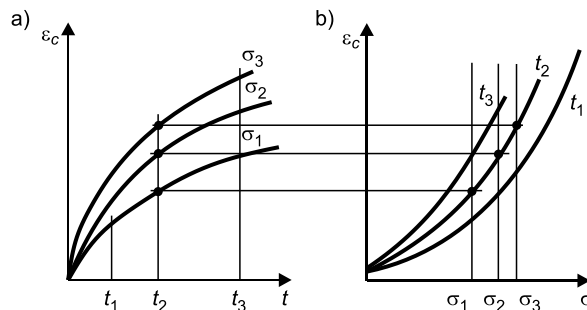


Rys. 1.3. Przykładowy przebieg w czasie odkształcenia całkowitego próbki betonowej  
linia ciągła – próbka rozciągana osiowo;  
linia przerywana – częściowy nawrót odkształcenia po odciążeniu w chwili  $t_1$

Kwantyfikację, czyli ilościowe ujmowanie zjawisk pełzania, ujętych tutaj opisowo, przedstawiono w rozdziale 5.1.

Przebiegi odkształcenia pełzania danego materiału, określone przy różnych wartościach stałego naprężenia  $\sigma_0$ , umożliwiają uzyskanie izochronicznych krzywych pełzania, krzywych zależności naprężenia od odkształceń pełzania w określonych chwilach czasu.

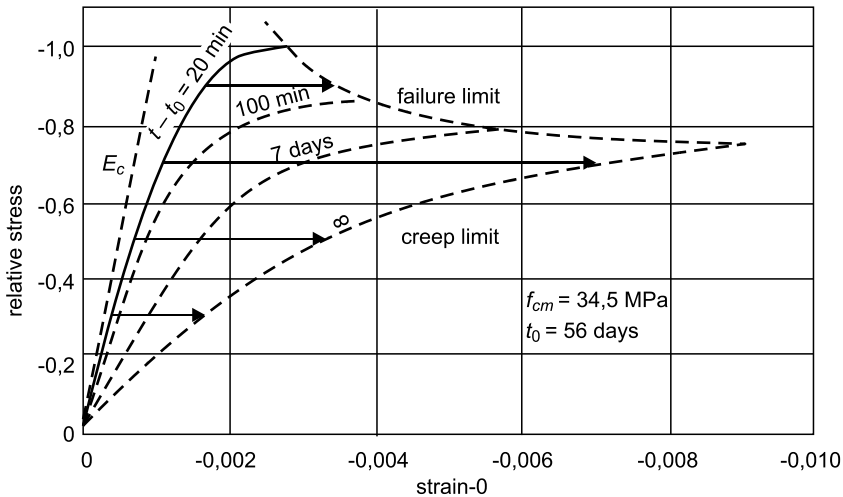
Na rysunku 1.4 pokazano wirtualny przykład odpowiedniości krzywych pełzania (rys. 1.4a) i krzywych izochronicznych (rys. 1.4b). Wykresy te świadczą, że w danym materiale związki odkształceń pełzania  $\varepsilon_c$  od naprężeń  $\sigma$  są w całym zakresie nieliniowe.



Rys. 1.4. Wykresy odpowiedniości krzywych pełzania  
a) krzywe pełzania, b) krzywe izochroniczne

Empirycznie wyznaczone izochroniczne krzywe pełzania stali z reguły są nieliniowe.

Klasyczne już dziś wykresy Rüscha [55] izochronicznych krzywych pełzania betonu (rys. 1.5) świadczą o możliwości uznania liniowości związku odkształcenia pełzania betonu z naprężeniem, ale tylko w zakresie niskich wartości naprężenia, na ogół nieprzekraczających wartości  $0,5f_{cm}$ , gdzie  $f_{cm}$  to średnia wytrzymałość betonu przy ściskaniu osiowym.



Rys. 1.5. Przykładowe izochroniczne krzywe pełzania betonu [55]

Założenie o liniowości związku odkształcenia pełzania z naprężeniem równoważne jest z przyjęciem zasady superpozycji Boltzmanna – Volterry, przedstawionej w rozdziale 4.1, która stanowi podstawę teorii dziedziczenia, omówionej w rozdziale 7.2.

Matematyczne równania opisujące wykresy izochronicznych krzywych pełzania, są podstawą tworzenia związków konstytutywnych teorii pełzania, odpowiednich do danego materiału.

W przypadkach występowania podobieństwa izochronicznych krzywych pełzania danego materiału, możliwe staje się ich określanie z jednej krzywej wyjściowej poprzez przemnożenie jej współrzędnych przez współczynniki będące funkcją czasu  $t$  oraz temperatury  $T$  – jeśli jest ona istotnym czynnikiem

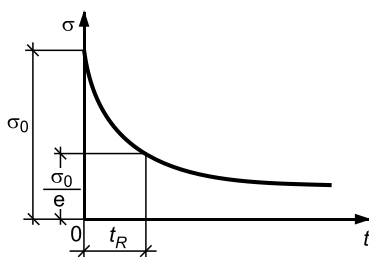
$$\varepsilon_c = f_1(\sigma) \cdot f_2(t) \cdot f_3(T). \quad (1.2)$$

Izochroniczne krzywe pełzania, wykazujące podobieństwo, stanowią podstawę konstytutywnych związków technicznych teorii pełzania metali

(rozdz. 2), a założenie o ich podobieństwie wykorzystywane jest w wariacie teorii dziedziczenia betonu, zwanym teorią starzenia (rozdz. 7.4).

Drugim, obok pełzania, zjawiskiem reologicznym jest relaksacja, czyli zmniejszanie się naprężenia w materiale poddanym działaniu przyłożonego i długotrwale utrzymywanego odkształcenia  $\varepsilon_0 = \text{const}$ , które wstępnie wywołuje naprężenie  $\sigma_0 = E\varepsilon_0$ .

Przykładowa krzywa relaksacji naprężenia stali, której współczynnik sprężystości  $E = \text{const}$ , przedstawiona jest na rysunku 1.6. Właściwością oznaczaną w próbie relaksacji jest czas relaksacji  $t_R$ , pokazany na rysunku, przy którym wstępnie wywołane w chwili  $t_0 = 0$  naprężenie  $\sigma_0$  zmniejsza się e-krotnie. Alternatywnie czas relaksacji może być zdefiniowany jako czas, przy którym naprężenie początkowe zmniejsza się do poziomu uznanego za dopuszczalny w danej konstrukcji.



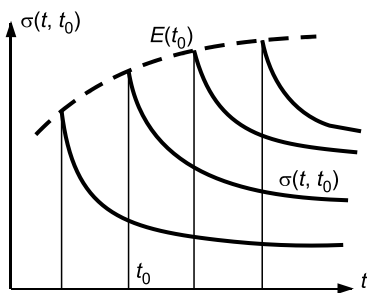
Rys. 1.6. Przykładowa krzywa relaksacji (spadku) naprężenia  $\sigma(t)$  w stali z oznaczonym czasem  $t_R$

Z uwagi na specyfikę betonu, jaką jest wzrost z wiekiem jego współczynnika sprężystości  $E(t)$ , krzywe relaksacji zależne są od wieku betonu  $t_0$ , w którym zostało przyłożone i długotrwale utrzymywane odkształcenie  $\varepsilon_0 = \text{const}$ , wstępnie wywołujące naprężenie  $\sigma_0 = E(t)\varepsilon_0$ . Przebieg krzywych relaksacji naprężenia w betonie pokazano na rysunku 1.7.

W porównaniu do próby relaksacji przeprowadzenie próby pełzania jest stosunkowo proste z uwagi na łatwość nagłego wywołania i utrzymania stałego w czasie naprężenia w próbce materiału oraz rejestracji odkształceń pełzania materiału w czasie. Stąd funkcja pełzania danego materiału może być oznaczona przy wysokim poziomie ufności oszacowanej niepewności wyników pomiaru.

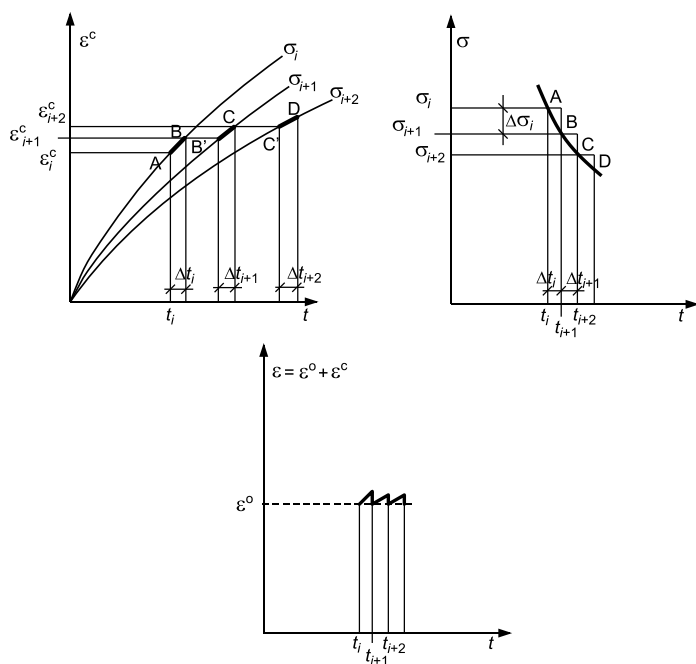
Próba relaksacji jest bardziej złożona [59], zarówno ze względu na trudność nagłego wywołania i utrzymania stałego w czasie odkształcenia, jak i rejestracji relaksacji – spadku naprężenia w czasie.





Rys. 1.7. Przykładowe krzywe relaksacji naprężenia w betonie w zależności od wieku, w którym wywołano stałe jego odkształcenie

Z tego powodu występuje większa niepewność wyników pomiarów oraz określonej funkcji relaksacji, a także poszukiwania metod ich zmniejszenia i dlatego często wykorzystuje się sposoby pośredniego oszacowania funkcji relaksacji. Przybliżone określanie krzywej relaksacji na podstawie krzywych pełzania w sposób zaproponowany przez C. Davenporta [15] przedstawione jest na rysunku 1.8.



Rys. 1.8. Graficzny sposób wyznaczania krzywej relaksacji naprężenia na podstawie krzywych pełzania wg Davenporta [15]

Sposób analitycznego oszacowania funkcji relaksacji stali, z wykorzystaniem prawa pełzania Bayley'a – Nortona w technicznej teorii pełzania, przedstawiono w rozdziale 2. Sposoby wyznaczania funkcji relaksacji na podstawie równań stanu różnego rodzaju reologicznych modeli mechanicznych pokazane są w rozdziale 3.

Możliwość pośredniego analitycznego określenia funkcji relaksacji, oznaczanej symbolem  $R(t, \tau)$  w równaniach całkowych związków konstytutywnych teorii dziedziczenia betonu, na podstawie znanej funkcji pełzania  $K(t, \tau)$ , przedstawiona jest w rozdziale 7.

### **1.3. Modelowanie zjawisk reologicznych**

Podstawę reologii (teorii pełzania) konstrukcji, jak już zostało powiedziane, stanowią związki konstytutywne – reologiczne równania stanu w postaci matematycznych relacji między odkształceniem i naprężeniem, zachodzących w czasie przy określonej temperaturze, w materiale o zdolnościach do odkształceń sprężystych i pełzania.

Modelowanie w nauce, zgodnie ze słownikiem języka polskiego, oznacza tworzenie modeli rzeczywistych zjawisk w celu ich zbadania, opisu i kwantyfikacji.

Pierwszym zadaniem modelowania zjawisk reologicznych w danym materiale jest doświadczalne wyznaczenie jego krzywych pełzania, opisujących narastanie odkształcenia w czasie przy stałym naprężeniu. Warunkują one możliwość realizacji zadania drugiego, tj. modelowania związku konstytutywnego w odniesieniu do tego materiału.

Najstarszy sposób modelowania reologicznych związków konstytutywnych, nadal wykorzystywany w odniesieniu np. do metali i polimerów, polega na przyjmowaniu ich w postaci równań regresji, opisujących empiryczne krzywe izochroniczne pełzania danego materiału.

Wyznaczone w ten sposób związki są podstawą technicznych teorii pełzania, przedstawionych w rozdziale 2. Ich zaletą jest łatwość opisu nieliniowego związku naprężenie – odkształcenie pełzania, charakterystycznego w odniesieniu do konstrukcji z wymienionych materiałów. Mankamentem takich teorii jest niemożność uwzględnienia zmienności właściwości materiału w czasie i historii jego obciążenia, stąd wynika ich nieprzydatność w odniesieniu do konstrukcji z betonu.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu równania stanu, określonego w odniesieniu do reologicznego modelu, w postaci układu elementarnych mechanicznych modeli, najbardziej odpowiedniego do opisu wyznaczonych empirycznie krzywych pełzania danego materiału.

Elementarne modele mechaniczne w układach przedstawiających ciało lepkosprężyste, stanowią: sprężyna, prezentująca cechy idealnie sprężystego ciała Hooke'a oraz tłumik – przedstawiający cechy idealnie lepkiej cieczy Newtona. W szczególnych przypadkach mogą być przyjmowane również inne elementarne modele, omówione w rozdziale 4.

Trzeci sposób modelowania reologicznych związków konstytutywnych polega na wykorzystaniu teorii ciała lepkosprężystego, w szczególności liniowej teorii zgodnej z zasadą superpozycji Ludwiga Boltzmann [6]. Zasada ta pozwala na opisanie zachowania się materiału w zależności od historii oddziaływania na niego obciążenia lub odkształcenia – za pomocą równań całkowych Vito Volterry [63], w których jądro stanowi funkcja dostosowania, zależna od cech i wieku materiału oraz od okresu oddziaływania. Dlatego też dalej stosowana jest nazwa zasady superpozycji Boltzmann – Volterry. Tak wyznaczane związki konstytutywne są podstawą do stosowania teorii dziedziczenia w obliczeniach reologicznych konstrukcji z betonu.