



Stanisława Kanas

Podstawy
ekonomii
matematycznej

W Y D A W N I C T W O N A U K O W E P W N



Podstawy ekonomii matematycznej



Stanisława Kanas

Podstawy ekonomii matematycznej



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2011

Projekt okładki i stron tytułowych
Przemysław Spiechowski

Redaktor inicjujący
Agnieszka Nowak

Redaktor
Małgorzata Kopczyńska

Podręcznik dofinansowany ze środków Wydziału Ekonomicznego UMCS.

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2011

ISBN 978-83-01-16550-5

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 22 69 54 321; faks 22 69 54 288
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

5.3.	Rozwiązanie dowolnego układu liniowego	70
5.4.	Metoda badania rzędów macierzy	74
5.5.	Układy jednorodne	76
5.6.	Zadania	77
6.	Modele równowagi rynkowej	83
6.1.	Częściowa równowaga rynkowa	84
6.1.1.	Liniowy model rynku, przypadek jednego towaru	84
6.1.2.	Model nieliniowy, przypadek jednego towaru	86
6.2.	Ogólna równowaga rynkowa	86
6.2.1.	Model rynku dwóch towarów	87
6.2.2.	Model rynku n towarów	87
6.3.	Model input-output (nakładów i wyników). Model Leontiefa	88
6.3.1.	Równania bilansowe międzygałęziewej produkcji globalnej	89
6.3.2.	Równania bilansowe kosztów	91
6.3.3.	Współczynniki efektywności procesu gospodarczego	94
6.3.4.	Macierz struktury kosztów	95
6.3.5.	Model zamknięty	98
6.4.	Zastosowania	100
6.4.1.	Wyznaczenie poziomu produkcji. Opłacalność produkcji. Nakład pierwotny	100
6.4.2.	Wyznaczenie produktu końcowego	100
6.4.3.	Wzrost produktu końcowego	101
6.4.4.	Wzrost poziomu produkcji	101
6.4.5.	Określenie wielkości nakładów pracy	102
6.4.6.	Analiza nakładów i wyników w przedsiębiorstwie	103
6.4.7.	Określenie poziomu produkcji firmy	104
6.4.8.	Zapotrzebowanie produkcyjne na materiały i energię	105
6.4.9.	Plan wykorzystania maszyn i urządzeń	106
6.4.10.	Określenie zatrudnienia	106
6.5.	Zadania	107
7.	Funkcje jednej zmiennej	113
7.1.	Granica funkcji jednej zmiennej	113
7.1.1.	Asymptoty funkcji	117
7.1.2.	Ciągłość funkcji	119
7.1.3.	Pochodna funkcji	122
7.2.	Zastosowania pochodnych. Reguła de l'Hôspitala	126
7.3.	Monotoniczność, ekstrema lokalne i globalne funkcji	127
7.4.	Wypukłość i wklęsłość funkcji. Punkty przegięcia. Badanie przebiegu funkcji	131
7.5.	Ekonomiczne charakterystyki funkcji jednej zmiennej	134
7.5.1.	Wielkości przeciętne, krańcowe funkcji	134
7.5.2.	Wartość jednostkowa funkcji	136
7.5.3.	Elastyczność funkcji	138
7.5.4.	Tempo wzrostu funkcji	141
7.6.	Zadania	142
8.	Rachunek całkowy	148
8.1.	Całka nieoznaczona	148
8.1.1.	Całki nieoznaczone podstawowych funkcji elementarnych	149
8.1.2.	Metoda całkowania przez części i przez podstawienie	150

8.1.3. Całki funkcji wymiernych	151
8.1.4. Całki funkcji trygonometrycznych	155
8.1.5. Całki wybranych funkcji niewymiernych	157
8.2. Całka oznaczona	158
8.3. Całka niewłaściwa	161
8.4. Zastosowania w ekonomii	163
8.5. Zadania	169
9. Funkcje wielu zmiennych	174
9.1. Pojęcia wstępne	174
9.2. Granica funkcji w punkcie	176
9.2.1. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych	177
9.2.2. Gradient. Pochodna kierunkowa	179
9.2.3. Różniczka funkcji	181
9.2.4. Ekstrema lokalne funkcji	182
9.2.5. Ekstremum warunkowe funkcji	185
9.2.6. Ekstremum globalne funkcji wielu zmiennych	186
9.3. Funkcje uwikłane	187
9.4. Ekonomiczne charakterystyki funkcji wielu zmiennych	189
9.4.1. Prosty model wymiany. Prostokąt Edgewortha	194
9.5. Zadania	197
10. Funkcje wypukłe, wklęsłe, quasi-wypukłe i quasi-wklęsłe	202
10.1. Funkcje wypukłe i funkcje wklęsłe	202
10.2. Funkcje quasi-wypukłe oraz quasi-wklęsłe	209
10.3. Zadania	216
11. Funkcje dyskretne	219
11.1. Pojęcia podstawowe	219
11.2. Rachunek różnicowy	219
11.3. Operator antyróżnicowy	223
11.4. Ekonomiczne charakterystyki funkcji dyskretnych	228
11.5. Zadania	230
12. Zagadnienia optymalizacji wypukłej	232
12.1. Wiadomości wstępne	232
12.1.1. Sformułowanie zagadnienia	233
12.1.2. Optymalizacja funkcji jednej zmiennej	235
12.1.3. Optymalizacja funkcji wielu zmiennych	236
12.2. Metoda nieokreślonych mnożników Lagrange'a	238
12.2.1. Program nieliniowy w postaci standardowej	245
12.3. Warunki i twierdzenie Karusha–Kuhna–Tuckera	245
12.4. Zastosowania	251
12.4.1. Prosty model wymiany, prostokąt (skrzynka) Edgewortha	251
12.4.2. Model Arrowa–Hurwicza	253
12.4.3. Model Arrowa–Debreu–McKenziego	257
12.5. Zadania	264
13. Funkcja użyteczności, popytu, podaży i kosztu	268
13.1. Funkcja użyteczności	268

13.1.1. Przykłady funkcji użyteczności	268
13.1.2. Podstawowe własności funkcji użyteczności	271
13.1.3. Charakterystyki funkcji użyteczności	272
13.2. Maksymalizacja użyteczności konsumpcji (MUK)	276
13.3. Funkcja popytu konsumenta	279
13.3.1. Charakterystyki funkcji popytu	280
13.4. Funkcja kosztu	284
13.5. Zadania	285
14. Funkcja produkcji	291
14.1. Skalarna funkcja produkcji	291
14.1.1. Standardowe założenia o skalarnej funkcji produkcji (postulaty funkcji produkcji)	292
14.1.2. Przykłady funkcji produkcji	293
14.2. Funkcja produkcji CES	294
14.3. Szczególne przypadki funkcji CES	300
14.3.1. Dwuargumentowa liniowa funkcja produkcji	300
14.3.2. Dwuargumentowa funkcja produkcji Cobba–Douglasa	302
14.3.3. Dwuargumentowa funkcja produkcji Koopmansa–Leontiefa	303
14.4. Inne funkcje produkcji	305
14.5. Długookresowa strategia przedsiębiorstwa (DSR)	306
14.5.1. Maksymalizacja zysku (MZ)	307
14.5.2. Minimalizacja kosztów (MK)	309
14.5.3. Optymalizacja wielkości produkcji (OP)	310
14.6. Krótkookresowa strategia przedsiębiorstwa (KSR)	312
14.7. Zadania	314
15. Równania różniczkowe	320
15.1. Równania różniczkowe rzędu pierwszego	321
15.1.1. Metoda uzmienniania stałej	324
15.1.2. Metoda przewidywań	325
15.1.3. Równanie Bernoulliego	326
15.2. Równania różniczkowe rzędu drugiego	327
15.2.1. Równania liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach	330
15.3. Równanie różniczkowe k -go rzędu o stałych współczynnikach	331
15.4. Stabilność równań różniczkowych. Linearyzacja	336
15.5. Zastosowania równań różniczkowych	342
15.5.1. Procenty składane	342
15.5.2. Model wzrostu Domara	342
15.5.3. Model Solowa	345
15.5.4. Rozwój populacji. Model Malthusa	348
15.5.5. Model Verhulsta (logistyczny). Rozwój populacji z uwzględnieniem pojemności środowiska	349
15.5.6. Model Gompertza	351
15.5.7. Model Ludwiga rozwoju populacji	352
15.5.8. Badanie przyczyny rozwodów	353
15.5.9. Prosty model rynku	353
15.5.10. Model rynku z określoną tendencją zmiany cen	354
15.5.11. Zależności między bezrobociem i inflacją, model Phillipsa	356
15.6. Zadania	358

16. Równania różnicowe	365
16.1. Równania różnicowe. Podstawy	365
16.1.1. Liniowe równanie różnicowe rzędu pierwszego	369
16.1.2. Liniowe równanie rzędu k -go o stałych współczynnikach	371
16.1.3. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego o stałych współczynnikach. Metoda uzmienniania stałych	374
16.1.4. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego o stałych współczynnikach. Metoda przewidywań	376
16.2. Transformata \mathcal{Z}	378
16.3. Stabilność i linearyzacja nieliniowych równań różnicowych	381
16.4. Zastosowania równań różnicowych	383
16.4.1. Przyrost populacji w ujęciu dyskretnym. Model Malthusa	383
16.4.2. Dyskretny model Verhulsta	384
16.4.3. Model Fibonacciego	385
16.4.4. Model pajęczynowy	386
16.4.5. Rynek z określoną tendencją zmiany cen	388
16.4.6. Model dochodu narodowego Samuelsona (model mnożnika i akceleratora)	389
16.4.7. Model przepustowości. Teoria kolejek	390
16.5. Zadania	393
17. Układy równań różniczkowych zwyczajnych	397
17.1. Układy równań różniczkowych. Wiadomości wstępne	397
17.1.1. Metoda eliminacji	397
17.2. Układy równań różniczkowych liniowych	399
17.2.1. Rozwiązanie ogólne układu jednorodnego	402
17.2.2. Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach. Metoda Eulera	406
17.3. Stabilność i asymptotyczna stabilność układów równań różniczkowych	411
17.4. Linearyzacja nieliniowych układów równań różniczkowych	414
17.5. Zastosowania układów równań różniczkowych	417
17.5.1. Ciągły model Leontiefa nakładów i wyników w procesie produkcji	417
17.5.2. Model nakładów i wyników obejmujący akumulację zapasów	418
17.5.3. Model Arrowa–Hurwicza	419
17.5.4. Model Arrowa–Debreu–McKenziego	420
17.5.5. Model inflacji i polityki monetarnej Obst	422
17.5.6. Model Lotki–Volterra (model konkurencji)	422
17.5.7. Uogólniony model Lotki–Volterra	424
17.5.8. Model epidemii Kermacka–McKendricka	425
17.5.9. Model „Romeo i Julia”	427
17.5.10. Układy o jednym (wielu) wejściu i wyjściu	428
17.6. Zadania	428
18. Układy równań różnicowych	434
18.1. Układy równań różnicowych. Wiadomości wstępne	434
18.1.1. Metoda eliminacji	434
18.1.2. Układy równań różnicowych liniowych	436
18.1.3. Metoda uzmienniania stałych wyznaczania rozwiązania szczególnego układu niejednorodnego	439
18.2. Układy równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach	440
18.3. Stabilność rozwiązania układu równań różnicowych	444

18.4. Zastosowania układów równań różnicowych	446
18.4.1. Model rynku	446
18.4.2. Dyskretny model Arrowa–Hurwicza	446
18.4.3. Dyskretny model Leontiefa	447
18.4.4. Model nakładów i wyników obejmujący akumulację zapasów	448
18.4.5. Dyskretny model oddziałujących populacji	448
18.4.6. Układy o jednym (wielu) wejściu i wyjściu	452
18.5. Zadania	453
Bibliografia	457
Wykaz symboli	459
Skorowidz	461

Wstęp

Niniejsza książka powstała na podstawie wykładów prowadzonych przeze mnie dla studentów Politechniki Rzeszowskiej kierunku matematyka, specjalności *zastosowania matematyki w ekonomii*. W książce tej położony jest nacisk na praktyczne zastosowania poznanych definicji, własności i twierdzeń matematycznych w ekonomii. Z tego też powodu podstawowy materiał matematyczny jest potraktowany pobieżnie i ma stanowić raczej przypomnienie znanych faktów niż ich szczegółowe wprowadzenie.

Autorka rezygnuje ze zbytnej formalizacji i matematyzacji przedstawionego materiału na rzecz przedstawienia zastosowań w praktyce. Dlatego rozważania ograniczają się do przestrzeni rzeczywistych skończeniowymiarowych, a więc takich, jakie rozważane są w ekonomii.

Ponieważ w gospodarce rynkowej ekonomia posługuje się jako zasadniczymi narzędziami matematyką i modelami matematycznymi, autorka przedstawia najpierw niezbędne techniki matematyczne a następnie wykorzystuje je do problemów analizy ekonomicznej. Ze względu na dużą liczbę modeli makro- i mikroekonomicznych książka powinna okazać się przydatna dla Czytelników, którzy posiadają przygotowanie matematyczne, ale potrzebne im jest wprowadzenie terminologii i modeli ekonomicznych. Może być ona użyteczna również dla studentów kierunków typowo ekonomicznych właśnie ze względu na wprowadzenie matematycznych notacji, definicji i własności. Z tego też powodu książka może służyć jako lektura uzupełniająca do studiowania makro- i mikroekonomii oraz teorii wzrostu ekonomicznego i jego rozwoju.

Podręcznik zawiera szereg zadań służących do przypomnienia koniecznych wiadomości matematycznych. Szerzej omówiony jest materiał mniej znany z podstawowego kursu matematyki, a więc pojęcia wypukłości i quasi-wypukłości, ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych, równania różnicowe i różniczkowe, układy równań różniczkowych i różnicowych wraz z zastosowaniami, czy też problemy stabilności rozwiązań. Szczególne znaczenie mają rozdziały poświęcone funkcjom dyskretnym i rachunkowi różnicowemu. Funkcje dyskretne, do tej pory pomijane w klasycznym wykładzie analizy matematycznej, znajdują coraz szersze zastosowanie zarówno w naukach matematycznych, jak i w wszystkich naukach technicznych, ze względu na czytelny opis zachodzących procesów, które albo zachodzą cyklicznie, albo są obserwowane i mierzone w pewnych odstępach czasowych.

Ekonomia matematyczna nie jest gałęzią ekonomii tak jak makro- czy mikroekonomia czy też handel międzynarodowy. Nie jest również gałęzią matematyki

jak algebra czy równania różniczkowe. Ekonomia matematyczna stanowi pewien pomost pomiędzy zagadnieniami ekonomicznymi i matematycznymi, wykorzystując znany aparat matematyczny zarówno do opisu zjawisk ekonomicznych, jak i do uzyskiwania rozwiązań problemów ekonomicznych. Ekonomia matematyczna pozwala sprecyzować zagadnienia ekonomiczne, zmuszając ekonomistów do używania ścisłego języka i symboli matematycznych.

Zgodnie z założonym celem książka jest próbą związłego przedstawienia podstawowych zastosowań aparatu matematycznego w ekonomii. Dlatego znajdziemy w niej wiele przykładów i modeli ekonomicznych oraz wiele zadań do samodzielnego rozwiązania. Ponieważ ekonomiści badają zjawiska zachodzące zarówno w gospodarce, jak i związane z ekologią, produkcją, przyrostem naturalnym itp., w książce znajdziemy również przykłady dotyczące zagadnień technicznych, jak i z zakresu biomatematyki.

Podręcznik obejmuje następujące zagadnienia ekonomii matematycznej: teorię zachowania konsumenta oraz analizę tego zachowania w kontekście zmieniających się warunków na rynku towarów, statyczne modele równowagi rynkowej i równowagi w przedsiębiorstwie, zagadnienia dotyczące bankowości, optymalizacji wypukłej, teorię przedsiębiorstwa i modele dynamiczne procesów ekonomicznych.

Ze względu na dużą liczbę przykładowych modeli ekonomicznych książka powinna być przydatna dla Czytelników, którzy mają przygotowanie matematyczne obejmujące algebrę liniową oraz analizę matematyczną I i II. Ze względu natomiast na umieszczenie zagadnień typowo matematycznych książka może służyć również Czytelnikom pragnącym zapoznać się z podstawami algebry i analizy, a następnie uzupełnić wiadomości dotyczące równań i układów równań różniczkowych i różnicowych oraz ich zastosowań w praktyce. Przedstawiona jest również teoria stabilności i linearyzacji tych równań. Materiał zawierający zagadnienia optymalizacyjne wzbogacić może wiedzę Czytelnika o zastosowania aparatu rachunku różniczkowego funkcji jednej i wielu zmiennych.

Pragnę wyrazić słowa wdzięczności studentom Wydziału Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej, dzięki którym powstała ta książka. Była ona odpowiedzią na ich zapotrzebowanie, byli oni również pierwszymi krytycznymi jej recenzentami. Książka ta powstała w odpowiedzi na zapotrzebowanie studentów Wydziału Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej; byli oni również pierwszymi krytycznymi jej recenzentami. W związku z powyższym pragnę wyrazić słowa najwyższej wdzięczności Władzom Politechniki Rzeszowskiej i studentom Wydziału Matematyki i Fizyki Stosowanej Politechniki Rzeszowskiej. Szczere podziękowania kieruję również pod adresem recenzentów, których życzliwe i konstruktywne uwagi pomogły w ulepszeniu ostatecznej wersji podręcznika. Za przyjęcie projektu do realizacji oraz przychylną i wszechstronną pomoc w procesie wydawniczym serdecznie dziękuję Redakcji PWN. Wyrażam głęboką wdzięczność Rektorowi i Dziekanowi Wydziału Ekonomicznego UMCS za pomoc w urzeczywistnieniu i wsparcie finansowe projektu. Na koniec chciałabym najgoręcej podziękować mojej Rodzinie i Przyjaciołom, od których zawsze uzyskiwałam wsparcie, zrozumienie i życzliwość.

Konstrukcja modelu matematycznego

Ekonomia w opisie zjawisk zachodzących w gospodarce narodowej, przedsiębiorstwie, itp. posługuje się pewnymi modelami. Model ekonomiczny to celowo uproszczony schemat gospodarczej rzeczywistości. Jest zbiorem założeń, definicji i zależności przyczynowo-skutkowych zachodzących pomiędzy rozważanymi podmiotami. Dlatego też przedmiotem ekonomii matematycznej jest konstruowanie, a następnie badanie matematycznych modeli rzeczywistych procesów ekonomicznych metodami matematycznymi, czyli dążenie do matematyzacji modelu.

Model matematyczny to obiekt, który zastępuje oryginał i odwzorowuje najważniejsze dla danego procesu ekonomicznego cechy i właściwości oryginału. Model matematyczny ekonomii jest układem założeń, definicji i zależności przyczynowo-skutkowych opisujących jego strukturę. Zależności te opisywane są za pomocą pewnych wielkości, funkcji, równań czy nierówności, zawierających dane, które są ustalone (tzw. parametry modelu), oraz dane, które należy określić — nazywamy je zmiennymi.

Zmienne modelu dzielimy na **endogeniczne** i **egzogeniczne**. Zmienne endogeniczne są to zmienne generowane od wewnątrz, których wartości określamy na podstawie modelu. Zmienną egzogeniczną, czyli generowaną z zewnątrz, nazywamy taką zmienną, której wartości są dane i ustalone, określone przez siły zewnętrzne w stosunku do modelu.

Przykładowo, analizując preferencje konsumenta, rozważamy ceny towarów na rynku, które kształtują te preferencje. Ceny towarów są w danym momencie ustalone i są zmiennymi egzogenicznymi — konsument nie ma wpływu na ich ustalenie. W tym samym modelu ilości towarów nabytych przez konsumenta są zmiennymi endogenicznymi, zależnymi od konsumenta.

Ponadto zmienne, parametry oraz funkcje opisujące model spełniają pewne założenia, np. założenie nieujemności, ciągłości, różniczkowalności. Modele matematyczne ekonomii nie powstają w oderwaniu od rzeczywistych procesów ekonomicznych. Twórca modelu obserwuje przez pewien czas pewne zjawisko i otrzymuje szereg danych empirycznych charakteryzujących to zjawisko. Kolejno badacz systematyzuje otrzymane dane, a następnie próbuje opisać je w języku matematycznym. Podejście badacza może być intuicyjne, dedukcyjne, polegające na wiedzy potocznej itp. Badacz ujmuje również otrzymane dane w postaci tabel, wykresów,

ewentualnie zależności funkcyjnych. Te ostatnie wydają się być dogodnym punktem wyjścia do dalszego badania i opisu modelu. Przykładami takich funkcji, najbardziej charakterystycznych dla modeli ekonomicznych, są: funkcja użyteczności, produkcji, kosztów, popytu, podaży itp.

Podejście matematyczne stosowane do opisu zjawisk ekonomicznych pozwala na wykorzystanie bogactwa matematycznych twierdzeń i własności, badanie przypadków ogólnych, wielowymiarowych oraz na ściśle formułowanie wszystkich przyjętych założeń i oddzielenia założenia twierdzenia od tezy.

Podstawowymi modelami matematycznymi ekonomii są:

- modele zachowania konsumenta (teoria preferencji),
- modele rynku,
- modele równowagi,
- modele wzrostu gospodarczego,
- modele cyklu koniunkturalnego.

Etapy konstrukcji modelu:

1. Określenie zmiennych objaśnianych i objaśniających (endogenicznych i egzogenicznych), parametrów oraz wielkości ustalonych, które będą rozważane w modelu. Zmiennymi modelu ekonomicznego są często: praca, zysk, przychód, koszt, dochód itp. Parametry modelu mogą być w danym momencie ustalone (w stosunku do zmiennych), jednak w badaniach porównawczych można rozważać zmiany rozwiązania spowodowane zmianami parametrów.
2. Formułowanie warunków prawidłowego funkcjonowania modelu. Sformułowanie takich warunków wymaga przede wszystkim określenia podstawowych założeń, zakresu zmienności zmiennych i parametrów (np. $x \geq 0$). Kolejno należy ustalić związki zachodzące z definicji (np. wartość towarów o ilościach x_1, x_2, \dots, x_n i cenach p_1, p_2, \dots, p_n jest równa $p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$). Ustalane są również zależności funkcyjne, czyli zależności przyjęte w modelu *ex ante* oraz warunki dotyczące równowagi bądź nierównowagi (wzrostu, spadku) modelu.
3. Sprowadzenie warunków modelu do funkcji (równań) względem jednej lub większej liczby zmiennych (mogą to być równania i nierówności liniowe, różniczkowe, różnicowe lub całkowite).

W zastosowaniach ekonomicznych wyróżnia się następujące typy równań:

1. **Równania behawioralne** — określają sposób, w jaki zachowuje się zmienna w reakcji na przyrosty innych zmiennych. Równania te mogą być używane do opisu ogólnych uwarunkowań modelu, obejmujących aspekty technologiczne i prawne.
2. **Równania definicyjne** — określają równość dwóch wyrażeń mających ten sam sens.
3. **Warunki równowagi (lub dynamiki)** — określają warunki równowagi lub nierównowagi (wzrostu, spadku) modelu. Równania dotyczące warun-

ków równowagi występują jedynie w modelach opisujących stany równowagi, np. równowagi popytu i podaży; w przypadku analizy dynamicznej równania mają za zadanie sformułowanie założeń wymaganych do uzyskania pożądanych zmian.

Rozwiązanie modelu polega na wyznaczeniu wartości liczbowych odpowiadających żadanemu poziomowi stanu, wyznaczeniu warunków pozwalających na utrzymaniu danego stanu przez pewien czas bądź określeniu warunków koniecznych do generowania pożądanych zmian. Prawidłowe rozwiązanie modelu powinno zawierać również pozostałe zmienne, uzależnione w pewien sposób od wyznaczonych wartości i określone na podstawie warunków modelu.