

Ekonomia

# Optymalizacja w logistyce

tom 2

Modelowanie przepływów w kanałach dystrybucji

Radostaw Jadczak, Zbigniew Karwacki

Piotr Miszczyński

redakcja naukowa Iwona Konarzewska



# **Optymalizacja w logistyce**

tom 2

Modelowanie przepływów w kanałach dystrybucji



WYDAWNICTWO  
UNIWERSYTETU  
ŁÓDZKIEGO

Ekonomia

# Optymalizacja w logistyce

tom 2

Modelowanie przepływów w kanałach dystrybucji

Radosław Jadczyk, Zbigniew Karwacki

Piotr Miszczyński

redakcja naukowa Iwona Konarzewska

Radosław Jadczyk, Zbigniew Karwacki, Piotr Miszczyński  
– Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Instytut Logistyki i Informatyki  
Katedra Badań Operacyjnych, 90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 37

RECENZENT

*Józef Stawicki*

REDAKTOR INICJUJĄCY

*Beata Koźniewska*

REDAKTOR NAUKOWY

*Iwona Konarzewska*

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

*Anna Dziadzio*

SKŁAD I ŁAMANIE

*Munda – Maciej Torz*

KOREKTA TECHNICZNA

*Leonora Gralka*

PROJEKT OKŁADKI

*Agencja Reklamowa efectoro.pl*

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/jamesteohart

© Copyright by Authors, Łódź 2020

© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2020

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego  
Wydanie I. W.09913.20.0.K

Ark. wyd. 16,5; ark. druk. 17,875

ISBN 978-83-8220-165-9

e-ISBN 978-83-8220-166-6

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego  
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8  
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl  
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl  
tel. 42 665 58 63

# Spis treści

Wprowadzenie	9
Rozdział I	
<b>Problem lokalizacji centrów logistycznych</b>	<b>11</b>
1. Przegląd metod rozwiązania problemu lokalizacji	11
2. Rozwiązanie problemu lokalizacji na podstawie położenia punktów sieci dystrybucji – metoda środka ciężkości	12
2.1. Wyznaczanie lokalizacji za pomocą metryki prostokątnej	18
2.2. Wyznaczanie lokalizacji za pomocą metryki euklidesowej	22
3. Rozwiązanie problemu lokalizacji na podstawie metod optymalizacji wielokryterialnej	28
Rozdział II	
<b>Zagadnienie transportowe</b>	<b>39</b>
1. Klasyczne zagadnienie transportowe (KZT)	40
1.1. Modelowanie i rozwiązanie klasycznego problemu transportowego	41
1.2. Wybrane metody konstrukcji początkowego dopuszczalnego rozwiązania bazowego	44
1.2.1. Metoda kąta północno-zachodniego	46
1.2.2. Metoda minimalnego elementu macierzy kosztów	47
1.2.3. Metoda aproksymacyjna Vogela (VAM)	48
1.3. Optymalizacja problemu transportowego – zmodyfikowana metoda przydziałów (MODI)	50
2. Zagadnienie transportowe z ograniczoną przepustowością tras	55
3. Zagadnienie transportowe z kryterium czasu	61
4. Zagadnienie transportowe z punktami przeładunkowymi – wieloetapowe	66
5. Problem minimalizacji pustych przebiegów	71
Rozdział III	
<b>Układanie tras pojazdów</b>	<b>77</b>
1. Układanie trasy jednego pojazdu (problem komiwojażera)	77
1.1. Matematyczne sformułowanie problemu decyzyjnego	78

<b>6</b>	<b>Spis treści</b>	
1.2.	Metody układania tras jednego pojazdu	83
1.2.1.	Algorytmy konstrukcyjne	83
1.2.2.	Algorytmy lokalnej optymalizacji (lokalnego przeszukiwania)	89
2.	Układanie tras wielu pojazdów (problem wielu komiwojażerów)	93
2.1.	Matematyczne sformułowanie problemu decyzyjnego	94
2.2.	Metody układania tras wielu pojazdów	95
2.2.1.	Algorytmy konstrukcyjne	95
2.2.2.	Algorytmy dekompozycyjne	101

#### Rozdział IV

	<b>Optymalizacja w sieciach transportowych</b>	<b>107</b>
1.	Elementy teorii grafów	108
2.	Wyznaczanie dróg w sieciach dostaw	115
3.	Konstrukcja połączeń między węzłami sieci dostaw	126
4.	Przepływy w sieciach dostaw	137
4.1.	Problem maksymalnego przepływu w sieci	139
4.2.	Problem najtańszego przepływu w sieci	149

#### Rozdział V

	<b>Zarządzanie zapasami</b>	<b>155</b>
1.	Zapasy i ich rola w logistyce	155
1.1.	Definicje i miejsca tworzenia zapasów	156
1.2.	Przyczyny gromadzenia i rodzaje zapasów	157
1.3.	Koszty zapasów	161
2.	Analiza zapotrzebowania na produkt	165
2.1.	Analiza zapotrzebowania na wiele produktów	166
2.2.	Analiza zapotrzebowania na jeden produkt	171
3.	Uzupełnianie zapasów	175
3.1.	Wielkość dostawy	177
3.1.1.	Ekonomiczna wielkość zamówienia	178
3.1.2.	Wielkość zamówienia przy zmianie cen jednostkowych	181
3.1.3.	Wielkość zamówienia wielu produktów od jednego dostawcy	182
3.2.	Metody wyznaczania momentu zamówienia	184
3.2.1.	Model „dwóch skrzynek”	186
3.2.2.	Model poziomu informacyjnego	187
3.2.3.	Model przeglądu okresowego	190
3.2.4.	Modyfikacje modeli zarządzania zapasami	193

#### Rozdział VI

	<b>Algorytmy szeregowania zleceń</b>	<b>199</b>
1.	Problem szeregowania zleceń i rola szeregowania w systemach logistycznych	200
2.	Środowisko maszynowe	206
2.1.	Przypadek pojedynczej maszyny	206

2.2. Przypadek maszyn równoległych	208
2.3. Systemy typu <i>flow shops</i> , <i>job shops</i> i <i>open shops</i>	208
3. Modelowanie i rozwiązywanie problemów szeregowania zleceń w praktyce	209
3.1. Algorytm Conwaya	211
3.2. Algorytm Gonzalesa–Sahniego	214
3.3. Algorytm Johnsona dla dwóch maszyn	218
3.4. Algorytm Johnsona dla trzech maszyn	220
3.5. Algorytm Palmera	221
4. Podsumowanie, wnioski	224

## Rozdział VII

**Modelowanie przepływów produkcyjnych 227**

1. Modelowanie produkcji	227
2. Drzewo produktu	228
3. Tworzenie listy materiałowej produktu – postępowanie iteracyjne	230
4. Graf Gozinto	232
5. Wyznaczanie zapotrzebowania na półprodukty i surowce	235
6. Analiza czasu wykonywania wyrobów	238
7. Optymalizacja produkcji	240
7.1. Maksymalizacja wykorzystania czasu pracy	240
7.2. Maksymalizacja zysku	242

## Rozdział VIII

**Wprowadzenie do metod symulacyjnych 243**

1. Podstawowe pojęcia i klasyfikacja modeli symulacyjnych	243
2. Zalety i wady symulacji	245
3. Podstawowe metody modelowania symulacyjnego	246
4. Etapy symulacji	249
5. Wprowadzenie do metod Monte Carlo	252
6. Wprowadzenie do symulacji zdarzeń dyskretnych	258
7. Uwagi na temat planowania eksperymentów i metod redukcji wariacji	263

## Bibliografia 265

## Dodatek. Transformacja odwrotna do dystrybuanty dla wybranych ciągłych rozkładów prawdopodobieństwa 271

1. Rozkład trójkątny	271
2. Rozkład Pareta ( $a, b$ )	272
3. Rozkład wykładniczy	274
4. Rozkład Erlanga ( $k, \lambda$ )	275
5. Rozkład logistyczny ( $\mu, s$ )	276

## Spis tabel 279

## Spis rysunków 283



# Wprowadzenie

W pracy *Optymalizacja w logistyce. Modelowanie logistycznych procesów decyzyjnych* (Konarzewska, Kucharski i Jewczak, 2020) przedstawiono podstawowe sposoby modelowania zagadnień logistycznych za pomocą modeli programowania liniowego, modeli przydziału oraz innych metod z zakresu badań operacyjnych. Omówiono także zagadnienia związane z planowaniem sieciowym, zarządzaniem projektami, modelowaniem zagadnień masowej obsługi i prognozowaniem popytu. Niniejsza praca stanowi kontynuację zagadnień z zakresu poszukiwania optymalnych rozwiązań w problemach logistycznych.

W rozdziale pierwszym wnikliwie zanalizowany został bardzo istotny problem logistyczny, jakim jest lokalizacja centrów logistycznych. Przedstawiono metodę środka ciężkości na podstawie różnych, służących do mierzenia odległości metryk. Pokazano także sposób rozwiązania tego problemu w przypadku, gdy przy podejmowaniu decyzji bierzemy pod uwagę więcej niż jedno kryterium optymalizacji.

Tematyka rozdziałów od drugiego do czwartego obejmuje szeroko rozumiane problemy transportowe i algorytmy ich rozwiązywania. Rozpoczęto od omówienia klasycznego zagadnienia transportowego oraz algorytmu poszukiwania rozwiązania optymalnego za pomocą zmodyfikowanej metody przydziałów, znanej jako MODI (lub metoda potencjałów). Następnie pokazano, jak skonstruować model, aby móc rozwiązywać zagadnienia transportowe m.in. w przypadku nierównowagi między podażą a popytem, z ograniczeniami na przepustowość tras, z funkcją kryterium związaną z czasem dostaw oraz minimalizacją pustych przebiegów. Zaprezentowany został tu również model zagadnienia transportowego wieloetapowego z punktami przeładunkowymi. Następnie, w rozdziale trzecim, omówiono zagadnienia układania tras pojazdów, znane jako problemy jednego i wielu komiwojażerów. Rozdział czwarty podejmuje kwestię optymalizacji w sieciach transportowych, w tym problemy optymalnej konstrukcji połączeń między węzłami, sposoby wyznaczania maksymalnego, a także najtańszego przepływu w sieci.

Rozdział piąty przedstawia bardzo istotne zagadnienie – pojawiające się zarówno w logistyce zaopatrzenia, jak i produkcji czy dystrybucji – jakim jest optymalne zarządzanie zapasami. Stanowią one bowiem ważny element funkcjonowania po-

jedynczego przedsiębiorstwa, a także pełnią kluczową funkcję w łańcuchu dostaw, wpływając m.in. na ograniczenie ryzyka funkcjonowania przedsiębiorstwa, związanego z brakiem surowców czy też niedostosowaniem możliwości dystrybucyjnych do realnego popytu. Omówione zostały tu sposoby klasyfikacji i analizy zapotrzebowania na produkty oraz modele wspomagające tworzenie strategii uzupełniania zapasów (wielkość dostawy, ustalanie momentu wykonania zamówienia).

W rozdziale szóstym podjęto temat szeregowania/harmonogramowania zadań produkcyjnych, znajdujący zastosowanie w procesach planowania oraz sterowania produkcją. Wykorzystanie odpowiedniej metody szeregowania zadań pozwala, na podstawie informacji o dostępnych stanowiskach produkcyjnych, a także wymaganych czasach realizacji poszczególnych operacji, uzyskać informacje o planowanym terminie zakończenia produkcji, obciążeniu maszyn czy też czasochłonności zadań. Na przykładach zaprezentowano algorytmy harmonogramowania zadań/zleceń – ważne z punktu widzenia praktycznych zastosowań: Conwaya, Gonzalesa–Sahnego, Johnsona, Palmera.

Rozdział siódmy obejmuje tematykę modelowania przepływów produkcyjnych. Przedstawiono w nim konstrukcję drzewa produktu i grafu Gozinto, tworzenia listy materiałowej, wyznaczania zapotrzebowania na półprodukty i surowce. W przykładach optymalizacji przepływów produkcyjnych za kryteria przyjęto maksymalizację wykorzystania czasu pracy oraz maksymalizację oczekiwanego zysku z produkcji.

Rozdział ósmy zawiera z kolei syntetyczne omówienie najważniejszych pojęć związanych z symulacją, w tym symulacją procesów logistycznych. Zaprezentowano tu podstawowe metody modelowania symulacyjnego: metodę dynamiki systemów, metodę symulacji zdarzeń dyskretnych oraz metodę modelowania wieloagentowego. Rozdział zawiera również wprowadzenie do metod Monte Carlo, w tym do sposobów generowania liczb pseudolosowych z różnych rozkładów prawdopodobieństwa, elementu istotnego w stochastycznych modelach symulacyjnych (np. modelach kolejek czy też modelach zapasów). W *Dodatku* zawarto m.in. informacje na temat postaci funkcji odwrotnych do dystrybuanty dla wybranych rozkładów prawdopodobieństwa – stanowi on uzupełnienie rozdziału poświęconego modelowaniu symulacyjnemu.

Niniejszy tom, zatytułowany *Optymalizacja w logistyce. Modelowanie przepływów w kanałach dystrybucji*, oraz tom pt. *Optymalizacja w logistyce. Modelowanie logistycznych procesów decyzyjnych*, wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego w 2020 roku, są wynikiem wspólnych prac i dociekań pracowników Katedry Badań Operacyjnych Uniwersytetu Łódzkiego. Tematyka poruszona w obu książkach jest również przedmiotem wykładów i ćwiczeń informatycznych z badań operacyjnych oraz metod optymalizacji na kierunkach Logistyka (stopień I) oraz Logistyka w gospodarce (stopień II) na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego. Autorzy serdecznie dziękują prof. dr. hab. Józefowi Stawickiemu za wnikliwe i życzliwe uwagi przedstawione w recenzji pracy.

## Rozdział I

# Problem lokalizacji centrów logistycznych

## 1. Przegląd metod rozwiązywania problemu lokalizacji

Jednym z istotnych zagadnień logistycznych jest problem decyzyjny związany w wyborem lokalizacji dla centrum dystrybucyjnego (centrum logistycznego). Lokalizację można zdefiniować jako „odpowiednie umiejscowienie wielkości i rodzaju działalności gospodarczej, obiektu lub zespołu obiektów, w określonym obszarze” (Budner, 1999). Taką działalność gospodarczą bądź obiekt nazywamy centrum logistycznym (dystrybucyjnym). Może nim być zakład produkcyjny, do którego zwożone są materiały i półprodukty, a wywożone gotowe produkty, lub też magazyn centralny – wraz z obiektami towarzyszącymi, obsługującymi wybrany obszar. Centra dystrybucji zapewniają wiele usług, dzięki którym redukcji ulegają koszty logistyczne, a zagwarantowana zostaje terminowość dostaw; są to np.:

- podstawowe usługi logistyczne, związane m.in. z transportem, magazynowaniem, zarządzaniem zamówieniami;
- usługi pomocnicze, związane m.in. ze spedycją, obsługą celną, ubezpieczeniami;
- usługi dodatkowe, m.in. techniczna obsługa pojazdów.

Przy podejmowaniu decyzji o wyborze lokalizacji dla centrum logistycznego należy brać pod uwagę aspekty związane z zakresem usług pełnionych przez dane centrum.

Kluczowym elementem okazuje się tu również analiza kosztów związana z podstawowymi usługami logistycznymi. Teoria lokalizacji obiektów w logistyce „została sformułowana i rozwinięta w celu wyjaśnienia i prognozowania przestrzennej organizacji różnych kategorii działalności gospodarczej. Jej podstawą jest stwierdzenie, że koszty działalności gospodarczej i dochody z tytułu jej prowadzenia zależą od jej położenia, przy założeniu racjonalnego wyboru zgodnie z zasadami ekonomii” (Baran, Maciejczak, Pietrzak i Rokicki, 2008).

Podmioty gospodarcze, chcące dziś sprawnie funkcjonować, muszą borykać się z wieloma problemami. Przedsiębiorcy zarządzający firmą w sposób efektywny powinni natomiast odpowiedzieć sobie na wiele pytań. Jednym z nich jest to, w jaki sposób umiejscowić centrum logistyczne – przy jednoczesnej minimalizacji kosztów przewozu oraz najlepszym wykorzystaniu dostępnych środków transportu. Wyznaczanie lokalizacji dla nowego obiektu produkcyjnego lub centrum magazynowego firmy wiąże się z rozszerzeniem asortymentu, co wymaga nawiązania nowych kontaktów z dostawcami i odbiorcami. W rzeczywistości istnieją dwa podejścia wyboru miejsca lokalizacji. Pierwsze z nich zakłada swobodny wybór miejsca spośród takich, które spełniają wymagania decydenta (co zostanie pokazane na przykładzie w punkcie drugim niniejszego rozdziału). Natomiast drugie opiera się na podejmowaniu decyzji na podstawie pewnego zbioru propozycji (co zostanie zobrazowane w punkcie trzecim). Można również połączyć oba podejścia, wyznaczając w pierwszej kolejności obszar poszukiwań dogodnej lokalizacji, a w kolejnym kroku dokonać analizy porównawczej dostępnych na danym obszarze lokalizacji.

## **2. Rozwiązanie problemu lokalizacji na podstawie położenia punktów sieci dystrybucji – metoda środka ciężkości**

Jedną z prostszych w zastosowaniu metod do wspomaganie decyzji związanych z lokalizacją obiektów związanych z logistyką jest metoda środka ciężkości (Coyle, Bardi i Langlej, 2010). Nie daje ona ostatecznego rozwiązania, ale może być punktem wyjścia do dalszej analizy lokalizacji (Witkowski, 2002). Pozwala decydentowi wyeliminować pewne regiony, by w dalszych krokach skupić się na tych najkorzystniejszych. Metoda ta nie uwzględnia jednak ukształtowania terenu – może się zdarzyć, że wyznaczony punkt lokalizacji znajdzie się w trudno dostępnym dla transportu obszarze (park narodowy, pasmo górskie itd.).

Rozwiązanie problemu lokalizacji na podstawie położenia punktów sieci dystrybucji opiera się na minimalizacji kosztów transportu dostaw – począwszy od dostawców aż do odbiorców finalnych. Koszty te wyrażane są w tysiącach złotych jako następstwo zastosowania miar zagregowanych do przedstawiania wielkości dostaw. Ponadto, dla uproszczenia modelu, zakłada się, że jednostkowe koszty oraz wielkości przewidywanych przewozów są znane.

Parametrem rozważanego modelu będzie odległość obliczona na podstawie położenia dwóch punktów. Do określenia lokalizacji najczęściej wykorzystuje się współrzędne geograficzne, szerokość i długość geograficzną, wyrażone w stop-

niach, minutach i sekundach kątowych kuli ziemskiej. W rzeczywistości nasza planeta jest geoidą (ma kształt elipsoidy – jeśli pominąć ukształtowanie terenu – czyli w porównaniu do kuli okazuje się spłaszczona). Jednak w praktycznych obliczeniach odległości między lokalizacjami pomija się ten fakt, ponieważ nie wpływa on znacząco na wynik. Szerokość geograficzna, zaczynając od równika, przyjmuje wartości od 0 do 90° N (od ang. *North*, czyli na półkuli północnej) oraz od 0 do 90° S (od angielskiego *South*, czyli na półkuli południowej). Długość geograficzna jest mierzona od południka przechodzącego przez Królewskie Obserwatorium w Greenwich w Wielkiej Brytanii, od 0 do 90° W (od ang. *West*, na zachód) oraz od 0 do 90° E (od ang. *East*, na wschód) (zob. Longley, Goochild, Maguire i Rhind, 2008).

Według przyjętego na świecie standardu WGS84 (NIMA Technical Report TR8350.2, *Department of Defense World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships With Local Geodetic Systems*, 1997) obwód ziemi wzdłuż równika liczy 40 075,704 km, a wzdłuż południków od równika do bieguna północnego – 10 001,966 km. W metodzie środka ciężkości istotną funkcję pełni definicja odległości. Na potrzeby obliczeń odległości między dwoma punktami  $A_i$  i  $A_j$  przyjmujemy następujące, uproszczone<sup>1</sup>, przeliczniki odległości kątowych na kilometry:

$$1^\circ \text{ szerokości geograficznej} = 10\,001,966 \text{ km} / 90^\circ = p_{ij}^s \quad (1)$$

$$1^\circ \text{ długości geograficznej} = 40\,075,704 \text{ km} / 360^\circ \times \cos((y_i + y_j)/2) = p_{ij}^d \quad (2)$$

gdzie:

- $p_{ij}^s$  – przelicznik 1° szerokości geograficznej, wyrażonej w stopniach kątowych, na kilometry, do pomiaru odległości między punktami  $A_i$  i  $A_j$ ;
- $p_{ij}^d$  – przelicznik 1° długości geograficznej, wyrażonej w stopniach kątowych, na kilometry;
- $(x_i, y_i)$  – współrzędne geograficzne punktu  $A_i$  (zapisane w kolejności: długość geograficzna, szerokość geograficzna)<sup>3</sup>, do pomiaru odległości między punktami  $A_i$  i  $A_j$ ;
- $(x_j, y_j)$  – współrzędne geograficzne punktu  $A_j$  (zapisane w kolejności: długość geograficzna, szerokość geograficzna);
- $\cos((y_i + y_j)/2)$  – cosinus średniej szerokości geograficznej punktów  $A_i$  i  $A_j$ .

1 Na potrzeby kartografii i geodezji stosuje się dokładniejsze przeliczenia współrzędnych geograficznych na geodezyjne (w układzie kartezjańskim, na płaszczyźnie) uwzględniające elipsoidalny kształt globu ziemskiego (Jaworski, Zdunek i Świątek, 2015).

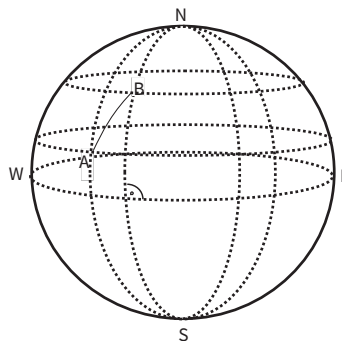
2 Funkcja  $\cos()$  we wzorze na  $p_{ij}^d$  ma za zadanie skorygować obwód równika do obwodu odpowiedniego równoleżnika położonego, dla uproszczenia, pomiędzy równoleżnikami – znajdują się na nich punkty, dla których wyznacza się odległość. Prowadząc obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym Microsoft Excel, należy pamiętać, że funkcja =COS() w Excelu wymaga podania kąta w radianach, dlatego trzeba dokonać przeliczenia stopni na radiany za pomocą funkcji =RADIANY().

3 Kolejność zapisu współrzędnych w układzie kartezjańskim  $(x, y)$  odpowiada współrzędnym geograficznym zapisanym w kolejności: długość geograficzna, szerokość geograficzna.

Ze względów praktycznych, przeliczając odległości ze stopni kątowych na kilometry, można się posługiwać zapisem dziesiętnym dla stopni współrzędnych geograficznych. Zapis współrzędnych geograficznych, np. dla miasta Łódź, w stopniach i minutach jako: szerokość geograficzna:  $51^{\circ}45' N$  i długość geograficzna:  $19^{\circ}28' E$ , można również przedstawić w postaci stopni dziesiętnych jako: szerokość:  $51.7500000^{\circ}$  i długość:  $19.4666700^{\circ}$  – co znacznie ułatwia przeliczanie odległości na kilometry. W zapisie dziesiętnym pomija się oznaczenie półkul, ponieważ dla punktów na półkulach południowej (S) i zachodniej (W) współrzędne zapisuje się z ujemnym znakiem, np. współrzędne w stopniach, minutach i sekundach kątowych  $25^{\circ}35'26.0''S$ ;  $54^{\circ}35'31.4''W$  można przedstawić w kątowych stopniach dziesiętnych jako:  $-25.590556^{\circ}$ ;  $-54.592056^{\circ}$ .

Należy zwrócić uwagę na kolejność zapisu. Współrzędne geograficzne przedstawia się zwykle, dla potrzeb lokalizacyjnych na mapach, w kolejności: szerokość (północ–południe), długość (wschód–zachód). Natomiast w układzie kartezjańskim współrzędne punktów zwyczajowo zapisuje się w kolejności  $x$  (odcięta, na osi poziomej),  $y$  (rzędna, na osi pionowej). Zatem przy przeliczaniu współrzędnych trzeba pamiętać, że kolejność współrzędnych jest odwrotna niż podpowiada intuicja. Pierwsza współrzędna geograficzna, szerokość, będzie odpowiadała współrzędnym  $y$  w układzie kartezjańskim. Drugą, długość, utożsamić możemy z osią  $x$ . W tej pracy przyjęto, że symbol  $x$  odnosi się do długości geograficznej, zaś symbol  $y$  do szerokości.

Na rysunku 1 zwizualizowano, dlaczego przelicznik stopni długości geograficznej zależy od stopnia szerokości geograficznej. Im dalej od równika, tym obwód wzdłuż równoleżnika jest mniejszy, a zatem przelicznik stopni długości się zmniejsza. Wzory (1) i (2) są poprawne przy założeniu, że nasza planeta to kula, a nie elipsoida. Jednak, na potrzeby wyznaczania przybliżonej lokalizacji centrum dystrybucyjnego, założenie o kulistości naszego globu nie zmienia istotnie wyników.

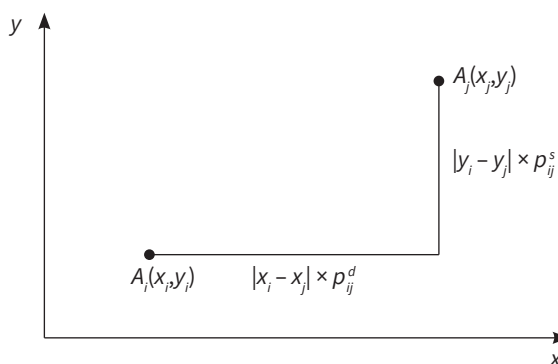


**Rys. 1.** Wizualizacja pomiaru odległości za pomocą współrzędnych geograficznych z uwzględnieniem kształtu globu ziemskiego

**Źródło:** opracowanie własne.

Wyznaczanie odległości, w przypadku problemu lokalizacji, odbywa się za pomocą metryki prostokątnej i euklidesowej, w których położenie punktów określone zostaje w układzie współrzędnych zachowujących położenie geograficzne wybranych obiektów.

W metryce prostokątnej (miejskiej) odległość jest sumą odległości horyzontalnej i pionowej (zob. rysunek 2). Niestety, pomimo wygody obliczeń, wyniki uzyskiwane za jej pomocą nie zawsze odpowiadają rzeczywistemu poczuciu odległości bardziej oddalonych od siebie punktów. Metryka ta sprawdza się dla tych blisko położonych, gdzie ukształtowanie terenu lub zabudowa uniemożliwiają poruszanie się najkrótszą drogą.



**Rys. 2.** Odległość według metryki prostokątnej (miejskiej)

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie Krawczyk, 2001.

Odległość prostokątną między punktami  $A_i$  oraz  $A_j$  obliczamy zgodnie ze wzorem (3):

$$d_{ij}^p = |x_i - x_j| \times p_{ij}^d + |y_i - y_j| \times p_{ij}^s \quad (3)$$

gdzie:

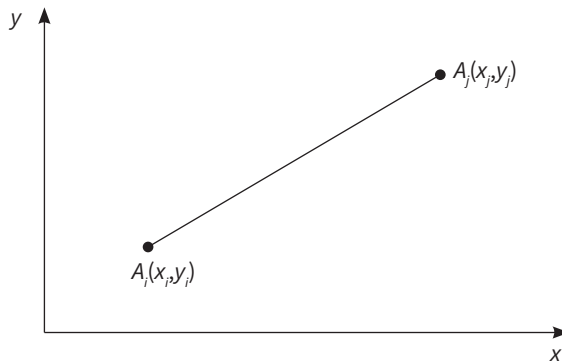
- $(x_i, y_i)$  – współrzędne geograficzne punktu  $A_i$  (zapisane w kolejności: długość geograficzna, szerokość geograficzna);
- $(x_j, y_j)$  – współrzędne geograficzne punktu  $A_j$  (zapisane w kolejności: długość geograficzna, szerokość geograficzna);
- $p_{ij}^s$  – przelicznik szerokości geograficznej na kilometry; zob. wzór (1);
- $p_{ij}^d$  – przelicznik długości geograficznej na kilometry; zob. wzór (2).

W tym miejscu warto wspomnieć, że alternatywą dla stosowania współrzędnych geograficznych w stopniach kątowych są współrzędne podawane



w metrach<sup>4</sup>, w układzie geodezyjnym 1992 według polskiego standardu (Pażus, 2015). Przeliczniki  $p_{ij}^s$  i  $p_{ij}^d$  we wzorach można wówczas pominąć. Minusem tego podejścia jest ograniczenie zakresu badanych lokalizacji tylko do granic Polski.

Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa to przestrzeń najlepiej znana nam intuicyjnie, ponieważ w niej żyjemy i jej cech uczymy się w życiu i w szkole (zob. rysunek 3). Na przykład, w przestrzeni euklidesowej suma kątów w trójkącie wynosi 180°, a proste równoległe się nie przecinają. Metryka euklidesowa często nazywana jest samolotową, gdyż to najkrótsza droga między dwoma punktami, na którą nie ma wpływu ukształtowanie terenu. Wyznaczanie odległości euklidesowej jest właściwe dla bardzo odległych punktów.



**Rys. 3.** Odległość według metryki euklidesowej (samolotowej)

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie Krawczyk, 2001.

Obliczamy ją zgodnie ze worem (4):

$$d_{ij}^e = \sqrt{((x_i - x_j) \times p_{ij}^d)^2 + ((y_i - y_j) \times p_{ij}^s)^2} \quad (4)$$

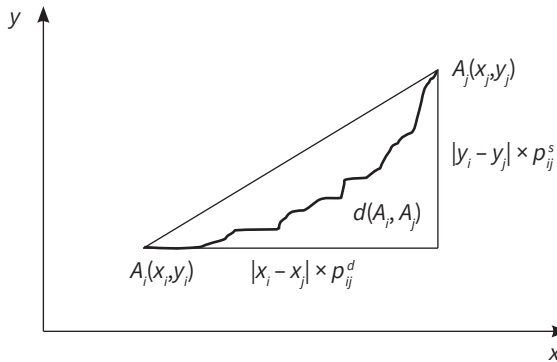
gdzie:

- $(x_i, y_i)$  – współrzędne geograficzne punktu  $A_i$ ,
- $(x_j, y_j)$  – współrzędne geograficzne punktu  $A_j$ ,
- $p_{ij}^s$  – przelicznik na kilometry szerokości geograficznej: zob. wzór (1),
- $p_{ij}^d$  – przelicznik na kilometry długości geograficznej: zob. wzór (2).

<sup>4</sup> Więcej informacji na temat układu 1992 – zob. <https://geoforum.pl/gis/odwzorowania> (dostęp: 02.04.2020). Układ ten jest obecnie powszechnie stosowany w geodezji na terenie Polski, w szczególności przez Główny Urząd Geodezji i Kartografii ([geoportal.gov.pl](http://geoportal.gov.pl)) dla map w skali poniżej 1:10000. Przykładowo, współrzędne dla Łodzi w układzie 1992 według polskiego standardu to: 433220, 531946 – zob. <https://mapa.szukacz.pl/> (dostęp: 02.04.2020).



Analiza porównawcza tych dwóch metryk (prostokątnej i euklidesowej) pełni istotną funkcję przy szacowaniu błędów wynikających ze stosowania tylko jednej metryki, np. euklidesowej. Rysunek 4 w przejrzysty sposób przedstawia ideę oszacowania błędów – zilustrowano na nim różnicę między rzeczywistą długością trasy, oznaczoną symbolem  $d(A_i, A_j)$ , a odległościami w metryce euklidesowej ( $d_{ij}^e$ ) i metryce prostokątnej ( $d_{ij}^p$ ).



**Rys. 4.** Odległości euklidesowa, prostokątna i rzeczywista między dwoma punktami

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie Krawczyk, 2001.

W rzeczywistości interesujące nas obiekty występują w różnych odległościach od siebie. Na ogół, na średnich dystansach (np. w ramach danego kraju, regionu), spełniona jest nierówność mówiąca o tym, że faktyczna długość trasy mieści się w przedziale między długością obliczoną za pomocą metryki euklidesowej a długością obliczoną według metryki prostokątnej.

$$d_{ij}^e \leq d(A_i, A_j) \leq d_{ij}^p \tag{5}$$

gdzie:

- $d_{ij}^e$  – odległość mierzona metryką euklidesową,
- $d(A_i, A_j)$  – rzeczywista odległość pomiędzy punktami  $A_i$  i  $A_j$ ,
- $d_{ij}^p$  – odległość mierzona metryką prostokątną.

Warto w tym miejscu zaznaczyć, że do wyznaczenia odległości można podejść inaczej. Niekoniecznie musi to być odległość geograficzna, ale np. czas przejazdu między punktami, co znajduje uzasadnienie w związku z dostępnością infrastruktury drogowej. W tym miejscu skupiono się na odległości geograficznej, natomiast alternatywne podejście może być istotnym kryterium w metodzie AHP, prezentowanej w dalszej części rozdziału.

Do wyznaczenia lokalizacji metodą środka ciężkości przyjęto następujące założenia:

- 1) znana jest lokalizacja geograficzna dostawców  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  i odbiorców  $B_j(x_j, y_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;
- 2) znane są przewidywane dostawy  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  od dostawców do planowanego nowego miejsca  $M(x_0, y_0)$  oraz zapotrzebowanie odbiorców  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , w analizowanym okresie;
- 3) znane są także jednostkowe, kalkulacyjne koszty przewozu  $k_{i0}$  od dostawców do nowego miejsca oraz  $k_{0j}$  z nowego miejsca do odbiorców.

Celem analizy jest znalezienie takiej lokalizacji nowego miejsca  $M(x_0, y_0)$ , dla której łączne koszty przewozu są jak najmniejsze. W przyjętym modelu będzie poszukiwana jak najmniejsza wartość funkcji kosztów, mającej postać:

$$K(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^m (a_i \times k_{i0} \times d_{i0}) + \sum_{j=1}^n (b_j \times k_{0j} \times d_{0j}) \quad (6)$$

gdzie:

- $d_{i0}$ ,  $d_{0j}$  – odległość pomiędzy dostawcą  $A_i(x_i, y_i)$  lub odbiorcą  $B_j(x_j, y_j)$  a planowaną lokalizacją centrum dystrybucyjnego  $M(x_0, y_0)$ , mierzona metryką prostokątną lub euklidesową;
- $a_i$  – przewidywane dostawy od dostawców do planowanego miejsca  $M$ ;
- $b_j$  – przewidywane zapotrzebowanie odbiorców;
- $k_{i0}$  – jednostkowy, kalkulacyjny koszt przewozu od dostawców;
- $k_{0j}$  – jednostkowy, kalkulacyjny koszt przewozu do odbiorców.

## 2.1. Wyznaczanie lokalizacji za pomocą metryki prostokątnej

Wyznaczenie odległości  $d_{i0}^p$  i  $d_{0j}^p$  pomiędzy dostawcą  $A_i$  a planowanym obiektem  $M$ , a także między tym obiektem a odbiorcą  $B_j$ :

$$d_{i0}^p = |x_i - x_0| \times p_{i0}^d + |y_i - y_0| \times p_{i0}^s \quad (7)$$

$$d_{0j}^p = |x_0 - x_j| \times p_{0j}^d + |y_0 - y_j| \times p_{0j}^s \quad (8)$$

gdzie:

- $(x_i, y_i)$  – współrzędne geograficzne dostawcy,
- $(x_0, y_0)$  – współrzędne geograficzne planowanego centrum dystrybucyjnego  $M$ ,
- $(x_j, y_j)$  – współrzędne geograficzne odbiorcy.

Procedura wyznaczania współrzędnych lokalizacji nowego obiektu produkcyjnego jest analogiczna w przypadku obu współrzędnych  $(x_0, y_0)$  – i przebiega niezależnie dla każdej z nich.

**Algorytm****Krok 1**

Zarówno dla każdego dostawcy ( $A_i$ ), jak i odbiorcy ( $B_j$ ) obliczamy koszty przewozu:

$$v_i = a_i \times k_{i0} ; i = 1, \dots, m \quad (9)$$

$$v_j = b_j \times k_{0j} ; j = 1, \dots, n \quad (10)$$

gdzie: wszystkie oznaczenia jak we wzorze (6).

**Krok 2**

Obliczamy łączny koszt przewozu:

$$V = \sum_{i=1}^m (a_i \times k_{i0}) + \sum_{j=1}^n (b_j \times k_{0j}) = \sum_{i=1}^m v_i + \sum_{j=1}^n v_j \quad (11)$$

**Krok 3**

Sortujemy rosnąco współrzędne  $x_i$  i  $x_j$ , grupując je w jeden ciąg  $x_r$ , gdzie  $r = 1, \dots, m + n$ . Analogicznie postępujemy ze współrzędnymi  $y_i$  i  $y_j$ , grupując je w jeden ciąg  $y_s$ , gdzie  $s = 1, \dots, m + n$ .

**Krok 4**

Obliczamy:

$$V_0 = \frac{V}{2} \quad (12)$$

gdzie:  $V$  – zob. wzór (11)

**Krok 5**

Dysponując nowo utworzonymi ciągami  $x_r$  i  $y_s$ , tworzymy odpowiadające im ciągi  $v_r^x$  i  $v_s^y$ , a następnie szereg skumulowany  $V_r^x$  i  $V_s^y$ :

$$V_1^x = v_1^x \quad (13)$$

$$V_2^x = v_1^x + v_2^x \quad (14)$$

...

$$V_r^x = v_1^x + v_2^x + \dots + v_r^x \quad (15)$$

Analogicznie postępujemy dla  $V_s^y$ , który odpowiada ciągowi  $y_s$ .

**Krok 6**

Porównujemy odpowiadające sobie wartości szeregu skumulowanego  $V_r^x$  z  $V_0$ , a następnie poszukujemy takiego  $V_k^x$ , dla którego spełniony jest następujący warunek:

$$V_k^x \leq V_0 \leq V_{k+1}^x \quad (16)$$

Po znalezieniu takiego  $x_k$ , któremu odpowiada wartość  $V_k^x$  przyjmujemy ją jako  $x_0$ . W przypadku rozpatrywania szeregu skumulowanego  $V_s^y$  postępujemy analogicznie, poszukując wartości  $y_i$  i odpowiadającej jej wartości  $V_i^y$ .

Wyznaczenie kosztu przewozu zgodnie ze wzorem (17)

$$K = \sum_{i=1}^m (a_i \times k_{i0} \times d_{i0}^p) + \sum_{j=1}^n (b_j \times k_{0j} \times d_{0j}^p) \tag{17}$$

gdzie: wszystkie oznaczenia jak we wzorach (6)–(8).

### Przykład 1

**Tab. 1.** Dane i obliczenia potrzebne do wyznaczenia łącznego kosztu przewozu

Siedziba dostawcy (odbiorcy)	Symbol dostawcy (odbiorcy) $A_i (B_j)$	Szerokość geogr.	Długość geogr.	Szerokość geogr. (w stopniach dziesiętnych)	Długość geogr. (w stopniach dziesiętnych)	Wielkość przewozu	Koszt jednostkowy przewozu (zł)	$v_i (v_j)$
		współrzędne według WGS 84		$y$	$x$			
Łódź	$A_1$	51°45'N	19°28'E	51,75000	19,46667	27 000	2,30	62 100
Toruń	$A_2$	53°00'49"N	18°35'53"E	53,01375	18,59814	3 500	2,10	7 350
Warszawa	$A_3$	52°13'47"N	21°00'42"E	52,22977	21,01178	36 000	2,25	81 000
Katowice	$B_1$	50°15'30"N	19°01'39"E	50,25841	19,02754	6 500	2,13	13 845
Poznań	$B_2$	52°24'24"N	16°55'47"E	52,40692	16,92993	7 000	2,00	14 000
Wrocław	$B_3$	51°06'00"N	17°01'59"E	51,10000	17,03333	4 500	2,21	9 945
<b>V</b>								<b>188 240</b>

Źródło: opracowanie własne.

$$V_0 = 188\ 240 / 2 = 94\ 120$$

Następnie obliczamy sumy częściowe dla uporządkowanego ciągu wartości  $v_i$  i sprawdzamy dla jakiej współrzędnej zachodzi nierówność ze wzoru (16).