Ekonomia

Optymalizacja w logistyce

tom 1

Modelowanie logistycznych procesów decyzyjnych

Iwona Konarzewska, Maciej Jewczak, Adam Kucharski
redakcja naukowa Iwona Konarzewska

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU ŁÓDZKIEGO

Optymalizacja w logistyce

tom 1

Modelowanie logistycznych procesów decyzyjnych

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Ekonomia

Optymalizacja w logistyce

tom 1

Modelowanie logistycznych procesów decyzyjnych

Iwona Konarzewska, Maciej Jewczak, Adam Kucharski
redakcja naukowa Iwona Konarzewska

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Łódź 2020

Iwona Konarzewska, Maciej Jewczak, Adam Kucharski – Uniwersytet Łódzki
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Instytut Logistyki i Informatyki
Katedra Badań Operacyjnych, 90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 37

RECENZENT
Józef Stawicki

REDAKTOR INICJUJĄCY
Beata Koźniewska

REDAKTOR NAUKOWY
Iwona Konarzewska

OPRACOWANIE REDAKCYJNE
Anna Dziadzio

SKŁAD I ŁAMANIE
Munda – Maciej Torz

KOREKTA TECHNICZNA
Leonora Gralka

PROJEKT OKŁADKI
Agencja Reklamowa efectoro.pl
Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/Peshkova

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.09912.20.0.K

Ark. wyd. 13,5; ark. druk. 17,75

ISBN 978-83-8220-112-3
e-ISBN 978-83-8220-113-0

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. 42 665 58 63

Spis treści

Wprowadzenie

Termin „logistyka” obejmuje procesy systemowego planowania i zarządzania łańcuchem dostaw, przepływem produktów oraz informacji. Procesy te mają miejsce zarówno w przypadku wielkich korporacji, jak i małych przedsiębiorstw. Ważną funkcję w logistyce pełni podejmowanie decyzji, które przynoszą danemu podmiotowi maksymalne korzyści, ewentualnie – jak najmniejsze straty. Oczywiście powyższa próba definicji nie obejmuje wszystkich aspektów podejmowania decyzji w procesach logistycznych.

W logistyce wyróżnia się:

- logistykę zaopatrzenia – gdzie lokalizuje się źródła zaopatrzenia, zaopatruje przedsiębiorstwo w niezbędne do produkcji materiały, negocjuje ceny materiałów, kontroluje jakość dostaw, optymalizuje zapasy surowców;
- logistykę dystrybucji – obejmującą planowanie i kontrolę dystrybucji produktów i usług przedsiębiorstwa, utrzymywanie zapasów wyrobów gotowych, lokalizowanie magazynów dystrybucyjnych, organizowanie kanałów dystrybucyjnych, optymalizację dróg transportowych;
- logistykę serwisu – obejmującą zaopatrzenie nabywców w części zamienne oraz obsługę zwrotów towarowych;
- logistykę produkcji – obejmującą planowanie i kontrolę przebiegu produkcji, optymalizację zużycia materiałów oraz odległości przemieszczania się materiałów w procesie produkcji (ten dział logistyki wymaga także przewidywania wielkości popytu na towary i usługi);
- logistykę magazynową – obejmującą magazynowanie części, surowców oraz gotowych produktów;
- logistykę kontraktową – obejmującą operacje prowadzone na powierzchni magazynowej, w tym: przepływy towarów w magazynie, bieżące monitorowanie poziomu stanów magazynowych, zarządzanie towarami, pracą magazynierów i kompletacją dostaw;
- ekologistykę – zajmującą się gromadzeniem, transportem oraz utylizacją odpadów szkodliwych dla środowiska;
- e-logistykę – działania logistyczne związane z wykorzystaniem Internetu oraz systemów informatycznych.

Ze względu na zasięg oddziaływania decyzje logistyczne mogą dotyczyć zarówno pojedynczego przedsiębiorstwa, jak i całego świata. Wyodrębnia się także logistykę społeczną, obejmującą wpływ sieci społecznych oraz przepływów materialnych i informacyjnych na kształtowanie decyzji o charakterze społecznym.

Każdy wymieniony dział logistyki wymaga podejmowania decyzji. Decydenci starają się dokonywać optymalnych i racjonalnych wyborów, poszukując narzędzi wspomagających wszelkie postanowienia. Występujące w logistyce procesy decyzyjne często pokrywają się z tymi, które modelowane są przy pomocy metod badań operacyjnych.

Celem niniejszego tomu jest przybliżenie czytelnikowi metod optymalizacyjnych znajdujących zastosowanie w logistyce (wraz z przykładami) oraz najnowszych wyników badań z tego zakresu.

Rozdział pierwszy obejmuje szeroko rozumiane modelowanie zagadnień logistycznych za pomocą modeli programowania liniowego. Przedstawione zostały w nim metody optymalizacji zagadnień liniowych – zarówno klasyczne (np. metoda *simplex*), jak i ich modyfikacje (metoda dualna czy zrewidowana), często przyspieszające uzyskanie rozwiązania optymalnego. Autorzy starali się zaprezentować te metody w sposób spójny, na podstawie prostych przykładów, a także podkreślić ich ogromny walor, jakim jest możliwość analizy wrażliwości rozwiązań w przypadku niepewności odnośnie parametrów modeli. Parametrami są najczęściej oszacowania czy też prognozy cen lub kosztów, obarczone błędami przewidywań. Ponadto przedstawiono najważniejsze aspekty związane z żądaniem, aby rozwiązania stawianych zadań były całkowitoliczbowe oraz wskazano, jakie komplikacje powodują tak postawione zadania. Zaprezentowano sposób modelowego opisu i rozwiązania problemu parametryzacji funkcji kryterium: uzależnienia wartości współczynników od zadanego, istotnego – z punktu widzenia zastosowań – parametru (np. wielkości marży). Podkreślono również konsekwencje takiego wpływu dla optymalnego rozwiązania postawionego zadania.

Rozdział drugi dotyczy problemów przydziału, tj. sytuacji decyzyjnych pojawiających się w przedsiębiorstwach i innych organizacjach, a dotyczących przyporządkowania zadań do pracowników czy też maszyn oraz typów pojazdów do wykonania konkretnych zadań przewozowych. Klasyczny problem przydziału jest problemem liniowym ze zmiennymi zero-jedynkowymi. Stąd w niniejszej pracy przedstawiony został klasyczny algorytm przydziału, znany jako algorytm węgierski, z kryterium minimalizacji kosztów oraz pewnymi modyfikacjami, dotyczącymi zmiany kierunku optymalizacji (maksymalizacja wielkości sprzedaży, maksymalizacja zysku) i blokowania pewnych przyporządkowań. W rozdziale zaprezentowano również propozycje postępowania w przypadku niezbilansowania zadania oraz uogólnienia problemu. Uogólniony problem przydziału uwzględnia, przykładowo, sytuacje, kiedy każde zadanie musi zostać przydzielone dokładnie jednemu wykonawcy, natomiast każdemu wykonawcy można przydzielić więcej zadań niż jedno, w zależności od wielkości zasobu, którym dysponuje (np. czas pracy). Z kolei kwadratowe zadanie przydziału jako cel stawia dokonanie przydziału w taki sposób, aby zminimalizować sumę iloczynów przepływu towarów i odległości między obiektami.

Rozdział trzeci omawia w sposób dość szczegółowy problemy związane z planowaniem sieciowym i zarządzaniem projektami. Zaprezentowano w nim metody konstrukcji sieci powiązań czynności przy realizacji złożonych projektów, problemy związane z ich harmonogramowaniem oraz planowaniem kosztów wykonania. Przedstawiono metody deterministyczne, jak np. metodę wyznaczania ścieżki krytycznej CPM czy też metodę PERT, uwzględniającą losowość czasów wykonania czynności; wzięto pod uwagę także dodatkowo koszty wykonywania czynności – stąd prezentacja metody LESS oraz PERT-COST. Na przykładach omówiono, w jaki sposób wykorzystać modelowanie liniowe do uzyskiwania optymalnych harmonogramów dla czynności składających się na projekt w obu przypadkach.

Rozdział czwarty poświęcony został teoretycznym aspektom teorii masowej obsługi (teorii kolejek). Sprawność obsługi klienta, np. przez sklep internetowy, jest ważnym narzędziem w walce konkurencyjnej, przyczyniającym się do podjęcia ostatecznej decyzji, m.in. przy wyborze dostawcy. Inne jej zastosowania w logistyce to, chociażby, kolejkowanie zleceń produkcyjnych oczekujących na realizację czy zamówień na części składowane w magazynie, a także pojazdów, które mają zostać załadowane lub rozładowane. Teoria masowej obsługi pomaga określić potencjał stanowiska pracy, poziom jego efektywności; pokazuje, jakie działania należy wdrożyć, aby zwiększyć satysfakcję uczestników systemu obsługi. W rozdziale przedstawione i omówione zostały także najważniejsze stosowane w zagadnieniach logistycznych modele oraz ich własności.

W rozdziale piątym, obok elementów teorii popytu, zaprezentowano wybrane metody prognozowania, w tym metody wygładzania wykładniczego dla danych o niskiej i średniej zmienności. Scharakteryzowano mierniki jakości prognoz, problemy błędów prognozowania oraz kryteria wyboru odpowiednich metod prognozowania.

Tom uzupełniony został o dodatki, w tym dodatek zawierający omówienie doświadczeń Autorów w zakresie modelowania optymalizacyjnego z użyciem pakietów środowiska oprogramowania *R* oraz wybrane elementy teorii prawdopodobieństwa.

Przedstawiony w niniejszym tomie zestaw metod i przykładów gromadzi w jednej pozycji szerokie spektrum narzędzi pozwalających przeprowadzić optymalizację elementów łańcucha logistycznego. Znajdziemy w nim omówienie modeli rzadko spotykanych w ogólnodostępnej literaturze – łącznie z zaprezentowaniem przykładów ich zastosowań w logistyce. Autorzy dokonali starań, aby język pracy był jednocześnie precyzyjny (matematycznie) i przystępny. W przygotowywanym tomie drugim monografii, zatytułowanym *Optymalizacja w logistyce. Modelowanie przepływów w kanałach dystrybucji,* znajdziemy m.in. omówienie problemów modelowania zapasów, optymalizacji w szeroko rozumianych zagadnieniach transportowych, problemów szeregowania zleceń czy też optymalizacji przepływów produkcyjnych.

Iwona Konarzewska

Rozdział I
Liniowa optymalizacja zagadnień logistycznych

1. Poszukiwanie decyzji optymalnej

Prowadzenie działalności gospodarczej wymaga podejmowania decyzji. Aby były one racjonalne, muszą opierać się na solidnych podstawach, m.in. na jasno sprecyzowanym celu i znajomości środków koniecznych do jego realizacji. Ponadto funkcjonowanie na konkurencyjnym rynku oznacza konieczność brania pod uwagę wpływu otoczenia na decyzje. Te zaś, w dzisiejszych czasach, podejmuje się coraz szybciej. Menedżera obciąża przy tym odpowiedzialność – gdyż albo nie może on cofnąć swoich działań, albo wiązałoby się to z poniesieniem dużych kosztów. Dlatego tak ważna staje się precyzja i wybór decyzji (spośród wielu innych możliwych w danych warunkach) optymalnej lub chociaż zadowalająco bliskiej optymalności. Tym właśnie zajmują się badania operacyjne. Obszar ich zastosowań obejmuje sporządzanie matematycznych, ekonomicznych i statystycznych opisów (modeli) procesów decyzyjnych, charakteryzujących się dużą złożonością (i często niepewnością). Takie opisy umożliwiają precyzyjne analizowanie złożonych procesów decyzyjnych i ułatwiają podjęcie najlepszej decyzji (Miszczyński i Miszczyńska, 2002).

Logistyka dostarcza wielu danych o ilościowym charakterze, które dają się ująć w ramy metod matematycznych i statystycznych. Może to być koordynacja przepływu zasobów w łańcuchu dostaw, realizacja zadań transportowych czy zarządzanie zapasami. Pojawiające się w logistyce problemy decyzyjne często pokrywają się z tymi, jakie występują w ramach badań operacyjnych. Jednym z nich jest poszukiwanie decyzji optymalnej przy znanym kryterium wyboru oraz otoczeniu opisanym formułami matematycznymi.

Początki badań operacyjnych sięgają II wojny światowej, choć różni autorzy podają odmienne wydarzenia jako moment narodzin tej dziedziny nauki. Wymienia się m.in. budowę statków transportowych typu Liberty, podczas której naukowe podejście do usprawniania produkcji silnie wykazało swoją przydatność. Powstające maszyny charakteryzowały się znacznie skróconym czasem budowy oraz zmniejszonym zużyciem surowców w porównaniu z początkowym okresem wprowadzania ich do służby – była to zasługa czynionych na bieżąco analiz naukowych.

II wojna światowa okazała się konfliktem, w czasie którego nauka rozwijała się szybko i na wielu płaszczyznach. Naukowcy pracujący na potrzeby projektów wojskowych, realizowanych w USA i Wielkiej Brytanii, mieli za zadanie zadbać o efektywną alokację zasobów na potrzeby operacji wojskowych oraz rozwijać nowe rodzaje broni. Ich badania wiązały się z różnego rodzaju operacjami militarnymi. Stąd wzięła się nazwa, która przetrwała do dziś, mimo że obecnie badania operacyjne znajdują szerokie zastosowanie również (a może przede wszystkim) poza wojskowością.

Boom gospodarczy, jaki pojawił się w USA po zakończeniu wojny, sprawił, że zapotrzebowanie na opracowane dopiero co metody wzrosło. Produkcja przemysłowa stawała się coraz bardziej złożona i wyspecjalizowana, rosła skala działań logistycznych. Klasyczne podejście do zarządzania, opierające się na osobistym doświadczeniu menedżera, przestało wystarczać. Problemy, przed którymi stanęli menedżerowie były podobne do tych z czasu wojny, choć oczywiście zmienił się kontekst. Pojawił się popyt na metody usprawniające proces podejmowania decyzji. Wielu naukowców po zakończeniu pracy dla armii przeszło do biznesu – przybywały nowe rozwiązania i opracowania naukowe na ten temat. Nie bez znaczenia był tu również szybki rozwój komputerów (i ich upowszechnienie).

Można powiedzieć, że badania operacyjne mają zastosowanie do problemów, w których pojawia się potrzeba przeprowadzenia i koordynowania „operacji" w ramach pewnej organizacji (Hillier i Lieberman, 2015, s. 3). Poziom operacyjny oznacza, że efekty podejmowanych decyzji poznamy w nieodległej przyszłości. Implikuje to bliski związek z zarządzaniem a przynajmniej zmusza do przyjęcia punktu widzenia konkretnej organizacji. Z tego powodu badania operacyjne postrzegane są też jako część mikroekonomii. Gdyby przejrzeć katalog dostępnych metod, przekonalibyśmy się o szerokim spektrum zastosowań tego typu badań. Zaliczymy do nich nie tylko produkcję przemysłową, ale również finanse, transport (i ogólnie logistykę), ochronę zdrowia, telekomunikację i wiele innych.

Konieczność podejmowania decyzji wiąże się z wystąpieniem problemu decyzyjnego i wyborem takiej decyzji, która doprowadzi do najlepszego w danych warunkach sposobu działania, zmierzającego do osiągnięcia postawionego celu (Rogalska i inni, 1991, s. 9). Z problemem decyzyjnym mamy do czynienia wtedy, kiedy zachodzą następujące okoliczności:

- pojawia się decydent (osoba lub grupa osób), który musi rozwiązać problem;
- decydent chce osiągnąć jakiś cel;
- istnieją co najmniej dwa sposoby na osiągnięcie zakładanego celu;
- istnieje otoczenie, które wpływa na sposób rozwiązania problemu lub jego wynik.

Sam problem decyzyjny przedstawia się w sposób symboliczny, jako model, który przybiera jedną z trzech postaci:

1) ikoniczną (obrazową) – przedstawiającą przedmioty lub zdarzenia w zmienionej skali (np. mapa);
2) analogową – przedstawiającą właściwości badanego zjawiska za pomocą własności innych zjawisk;
3) symboliczną (matematyczną) – opisującą zjawisko za pomocą zależności matematycznych (równań lub nierówności).

Biorąc pod uwagę ostatnią z wymienionych postaci, wyróżnimy następujące etapy poszukiwania rozwiązania: sformułowanie problemu decyzyjnego, wybór postaci modelu, zebranie potrzebnych danych, budowa modelu i jego rozwiązanie, weryfikacja wyników, wdrożenie decyzji wskazanych przez model. Proces podejmowania decyzji może zostać wsparty przez odpowiednio skonstruowane modele matematyczne, zwane modelami decyzyjnymi. Zazwyczaj znajdujemy się w sytuacji, w której należy dokonać wyboru pomiędzy wieloma możliwymi decyzjami, zwanymi decyzjami dopuszczalnymi.

W przeciwieństwie do podręcznikowych przykładów, większość praktycznych problemów jest przez decydentów początkowo opisywana w niezbyt precyzyjny, słabo sformalizowany sposób. Rzadko bowiem menedżer osobiście zajmuje się budową modelu. Dlatego to analityk (lub inna osoba odpowiedzialna za tę pracę) musi uściślić elementy składowe. Na początku ustala on przesłanki, na podstawie których oceniane będą decyzje. Zakładamy bowiem, że decydent posługuje się pewnym kryterium, pozwalającym mu odróżnić decyzje lepsze od gorszych, i że kryterium to da się przedstawić w postaci funkcji, zwanej funkcją celu. Zupełnie normalne jest więc to, że dwóch różnych decydentów będzie mieć odmienne kryteria oceny tych samych działań.

Kiedy już znamy kryterium wyboru, przechodzimy do ustalenia listy zmiennych sterowanych (decyzyjnych) oraz niesterowanych (parametrów) i określenia warunków, jakie powinna spełniać podjęta decyzja. Na koniec analityk musi przełożyć zebrane informacje na matematyczną wersję modelu. Pomocne w tym będzie programowanie matematyczne zajmujące się tworzeniem algorytmów rozwiązywania określonych klas problemów optymalizacyjnych (Sikora i inni, 2008, s. 10). Słowo „programowanie" nie odnosi się do programowania komputerowego – jest raczej synonimem planowania.

Metody ilościowe wymagają danych do przeprowadzania obliczeń. W przypadku modeli optymalizacyjnych gromadzenie danych liczbowych sprowadza się do poznania wartości określonych parametrów. Na ich podstawie wyznacza się poszukiwane wartości zmiennych decyzyjnych.

Same decyzje podejmowane mogą być w różnych warunkach. W sytuacji pewności każdej decyzji odpowiada tylko jeden wynik z prawdopodobieństwem równym 1. Powiemy wtedy, że proces jest zdeterminowany a parametry modelu są znane i stałe. W warunkach niepewności każdej decyzji odpowiada więcej niż jeden wynik (mówimy, że jest to element stochastyczny). Nie znamy jednak prawdopodobieństwa, z jakim dany wynik może wystąpić. Parametry przyjmują bowiem różne wartości, w zależności od zachowania otoczenia. Z kolei podczas podejmowania decyzji w warunkach ryzyka znamy prawdopodobieństwa powyższych wyników. Wyróżnia się tu ponadto podejmowanie decyzji w warunkach częściowej informacji – każdej decyzji nadal odpowiada więcej niż jeden wynik. Nie znamy co prawda prawdopodobieństwa jego wystąpienia, ale możemy je oszacować dzięki znajomości niektórych charakterystyk nieznanego rozkładu prawdopodobieństwa.

W ramach naszych rozważań posługiwać się będziemy określoną terminologią o matematycznym charakterze. I tak, zbiór (mierzalnych) decyzji do podjęcia reprezentowany będzie przez zmienne decyzyjne. To właśnie ich wartości poszukujemy. Efekty podjętych działań wyraża funkcja kryterium (funkcja celu) określona na wspomnianych zmiennych. Wszelkie ograniczenia wartości, które można przypisać zmiennym decyzyjnym, są również wyrażane matematycznie – zwykle za pomocą nierówności lub równań zwanych warunkami ograniczającymi lub po prostu ograniczeniami. Stałe liczbowe, występujące w funkcji celu oraz w ograniczeniach, będą parametrami modelu – ich wartości ustala się podczas jego tworzenia. Stajemy więc przed problemem wyboru takich wartości zmiennych decyzyjnych, które zapewnią maksymalną (minimalną) wartość funkcji celu[1], pod warunkiem spełnienia narzuconych ograniczeń.

Klasyfikując modele w najbardziej ogólny sposób, podzielimy je na liniowe i nieliniowe. W naszym opracowaniu skupimy się na modelach liniowych, gdyż posiadają one wiele zalet. Po pierwsze dają szerokie możliwości interpretacji. Po drugie są dobrze zbadane, ponieważ naukowcy zajmują się nimi od kilkudziesięciu lat. Po trzecie część modeli nieliniowych da się sprowadzić (i sprowadza się je) do postaci liniowej. Mimo swojej prostoty, modele liniowe sprawdzają się w zaskakująco wielu obszarach.

Zapisany w formie matematycznej liniowy model decyzyjny przyjmuje postać modelu programowania liniowego. Zarówno funkcja celu, jak i wszystkie ograniczenia wyrażone są przy pomocy funkcji liniowych. Zatem programowanie liniowe (PL) obejmuje planowanie działań w celu uzyskania optymalnego rezultatu, tj. takiego, który zapewnia osiągnięcie założonego celu w najlepszy możliwy sposób (zgodnie z modelem matematycznym), spośród wszystkich alternatyw.

2. Programowanie liniowe

Przeanalizujmy następujący przykład problemu, przed którym może stanąć decydent. Jest to celowo uproszczona sytuacja, ograniczona do najbardziej istotnych – z punktu widzenia procesu decyzyjnego – elementów. Posłuży ona do zilustrowania koncepcji budowy modelu programowania liniowego w dalszej części rozdziału.

1 Domyślnie w tym rozdziale przyjmujemy, że decydent posługuje się pojedynczym kryterium.

Przykład 1

Firma Paralel S.A. wytwarza części do sprzętu gospodarstwa domowego na zamówienie zewnętrznych kontrahentów. Zarząd firmy rozważa podjęcie produkcji filtrów montowanych w dwóch nowych modelach odkurzaczy tego samego producenta. Odbyły się już negocjacje między Paralel S.A. a producentem sprzętu. Wiadomo więc, że filtry do pierwszego modelu sprzedawane będą po siedemdziesiąt złotych za sztukę, a do drugiego – po czterdzieści. Biorąc pod uwagę stan realizacji bieżących zamówień, zarząd Paralel S.A. jest zdecydowany na podjęcie produkcji. Musi jednak określić jej docelową wielkość i strukturę w taki sposób, aby osiągnąć jak największy przychód ze sprzedaży. Kontrahent gwarantuje odbiór każdej liczby wyprodukowanych filtrów pod warunkiem, że powstaną one najpóźniej w ciągu najbliższych sześciu miesięcy. Wtedy bowiem zaplanowano wprowadzenie odkurzaczy do sprzedaży.

Opierając się na doświadczeniach z realizacji wcześniejszych zamówień oraz dysponując dokumentacją techniczną, pracownicy Paralel S.A. oszacowali, że jeden filtr do modelu pierwszego wymaga zużycia dwóch dekagramów tworzywa sztucznego, zaś specjalistyczna maszyna potrzebuje jednej minuty, aby uformować wymagany kształt. Filtr do drugiego modelu powstawać ma z jednego dekagrama tego samego tworzywa; na jego uformowanie potrzeba dwóch minut. Specyficzny proces technologiczny sprawia, że filtry opuszczają linię produkcyjną pojedynczo. Na potrzeby realizacji kontraktu zgromadzono dwieście pięćdziesiąt kilogramów tworzywa – i wielkość ta nie zostanie zwiększona. Dostępny limit czasu pracy maszyn wynosi dwadzieścia tysięcy minut – ze względu na to, że Paralel S.A. ma zobowiązania wynikające z wcześniej podpisanych umów. Każdy z filtrów, niezależnie od modelu, zawiera wkład wykonany z włókniny o masie trzech dekagramów. Aby zapewnić dokładność filtrowania zanieczyszczeń, wymaganą przez zamawiającego, należy zużyć łącznie co najmniej sto pięćdziesiąt kilogramów włókniny.

Rozłóżmy powyższy przykład na elementy składowe problemu decyzyjnego. Decydentem w nim jest zarząd firmy Paralel S.A. Jego celem jest osiągnięcie jak najwyższych przychodów wynikających z podjętej decyzji o produkcji obu rodzajów filtrów. Nie nakładamy przy tym ograniczeń na wielkość produkcji. Zakładamy jedynie, że będzie to liczba nieujemna. Możliwe więc, że najbardziej korzystne okaże się wytwarzanie tylko jednego rodzaju filtra, a być może najlepsze wyniki finansowe zapewni rozłożenie produkcji na oba wyroby.

Jak już jednak wspomnieliśmy, niekoniecznie to sam zarząd układa model. Analityk (lub analitycy) z pewnością zwróciłby (zwróciliby) uwagę na otoczenie wpływające na podejmowanie decyzji. W naszym przykładzie sprowadza się ono do procesu technologicznego, czyli zużycia ograniczonej ilości surowców i wykorzystania dostępnego czasu pracy. W ten sposób wyodrębniliśmy elementy składowe i możemy przejść do budowy modelu matematycznego, a następnie znalezienia jego rozwiązania.

Problem decyzyjny z przykładu 1 posłuży do zilustrowania procesu tworzenia typowego (chociaż niedużych rozmiarów) zadania programowania liniowego. Miejmy jednak na uwadze, że jest to narzędzie zbyt wszechstronne, aby można je było w pełni opisać za pomocą jednego przykładu. Dlatego kolejne elementy i własności będą sukcesywnie dodawane w dalszej części rozdziału.

Każdy model PL spełnia następujące założenia:

- wszystkie parametry modelu, tj. zasoby, ceny, technologie, są znane i z góry ustalone (deterministyczne);
- technologia jest stała, a zatem wymagania produkcyjne, jeżeli problem dotyczy optymalizacji planu produkcji, są ustalone w czasie planowania i nie ulegną zmianie w analizowanym okresie;
- zmienne decyzyjne są zmiennymi ciągłymi i nieujemnymi;
- funkcja kryterium i funkcje definiujące ograniczenia są liniowe – oznacza to, że ten sam, co do wielkości, przyrost zmiennej, bez względu na początkowy poziom, powoduje zawsze taki sam przyrost wartości funkcji (*constant returns to scale*);
- liniowość funkcji kryterium i funkcji definiujących ograniczenia oznacza proporcjonalność i addytywność.

Z matematycznego punktu widzenia wystarczą założenia mówiące, że model musi mieć liniową funkcję celu, podlegającą również liniowym ograniczeniom. Jednak, z punktu widzenia modelowania problemu decyzyjnego, warto sformułować dodatkowe założenia, które są w zasadzie implikowane przez założenia o liniowości funkcji kryterium i ograniczeń, a dotyczą pewnych konsekwencji dla modelowanego problemu.

Wymieniona w ostatnim założeniu proporcjonalność dotyczy zarówno funkcji celu, jak i jej ograniczeń. Efekt wpływu każdej ze zmiennych decyzyjnych na łączną wartość funkcji celu jest proporcjonalny do poziomu tej zmiennej. Podobnie rzecz się ma z wartością lewej strony każdego z ograniczeń. Założenie to wyklucza wykładnik inny niż równy 1 dla dowolnej zmiennej w modelu, niezależnie od tego, czy rozważamy funkcję celu, czy funkcję po lewej stronie ograniczenia. Dodatkowo zakładamy, że każda funkcja w modelu programowania liniowego jest sumą udziałów poszczególnych zmiennych. Nazywamy to warunkiem addytywności.

Przybliżenia i uproszczenia, obecne w powyżej sformułowanych założeniach, są potrzebne, aby w ogóle dało się model zastosować. Dodanie zbyt wielu szczegółów może sprawić, że model będzie zbyt skomplikowany, aby przeprowadzić przydatną analizę problemu. To, czego naprawdę potrzebujemy, to istnienie odpowiednio wysokiej korelacji między wynikami uzyskanymi na podstawie modelu a tym, co faktycznie wydarzy się w rzeczywistości. W realnych zastosowaniach powszechną jest sytuacja, w której niektóre z założeń nie są całkowicie zachowane i musimy pogodzić się z niedużymi odchyleniami. Poważne naruszenie któregoś z założeń oznacza konieczność sięgnięcia po inne, zwykle bardziej skomplikowane metody. Niektóre z nich nie dają takich możliwości analitycznych i interpretacyjnych, jak modele liniowe – choć badacze cały czas pracują nad zmniejszeniem tej różnicy.

Na potrzeby przykładu 1 zdefiniujmy następujące zmienne decyzyjne:

- x_1 – wielkość produkcji filtrów modelu 1 [szt.],
- x_2 – wielkość produkcji filtrów modelu 2 [szt.].

Znając ceny sprzedaży, konstruujemy funkcję przychodu (cel decydenta), której maksymalnej wartości poszukujemy:

$$f(x_1, x_2) = 70x_1 + 40x_2 \to \max \tag{1}$$

Ograniczenia wynikające z procesu technologicznego są opisywane przez nierówności (2)–(4). Dołączamy do nich warunki brzegowe (5), gwarantujące, że żadna ze zmiennych decyzyjnych nie przyjmie wartości ujemnej.

$$\text{(czas [min])} \qquad x_1 + 2x_2 \leq 20\,000 \tag{2}$$

$$\text{(tworzywo [dag])} \qquad 2x_1 + x_2 \leq 25\,000 \tag{3}$$

$$\text{(wkład [dag])} \qquad 3x_1 + 3x_2 \geq 15\,000 \tag{4}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \tag{5}$$

Zapiszmy ogólną postać modelu programowania liniowego.

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max/\min \tag{6}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} & +a_{11}x_{11} & +\ldots & +a_{1n}x_{1n} & \leq & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1}x_{k1} & +a_{k2}x_{k2} & +\ldots & +a_{kn}x_{kn} & = & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} & +a_{k2}x_{k2} & +\ldots & +a_{mn}x_{mn} & \geq & b_m \end{cases} \tag{7}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \tag{8}$$

Symbolem c_j ($j = 1, \ldots, n$) oznaczać będziemy parametry funkcji celu, x_j ($j = 1, \ldots, n$) – zmienne decyzyjne, a_{ij} ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) – parametry lewych stron ograniczeń, zaś b_i ($i = 1, \ldots, m$) – wartości prawych stron ograniczeń.

Interpretacja modeli PL nie ogranicza się tylko do podania wartości zmiennych decyzyjnych, dla których funkcja celu osiąga wartość największą lub najmniejszą. Znając rozwiązanie optymalne (oczywiście, o ile takie istnieje), jesteśmy w stanie odpowiedzieć na następujące pytania:

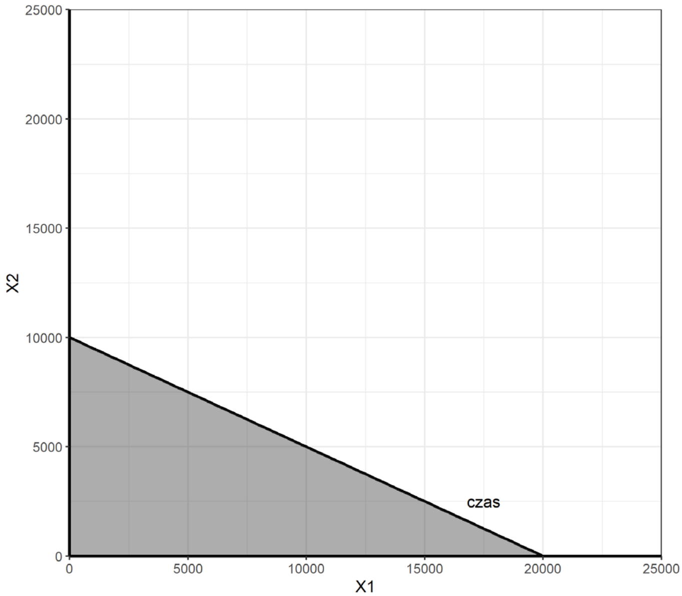
1. Jak zareaguje optymalna wartość funkcji celu na marginalne zmiany wybranego środka (limitu) reprezentowanego przez określony wyraz wolny w ograniczeniach?
2. Jakie są granice zmian przedziałów dopuszczalnych zmian w zasobach środków (limitów), dla których siła i kierunek reakcji, wymienionej w poprzednim punkcie, pozostają bez zmian?
3. Jakie są granice przedziałów dopuszczalnych zmian dla współczynników funkcji celu, które nie powodują zmiany rozwiązania optymalnego?
4. Jak zareaguje rozwiązanie optymalne na dołączenie lub usunięcie zmiennej decyzyjnej?
5. Jak zareaguje rozwiązanie optymalne na dołączenie lub usunięcie ograniczenia?

Jeżeli problem można opisać przy pomocy tylko dwóch zmiennych decyzyjnych, wówczas da się go też przedstawić, a nawet rozwiązać graficznie, w prostokątnym układzie współrzędnych. Warunki brzegowe narzucają konieczność ograniczenia się do jego pierwszej ćwiartki. Wyznaczamy część wspólną nierówności i równań tworzących ograniczenia modelu. Będzie to (matematycznie rzecz ujmując) iloczyn wszystkich półpłaszczyzn i prostych odpowiadających nierównościom i równaniom tworzącym ograniczenia zadania PL. Jeśli ograniczenia występują wyłącznie jako nierówności (jak to ma miejsce w przykładzie 1), zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest wielobokiem wypukłym.

Chcąc naszkicować dane ograniczenie w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, zazwyczaj zaczynamy od wyznaczenia punktów przecięcia prostej odcinającej część płaszczyzny w ramach danego ograniczenia z osiami. Dla ograniczenia (2) punkty przecięcia z osiami mają współrzędne odpowiednio: (0, 10000) i (20000, 0). Na rysunku 1 umieszczono to ograniczenie, zaznaczając obszar, którego punkty spełniają obowiązujący limit.

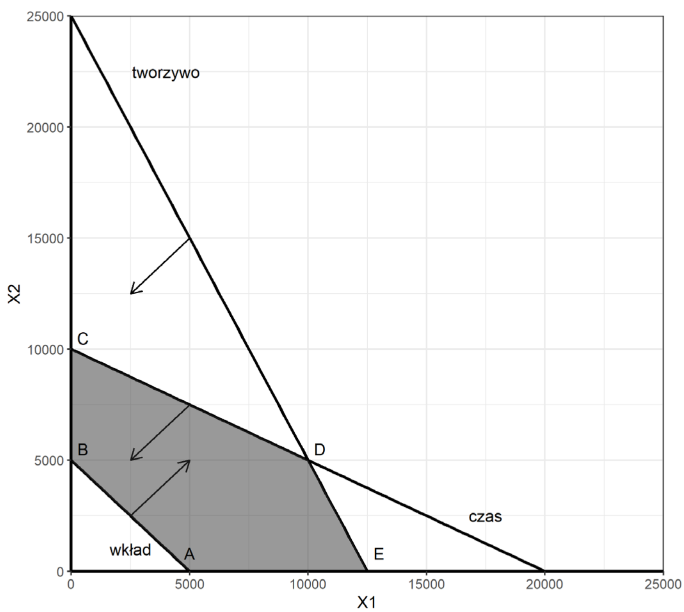
W ten sam sposób dodajemy do wykresu następne ograniczenia. Każda nowa półpłaszczyzna odcina odpowiedni fragment pierwszej ćwiartki układu, przy czym – obszary te częściowo lub całkowicie pokrywają się ze sobą. W efekcie tworzy się zbiór punktów spełniających wszystkie ograniczenia jednocześnie. Na rysunku 2 reprezentuje go wielobok *ABCDE*. Strzałki pokazują, gdzie znajdują się punkty spełniające dane ograniczenie. Zbiór punktów spełniających wszystkie ograniczenia modelu nosi nazwę zbioru rozwiązań dopuszczalnych – i oznaczymy go jako X. Co istotne, do zbioru tego należą także jego krawędzie – w modelach optymalizacyjnych praktycznie nie występują ostre nierówności. Ma to niebagatelne znaczenie przy wyznaczaniu rozwiązania optymalnego. Poszukiwana przez nas optymalna decyzja odnośnie wielkości i struktury produkcji musi być dopuszczalna. Z pewnością należy więc do zbioru X.

Jeżeli istnieje choć jedna decyzja dopuszczalna, tj. jeżeli zbiór decyzji dopuszczalnych jest niepusty, wówczas zadanie PL okazuje się zadaniem niesprzecznym.



Rys. 1. Zbiór punktów spełniających ograniczenie (2)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych dla przykładu 1

Źródło: opracowanie własne.