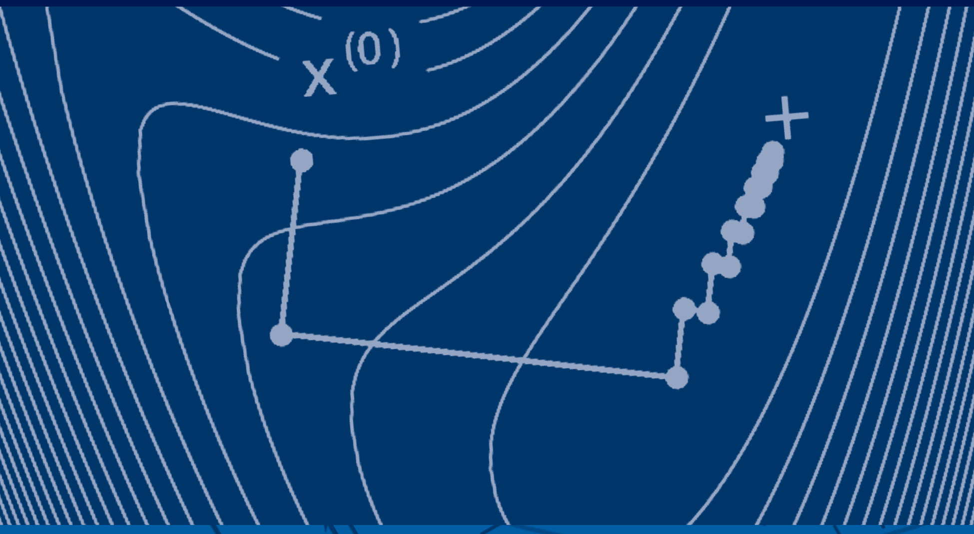
Jan Kusiak
Anna Danielewska-Tułecka
Piotr Oprocha

OPTYMALIZACJA

Wybrane metody z przykładami zastosowań



Wydawnictwo Naukowe PWN

OPTYMALIZACJA

naszym Dzieciom

Agnieszce
Tytusowi
Maciusiowi i *Michałkowi*
i ...

oraz Wnukom

Juleczkowi
i ...

Jan Kusiak
Anna Danielewska-Tułecka
Piotr Oprocha

OPTYMALIZACJA

Wybrane metody z przykładami zastosowań

Redakcja naukowa
Jan Kusiak

Wydawnictwo Naukowe **PWN**

Warszawa 2009

Projekt okładki i stron tytułowych **Joanna Sobieraj**

Redaktor inicjujący **Agnieszka Grabarczyk**

Redaktor **Anna Głażewska-Czuryło**

Publikacja powstała z udziałem finansowym Akademii Górniczo-Hutniczej
im. St. Staszica w Krakowie

ISBN 978-83-01-15961-0

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 022 69 54 321; faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl; www.pwn.pl

Spis treści

Przedmowa

Z problemami optymalizacji spotykamy się praktycznie we wszystkich obszarach nauki, przemysłu, ekonomii, zarządzania itp. Do ich analizy niezbędna jest znajomość metod pozwalających na znalezienie optymalnych rozwiązań. Istnieje wiele metod optymalizacji, które z pomocą coraz wydajniejszych komputerów pozwalają na rozwiązywanie złożonych zadań optymalizacji. Ciągły rozwój metod optymalizacji podyktowany jest faktem, że nie istnieją optymalne (uniwersalne) algorytmy w tym zakresie. Każda z metod optymalizacji może bowiem okazać się zawodna lub mało efektywna podczas poszukiwania minimum (maksimum) analizowanej funkcji. Dlatego też, z uwagi na trudności w procesie poszukiwania rozwiązań optymalnych analizowanego zagadnienia (trudności w uzyskaniu zbieżności lub wysokie nakłady czasów obliczeń), niezbędna jest znajomość więcej niż jednej metody optymalizacji. Metody te różnić się mogą efektywnością oraz czasami obliczeń, w zależności od optymalizowanej funkcji.

Głównym celem niniejszej książki jest przybliżenie, w sposób jak najprostszy, najczęściej stosowanych w praktyce metod optymalizacji, które mogą być wykorzystane do rozwiązywania różnorodnych zagadnień związanych z optymalizacją. Inspiracją do jej napisania były prowadzone od wielu lat przez Jana Kusiaka wykłady z „Metod optymalizacji" dla studentów Wydziału Inżynierii Metali i Informatyki Przemysłowej Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie.

Założeniem autorów było przedstawienie metod optymalizacji w sposób jak najbardziej przystępny, przy ograniczeniu do minimum teorii matematycznej. Poszczególne metody omówiono z zachowaniem następującego schematu:

- opis idei metody,
- opis algorytmu metody wzbogacony, w większości przypadków, zapisem algorytmu w pseudokodzie oraz rysunkiem schematu blokowego,
- przykład zastosowania omawianej metody do rozwiązania prostych zadań optymalizacji.

We wstępnej części książki zamieszczono opis wybranych metod deterministycznych (bezgradientowych i gradientowych) optymalizacji zagadnień nieliniowych, omówiono zagadnienia i metody optymalizacji liniowej, wielokryterialnej, opisano metody niedeterministyczne.

W dalszej części książki podano przykłady rozwiązywania zagadnień optymalizacji rzeczywistych procesów z zakresu inżynierii metali z wykorzystaniem omówionych wcześniej metod. Omówiono zasady metamodelowania oraz strategii optymalizacji aproksymacyjnej, przydatnych w rozwiązywaniu zadań optymalizacji rzeczywistych procesów, które wymagają czasochłonnych obliczeń numerycznych związanych ze stosowaniem złożonych modeli symulacyjnych. Przedstawiono możliwości wykorzystania technik optymalizacyjnych do zagadnień optymalizacji procesów plastycznej przeróbki metali.

Ostatnia część książki nie dotyczy bezpośrednio zagadnień optymalizacji. Zawiera natomiast przypomnienie podstawowych pojęć z zakresu algebry i analizy matematycznej, które mogą być pomocne w zrozumieniu poszczególnych metod optymalizacji.

Opisane w książce algorytmy zostały zaimplementowane i przetestowane przy użyciu pakietów Mathematica i Matlab. Mamy nadzieję, że będą one przydatne dla wszystkich zainteresowanych problematyką optymalizacji. I choć obecnie można łatwo znaleźć wiele gotowych programów komputerowych rozwiązujących zadania optymalizacji i niewielu Czytelników będzie starało się pisać własne procedury, wykorzystujące zaprezentowane w książce algorytmy, to jednak być może będą one pomocne w zrozumieniu, a w konsekwencji we właściwym stosowaniu odpowiednich metod w rozwiązywaniu zadań optymalizacji.

Chcielibyśmy, by ta książka zainspirowała Czytelników do wykorzystywania omówionych metod optymalizacji w rozwiązywaniu praktycznych problemów napotykanych w ich codziennej pracy zawodowej.

Za pomoc w graficznym opracowaniu części rysunków przygotowanych w programie Matlab dziękujemy Michałowi Oczko, Andrzejowi Stanisławczykowi, a w szczególności Łukaszowi Sztangretowi, który również był pierwszym, wnikliwym Czytelnikiem maszynopisu i którego uwagi bardzo pomogły nam przy korekcie książki.

Przede wszystkim zaś dziękujemy naszym Współmałżonkom za cierpliwość i wyrozumiałość w czasie powstawania tej książki.

Stosowana notacja oraz najważniejsze oznaczenia

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	zbiory liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych
$\mathbb{R}^n$	n-krotny iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, tzn. zbiór punktów o n współrzędnych rzeczywistych
A, X	macierze, zbiory
∂X	brzeg zbioru
a, s, t, x	liczby lub elementy zbiorów w zależności od kontekstu
$\{a, b, c\}$	zbiór o elementach a, b, c
$\mathbf{x}$	punkt $(x_1, \ldots, x_n)$ lub wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ w $\mathbb{R}^n$, gdzie $n = 2, 3, \ldots$
$\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots$	wersory
A_{*i}, A_{j*}	odpowiednio i-ta kolumna i j-ty wiersz macierzy A
x_j	j-ta współrzędna wektora $\mathbf{x}$ lub element ciągu liczbowego
$\mathbf{x}^j, \mathbf{x}_j$	j-ty element ciągu wektorów (skończonego lub nieskończonego)
$\mathbf{x}^{(i)}$	punkt w i-tej iteracji
$\mathbf{x}_j^{(i)}$	j-ty element ciągu wektorów otrzymanego w i-tej iteracji
$x_j^{(i)}$	j-ta współrzędna wektora otrzymanego w i-tej iteracji
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$
$\|\|\mathbf{x}\|\|$	norma wektora $\mathbf{x}$
$\|\|\mathbf{x}\|\|_2$	norma euklidesowa wektora $\mathbf{x}$
A^{T}, A^{-1}	macierz transponowana, macierz odwrotna
$f : X \to Y$	funkcja o argumentach w zbiorze X i wartościach w zbiorze Y
f'	pochodna funkcji f
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$	pochodna cząstkowa funkcji $f(x_1, \ldots, x_n)$ względem i-tej zmiennej
$\min(x, y)$	mniejsza z liczb x, y
$\max(x, y)$	większa z liczb x, y
$\mathbf{x}^{\min}$	rzeczywiste rozwiązanie optymalne (minimalne)
$\mathbf{x}^*$	obliczone algorytmem, przybliżone rozwiązanie optymalne
$N_{\max}$	maksymalna dopuszczalna liczba iteracji w algorytmie
$(a, b), [a, b]$	odpowiednio, przedział otwarty i domknięty
$\mathbf{0}$	wektor zerowy

1 Wprowadzenie

W wielkim skrócie możemy powiedzieć, że *optymalizacja* to dziedzina matematyki, która umożliwia znalezienie najlepszego rozwiązania, tzn. rozwiązania dającego najmniejszą lub największą (minimum lub maksimum) wartość pewnego wyrażenia nazywanego funkcją celu (także kryterium jakości, kryterium optymalizacji, funkcjonałem jakości).

Początków teorii optymalizacji można się doszukiwać już w czasach starożytnych, kiedy to Euklides (III wiek p.n.e.) zajmował się poszukiwaniem najkrótszej drogi łączącej dwa punkty. Pierwszą technikę optymalizacyjną wiąże się z Gaussem (przełom XVIII i XIX w.), który opracował tzw. metodę największego spadku. Natomiast za „ojca" terminu optymalizacja uważa się amerykańskiego matematyka George B. Dantziga (1914–2005), który zajmował się programowaniem liniowym i jest twórcą metody sympleks.

Rozkwit teorii optymalizacji obserwuje się od początku drugiej połowy XX w., kiedy nastąpił intensywny rozwój metod numerycznych, związany z dynamicznym rozwojem technik komputerowych.

Ogólnie, celem optymalizacji jest wybór najlepszego (minimalnego lub maksymalnego) rozwiązania danego problemu, które spełnia wszystkie ograniczenia i uwarunkowania. W życiu codziennym rozwiązania optymalne zadań praktycznych są wynikiem zdobytego doświadczenia, wiedzy praktycznej i często dochodzi się do nich metodą prób i błędów. Jest to zazwyczaj proces długotrwały i często bardzo kosztowny. Znalezienie w sposób bardziej efektywny tego „optimum" umożliwiają metody optymalizacji, które w sposób algorytmiczny, na drodze analitycznej lub numerycznej, pozwalają na poszukiwanie rozwiązań optymalnych bez konieczności analizowania wszystkich możliwych wariantów.

Z teoretycznego punktu widzenia, zagadnienie poszukiwania rozwiązań optymalnych stanowi odrębną teorię, którą zaliczyć można do dziedziny matematyki stosowanej. Jej zadaniem jest odpowiednie sformułowanie, w sposób matematyczny, analizowanego problemu optymalizacji, zbioru poszukiwań oraz funkcji celu optymalizacji (kryterium jakości). Dla tak sformułowanego problemu optymalizacji, zadaniem jest znalezienie optymalnego rozwiązania, które spełnia przyjęte kryterium optymalizacji. Ogólnie, poszukiwanie rozwiązań optymalnych związane jest z następującymi zadaniami:

- doborem (opracowaniem) modelu matematycznego analizowanego procesu,
- zdefiniowaniem funkcji celu optymalizacji (funkcjonału jakości, kryterium optymalizacji, kryterium jakości itp.),
- poszukiwaniem optymalnego rozwiązania z zastosowaniem jednej z metod optymalizacji.

O ile pierwsze z wymienionych zadań jest głównie przedmiotem identyfikacji i modelowania procesów, o tyle pozostałe dwa zadania są nierozerwalnie związane z optymalizacją[1].

Załóżmy, że dane są:

- funkcja celu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
- zbiór $X_d \subset \mathbb{R}^n$.

Zadaniem optymalizacji, nazywanej też programowaniem matematycznym, jest poszukiwanie takiego elementu $\mathbf{x}^{\text{opt}} \in X_d$, że

$$f(\mathbf{x}^{\text{opt}}) \leq f(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in X_d \quad (\text{poszukiwanie minimum, } \mathbf{x}^{\min} = \mathbf{x}^{\text{opt}})$$

lub

$$f(\mathbf{x}^{\text{opt}}) \geq f(\mathbf{x}) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in X_d \quad (\text{poszukiwanie maksimum, } \mathbf{x}^{\max} = \mathbf{x}^{\text{opt}}).$$

Stosowane algorytmy optymalizacyjne wyznaczają pewne rozwiązanie $\mathbf{x}^*$. Znalezione rozwiązanie $\mathbf{x}^*$ stanowić ma przybliżenie minimum (maksimum) globalnego optymalizowanej funkcji celu (tzn. wartość $f(\mathbf{x}^*)$ powinna być dobrym przybliżeniem liczby $f(\mathbf{x}^{\text{opt}})$). Należy zaznaczyć, że znalezione minimum (maksimum) jest globalne jedynie wewnątrz zdefiniowanego obszaru poszukiwań zmiennych optymalizacji, w którym znajdują się dopuszczalne rozwiązania X_d (zob. punkt 2.3.1), a niekoniecznie w całej dziedzinie funkcji celu.

Często, w analizowanym obszarze poszukiwań, oprócz minimum (maksimum) globalnego występują minima (maksima) lokalne, w których wartość optymalizowanej funkcji przybiera odpowiednio większą (mniejszą) wartość niż dla rozwiązania globalnego. Minima (maksima) lokalne nastręczają wiele problemów podczas poszukiwania tego jednego, właściwego minimum (maksimum) globalnego. Spowodowane jest to tym, że metody optymalizacji „grzęzną" w minimum (maksimum) lokalnym i nie docierają do rozwiązania globalnego. Obrazowo można to przedstwić za pomocą kuli golfowej która, tocząc się po nierównej powierzchni pola golfowego, może zatrzymać się w jednym z *lokalnych* dołków na drodze do tego jedynego, *globalnego*. Dlatego też, jednym z kryteriów oceny jakości metod optymalizacji jest ich zdolność do docierania do tego globalnego minimum, bez względu na napotykane przeciwności (minima lokalne).

[1] Szczegóły matematyczne zagadnienia optymalizacji omówiono w podrozdziale 2.3.