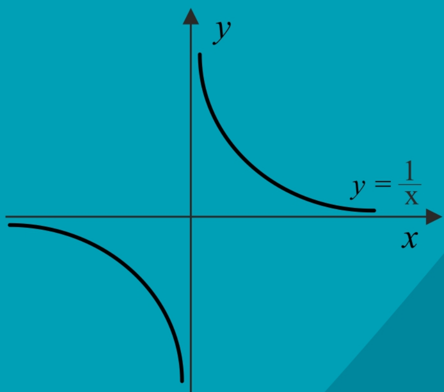
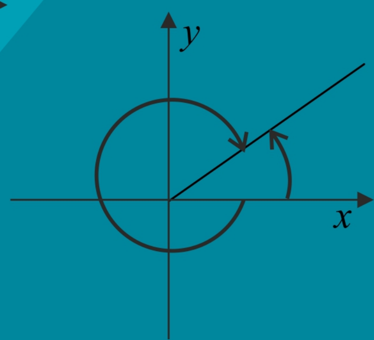
3

DANUTA WRÓBEL • ALICJA ZIELIŃSKA • GRZEGORZ RUDZIŃSKI

MATEMATYKA





PO POLSKU

PODRĘCZNIK DLA CUDZOZIEMCÓW

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

W WIEŻY BABEL PO POLSKU

MATEMATYKA
PO POLSKU

PODRĘCZNIK DLA CUDZOZIEMCÓW

W WIEŻY BABEL PO POLSKU

Podręczniki Studium Języka Polskiego dla Cudzoziemców UŁ

SERIA POD REDAKCJĄ

GRAŻYNY ZARZYCKIEJ

3

DANUTA WRÓBEL • ALICJA ZIELIŃSKA • GRZEGORZ RUDZIŃSKI

MATEMATYKA PO POLSKU

PODRĘCZNIK DLA CUDZOZIEMCÓW

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

ŁÓDŹ 2013

Danuta Wróbel, Alicja Zielińska – Uniwersytet Łódzki, Studium Języka Polskiego
dla Cudzoziemców, 90-231 Łódź, ul. Matejki 21/23
Grzegorz Rudziński – Uniwersytet Łódzki, Wydział Filologiczny
Katedra Lingwistyki Stosowanej i Kulturowej, 90-514 Łódź, al. Kościuszki 65

RECENZENT
Ryszard J. Pawlak

SKŁAD KOMPUTEROWY
Alicja Zielińska

PROJEKT OKŁADKI
Barbara Grzejszczak

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ
przez Studium Języka Polskiego dla Cudzoziemców

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.06400.13.0.S

ISBN 978-83-7969-068-8

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

Druk i oprawa: Quick Druk

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

Matematyka po polsku, podobnie jak opublikowany w 2011 roku *Wstęp do matematyki* [1]) jest podręcznikiem dla trzech grup odbiorców: po pierwsze, dla cudzoziemców, którzy chcąc podjąć w Polsce studia uczą się języka polskiego jako obcego; po drugie, dla osób, które znając język polski w zakresie ogólnym muszą uzupełnić jego znajomość w zakresie matematyki; po trzecie wreszcie, dla tych osób kształconych poza Polską, którzy z racji różnic w programach szkolnych opanowały inny niż obowiązujący u nas zakres wiedzy z tego przedmiotu. W zakresie poruszonych zagadnień matematycznych niniejsze opracowanie kontynuuje i dopełnia zestaw wiadomości zaprezentowany we wspomnianym wyżej *Wstępie (...)*. Także i tutaj zakłada się, że odbiorcami treści podręcznika są osoby, które znają matematykę na poziomie egzaminu maturalnego obowiązującego w ich krajach.

Zakres opracowania sprowadza się więc nie tylko do przywołania treści objętych programami nauczania matematyki, ale także do idącego możliwie najdalej uprzystępnienia zjawisk językowych charakteryzujących polszczyznę obsługującą przekazywanie wiedzy matematycznej. Ogólna linia postępowania jest tu jednak inna niż we *Wstępie do matematyki*. Uproszczenia konstrukcji składniowych występują rzadko i tylko w początkowych partiach podręcznika – zakłada się, że początkowa kompetencja językowa osób uczących się z tego opracowania reprezentuje w języku polskim jako obcym/drugim/odziedziczonym poziom co najmniej A2/B1. Nie ma ograniczeń w użyciu form fleksyjnych. Nacisk położony jest na rozwijanie sprawności rozumienia tekstu czytanego, identyfikowanie zjawisk homonimii składniowej i porządkowanie opanowanej już leksyki oraz gramatyki. Troską autorów jest, aby przyjazna wobec językowych możliwości studenta-cudzoziemca forma nie odbiegała od typowych zachowań językowych akademickich nauczycieli matematyki i form powszechnie występujących w zwykłych podręcznikach tego przedmiotu. Miejsca szczególnie na tym poziomie językowo kłopotliwe są oznaczone ● Niektórym oznaczonym w ten sposób zjawiskom językowym towarzyszą ćwiczenia umieszczone na końcu rozdziału lub podrozdziału.

Niniejsze opracowanie jest więc zarówno podręcznikiem matematyki, jak i języka polskiego jako obcego. Najliczniejszą grupę jego użytkowników będą stanowić studenci i nauczyciele Studium Języka Polskiego dla Cudzoziemców UŁ. W miarę istniejącej swobody w terminach realizacji programu nauczania matematyki w Studium, podręcznik może służyć jako materiał do głośnego czytania, by także na wyższych poziomach kompetencji komunikacyjnej wspierać pokonywanie przez studentów barier artykulacyjnych typowych dla polszczyzny matematyki. Nie można jednak zakładać, że studenci nauczą się z niego swobodnie przekazywać treści matematyczne. Kształtowanie polszczyzny studenta w tym zakresie wymaga dłuższego obcowania z polszczyzną ogólną i specjalistyczną, niż ma to miejsce w trakcie 30 tygodniowego kursu. Podobnie więc jak *Wstęp (...)*, *Matematyka po polsku* to podręcznik nastawiony bardziej na rozwijanie sprawności receptywnych (rozumienie) niż produktywnych.

W warunkach organizacyjnych Studium Języka Polskiego dla Cudzoziemców UŁ podręcznik przeznaczony jest do pracy w drugim semestrze. W grupach zaczynających naukę polskiego od zera może być wykorzystywany od 45-50 godziny kursu matematyki, przy wcześniejszym przejściu grupy przez co najmniej 250 godzin języka polskiego ogólnego.
Podręcznik zawiera ponad 200 zadań. Tak duża ich liczba uzasadniona jest silnym zróżnicowaniem poziomów merytorycznego przygotowania słuchaczy. Zadań musi być odpowiednio dużo według zasady „dla każdego coś miłego”.

Autorzy

ROZDZIAŁ I. FUNKCJE

1. FUNKCJA I JEJ WŁASNOŚCI

POJĘCIE FUNKCJI

Definicja. Niech D, Y będą danymi zbiorami. Każdemu elementowi $x \in D$ przyporządkowujemy dokładnie jeden element $y \in Y$. Mówimy, że w zbiorze *D* została określona **funkcja** o wartościach w zbiorze *Y*. Zbiór *D* nazywamy **dziedziną** tej **funkcji**.

Funkcje oznaczamy najczęściej literami: f, g, h, …

Jeżeli funkcja f przyporządkowuje elementowi x element y, to piszemy

$$y = f(x),$$

x nazywamy **argumentem**, a y – **wartością funkcji** f w punkcie x lub wartością funkcji f dla argumentu x.

Zbiór wszystkich $y \in Y$ takich, że $y = f(x)$ dla $x \in D$ nazywamy **zbiorem wartości funkcji** f i oznaczamy go $f(D)$. Zatem: $f(D) = \{ f(x) : \ x \in D \}$ (czyt. zbiór f od x takich, że x należy do D).

PRZYKŁAD 1.
Niech *D* oznacza zbiór dzieci w pewnej szkole podstawowej w Łodzi, *M* – zbiór matek tych dzieci. **Przyporządkowanie** każdemu dziecku $d \in D$ jego matki $m \in M$ jest funkcją.
Przyporządkowanie każdej matce $m \in M$ jej dziecka z tej szkoły nie jest funkcją, jeżeli w tej szkole jest rodzeństwo.

Często funkcję nazywamy też **przekształceniem** lub **odwzorowaniem**.

Jeżeli f jest funkcją określoną w zbiorze *D* o wartościach w zbiorze *Y*, to piszemy

$$f : D \longrightarrow Y$$

i czytamy: *Funkcja f* ***przekształca*** **(*****odwzorowuje*****)** *zbiór D* **w** *zbiór Y*. Jeżeli $Y = f(D)$, to możemy napisać

$$f : D \xrightarrow{na} Y$$

i czytamy wtedy: *Funkcja f* ***przekształca*** **(*****odwzorowuje*****)** *zbiór D* **na** *zbiór Y*.

Rozważmy jeszcze raz funkcję z przykładu 1. Oznaczmy:
K – zbiór wszystkich kobiet w Łodzi, L – zbiór wszystkich Łodzian.

Możemy napisać: $f: D \longrightarrow L$, $f: D \longrightarrow K$, $f: D \longrightarrow M$,

ale tylko $f: D \xrightarrow{na} M$.

<u>Uwaga.</u> Elementy x i y to są **zmienne**.
Zmienna y **zależy od** zmiennej x.
Zmienna y jest funkcją zmiennej x.
x jest **zmienną niezależną**.
y jest **zmienną zależną.**

Niech $f: D \longrightarrow Y$. Jeżeli $D \subset R$, to f nazywamy **funkcją zmiennej rzeczywistej**; jeżeli $Y \subset R$, to f nazywamy **funkcją rzeczywistą**.

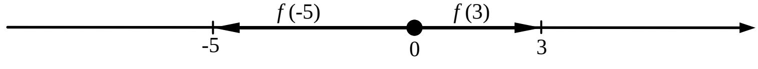
Funkcja z przykładu 1 nie jest ani funkcją zmiennej rzeczywistej ani funkcją rzeczywistą, bo mówi o przyporządkowaniu ludzi, a nie liczb.

PRZYKŁAD 2.
Określamy funkcję przy pomocy tabeli.
W pierwszej połowie 2011 roku państwo Z zapłacili za energię elektryczną następujące kwoty:

Miesiąc (***x***)	styczeń	luty	marzec	kwiecień	maj	czerwiec
Opłata za energię w zł (***y***)	76,36	73,28	87,13	92,77	94,82	91,34

Jest to funkcja rzeczywista, która nie jest funkcją zmiennej rzeczywistej.

PRZYKŁAD 3.
Określamy funkcję przy pomocy opisu słownego.
Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy na osi liczbowej wektor o początku w punkcie 0 i końcu w punkcie x.



Jest to funkcja wektorowa zmiennej rzeczywistej.

PRZYKŁAD 4.
Określamy funkcję przy pomocy wzoru.

$$f(x) = x^2 + 1, \quad x \in N .$$

Jest to funkcja rzeczywista zmiennej rzeczywistej. Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb naturalnych N. Taka funkcja to jest ciąg liczbowy.

Definicja. Funkcję określoną w zbiorze liczb naturalnych N nazywamy **ciągiem** (**nieskończonym**). Wartość takiej funkcji dla argumentu n oznaczamy: a_n, b_n, x_n, … i nazywamy ***n*-tym wyrazem** lub **wyrazem ogólnym ciągu**. Jeżeli wyrazy ciągu są liczbami rzeczywistymi, to ciąg nazywamy **liczbowym**.
Funkcję określoną na skończonym podzbiorze $\{\, 1, 2, \ldots, k \,\}$ zbioru liczb naturalnych nazywamy **ciągiem skończonym** (*k*-wyrazowym).

Ciąg nieskończony o wyrazie ogólnym a_n oznaczamy (a_n); *k*-wyrazowy ciąg o wyrazie ogólnym a_n oznaczamy $(a_n)_{\,n \le k}$ lub wypisujemy w nawiasie wyrazy tego ciągu: $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

PRZYKŁAD 5.

a) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ – ciąg **odwrotności** kolejnych **liczb** naturalnych. Jest to ciąg nieskończony. Możemy go też określić przy pomocy wzoru na *n*-ty wyraz: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$.

b) $(2, 4, 8, 16, 32)$ – ciąg skończony, pięciowyrazowy. Ten ciąg możemy też zapisać tak: $(2^n)_{\,n \le 5}$.

c) $a_1 = 2$; $a_{n+1} = \frac{a_n - n}{2}$, $n \in N$ – ciąg określony przy pomocy **definicji rekurencyjnej** (**indukcyjnej**). Aby otrzymać np. czwarty wyraz tego ciągu, obliczamy kolejno:

$$a_2 = \frac{a_1 - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2 - 2}{2} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2} = -\frac{3}{4},$$

$$a_4 = \frac{a_3 - 3}{2} = \frac{-\frac{3}{4} - 3}{2} = -\frac{15}{8}.$$

Funkcje możemy określać w sposób opisowy (przykłady: 1 i 3), przy pomocy tabeli (przykład 2), przy pomocy wzoru (przykład 4).

Jeżeli funkcja jest określona wzorem i dziedzina nie jest dana, to przyjmujemy, że dziedziną jest zbiór wszystkich x, dla których wzór ma sens.

FUNKCJA ZŁOŻONA

Niech $f : D \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$.

Funkcję $h = g \circ f : D \longrightarrow Z$ określoną wzorem:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \ x \in D$$

nazywamy **funkcją złożoną** lub **złożeniem** lub **superpozycją** funkcji g i f.
Funkcję g nazywamy **funkcją zewnętrzną,** a f **– funkcją wewnętrzną**.

Np. jeżeli

$$f(x) = \ln x \ , \ x > 0 ,$$

$$g(x) = \sqrt{x} \ , \ x \geq 0 ,$$

to

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\ln x} \ , \ x \geq 1,$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \sqrt{x} \ , \ x > 0 .$$

ĆWICZENIA JĘZYKOWE

1. Proszę napisać zdania według przykładu:

Czworokąt *ABCD* i czworokąt *A'B'C'D'* mają równe pola.
*To są czworokąty **o równych polach**.*

Funkcja $f(x) = x^2 + 7$ ma wartości dodatnie.
To jest ……………………………………………………………………

Trójkąty *ABC* i *ABC'* mają wspólną podstawę.
To są …………………………………………………………………….

Odcinki *AB* i *CD* mają tę samą długość.
To są …………………………………………………………………….

Wektor $\overrightarrow{AB}$ ma początek w punkcie A i koniec w punkcie B .
To jest ……………………………………………………………………

Ten ciąg ma wyraz ogólny $a_n = n^2 - 2n$.
To jest ……………………………………………………………………

2. **a)** Proszę uzupełnić tabelę wg przykładu.

co?	*jaki?*	*jaka?*	*jakie?*
równość	równy	równa	równe
długość	....	…………….	…………….
odwrotność	…………….	…………….	…………….
okresowość	…………….	…………….	…………….
ograniczoność	…………….	…………….	…………….
monotoniczność	…………….	…………….	…………….
różnowartościowość	…………….	…………….	…………….
równoległość	…………….	…………….	…………….
prostopadłość	…………….	…………….	…………….
parzystość	…………….	…………….	…………….

b) Proszę przypisać rzeczowniki do przymiotników, tak jak w przykładzie:

długie	długość
monotoniczna	……………………………
okresowy	……………………………
prostopadła	……………………………
niewymierne	……………………………
kolejny	……………………………
odległy	……………………………
równy	……………………………
cały	……………………………
nieparzysta	……………………………
nieskończony	……………………………
równoległe	……………………………

c) Proszę dokończyć przekształcone zdania, proszę użyć rzeczowników zakończonych na -ść, tak jak w przykładzie:

Zbadamy, czy ta funkcja jest monotoniczna.
*Zbadamy **monotoniczność tej funkcji.***

Udowodnimy, że ta funkcja jest różnowartościowa.
Udowodnimy ………………………………………………………………..

Zbadamy, czy ta funkcja jest parzysta.
Zbadamy ………………………………………………………………….

Jaki długi jest ten odcinek?
Jaka jest ………………………………………………………………….?

Wykażemy, że ten ciąg jest ograniczony.
Wykażemy………………………………………………………………….

Udowodnić, że ta funkcja jest nieparzysta.
Udowodnić………………………………………………………………….

Pokazać, że te proste są równoległe.
Pokazać………………………………………………………………….

Wykażemy, że ta funkcja jest okresowa.
Wykażemy………………………………………………………………….

3. Proszę przypisać formom trybu rozkazującego odpowiednie bezokoliczniki z ramki.

zauważyć, rozważyć, wziąć, przekształcić, założyć, podstawić, dodać, odjąć, pomnożyć, podzielić, oznaczyć

dodajmy...
odejmijmy ....
podstawmy ....
podzielmy..
pomnóżmy...
przekształćmy...
rozważmy ....
weźmy ....
załóżmy ....
zauważmy...
oznaczmy ....

4. Proszę wpisać prawidłowe formy rzeczownika *maksimum* w odpowiednie miejsca kolejnych zdań.

Dziś będziemy mówić o ekstremach globalnych funkcji, to znaczy
o ..………………… i minimach globalnych.

Największa wartość funkcji to jest .... globalne, a najmniejsza wartość funkcji to jest minimum globalne.

.... i minima globalne nazywamy ekstremami globalnymi.

Funkcja może nie mieć ekstremów globalnych, np. funkcje liniowe $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, nie mają ani .... ani minimów globalnych.

Ekstrema globalne nazywamy też ekstremami absolutnymi i odpowiednio: .... globalne – .... absolutnymi, minima globalne – minimami absolutnymi.

Funkcja może mieć .... globalne i nie mieć minimum globalnego i odwrotnie: może mieć minimum globalne i nie mieć .... globalnego.

Przyjrzyjmy się .... globalnym funkcji $f(x) = ax^2 + 1$; liczba $y = 1$ jest .... globalnym wszystkich takich funkcji, dla których $a \leq 0$; jeżeli $a \geq 0$, to funkcje nie mają .... globalnych, a liczba $y = 1$ jest minimum globalnym tych funkcji; jeżeli $a = 0$, to funkcja jest stała, a liczba $y = 1$ jest jednocześnie .... i minimum globalnym tej funkcji.

5. Proszę uzupełnić tekst formami podanych czasowników, tak jak w przykładzie.

rosnąć
– W przedziale $[a, b]$ ta funkcja *rośnie*.
– W przedziale $[a, b]$ ta funkcja jest *rosnąca*.

maleć
– W przedziale $[a, b]$ ta funkcja ....
– W przedziale $[a, b]$ ta funkcja jest ....

przecinać się
– Niech $\wp$ oznacza zbiór wszystkich prostych, które .... w punkcie *A*.
– Niech $\wp$ oznacza zbiór wszystkich prostych .... w punkcie *A*.