

Matematyka

Europejczyka

$$P = \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki, na podstawie opinii rzeczoznawców: dr Anny Loranty, mgr. Tadeusza Marczewskiego, dr Marzeny Kryszczuk.

Etap edukacyjny: III.

Typ szkoły: gimnazjum.

Rok dopuszczenia: 2013

Nr ewidencyjny w wykazie: 574/2/2013

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autorzy oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autorzy oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Marcin Borecki

Projekt okładki: Urszula Buczkowska

Skład: Marcin Chłąd

Fotografia na okładce została wykorzystana za zgodą Shutterstock.

Wydawnictwo HELION

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: helion@helion.pl

WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://helion.pl/user/opinie?podrg2>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

ISBN: 978-83-246-2250-4

Copyright © Helion 2013

Printed in Poland.

- [Kup książkę](#)
- [Poleć książkę](#)
- [Oceń książkę](#)

- [Księgarnia internetowa](#)
- [Lubię to! » Nasza społeczność](#)

Spis treści

Od autorek (s. 7)

1. Okrąg i koło (s. 9)

- 1.1. Kąt środkowy (s. 10)
 - Kąt wpisany. Treści nadobowiązkowe (s. 14)
 - Zadania utrwalające (s. 17)
- 1.2. Długość okręgu (s. 20)
 - Zadania utrwalające (s. 23)
- 1.3. Pole koła (s. 24)
 - Zadania utrwalające (s. 26)
- 1.4. Długość łuku. Pole wycinka kołowego (s. 28)
 - Zadania utrwalające (s. 32)
- 1.5. Wzajemne położenie dwóch okręgów (s. 33)
 - Zadania utrwalające (s. 36)
- 1.6. Styczna do okręgu (s. 39)
 - Zadania utrwalające (s. 41)
 - Zadania do rozwiązywania w grupie (s. 43)
- 1.7. Krok do egzaminu (s. 44)

2. Funkcje (s. 51)

- 2.1. Pojęcie funkcji (s. 52)
 - Zadania utrwalające (s. 56)
- 2.2. Wykres funkcji (s. 58)
 - Zadania utrwalające (s. 62)
- 2.3. Własności funkcji (s. 64)
 - Zadania utrwalające (s. 73)
 - Zadanie do rozwiązywania w grupie (s. 76)
- 2.4. Krok do egzaminu (s. 77)

3. Układy równań (s. 85)

- 3.1. Równanie z dwiema niewiadomymi (s. 86)
 - Zadania utrwalające (s. 88)
- 3.2. Budowanie układów równań. Liczby spełniające układ równań (s. 90)
 - Zadania utrwalające (s. 93)
- 3.3. Rozwiązywanie układów równań metodą podstawiania (s. 96)
 - Zadania utrwalające (s. 99)

- 3.4. Rozwiązywanie układów równań metodą przeciwnych współczynników (s. 101)
 - Zadania utrwalające (s. 106)
- 3.5. Rozwiązywanie układów równań (s. 106)
 - Zadania utrwalające (s. 108)
- 3.6. Rozwiązywanie zadań tekstowych (s. 109)
 - Zadania utrwalające (s. 114)
 - Zadania do rozwiązywania w grupie (s. 116)
- 3.7. Krok do egzaminu (s. 116)

4. Potęga i pierwiastek (s. 123)

- 4.1. Potęga o wykładniku naturalnym (s. 124)
 - Zadania utrwalające (s. 126)
- 4.2. Potęga o wykładniku całkowitym (s. 127)
 - Zadania utrwalające (s. 129)
- 4.3. Działania na potęgach (s. 131)
 - Zadania utrwalające (s. 133)
- 4.4. Notacja wykładnicza (s. 134)
 - Zadania utrwalające (s. 139)
- 4.5. Pierwiastek kwadratowy i sześcienny (s. 141)
 - Zadania utrwalające (s. 146)
- 4.6. Własności pierwiastkowania (s. 147)
 - Zadania utrwalające (s. 149)
- 4.7. Działania na pierwiastkach (s. 151)
 - Treści nadobowiązkowe (s. 154)
 - Zadania utrwalające (s. 155)
 - Zadania do rozwiązywania w grupie (s. 156)
- 4.8. Krok do egzaminu (s. 156)

5. Twierdzenie Pitagorasa (s. 163)

- 5.1. Twierdzenie Pitagorasa (s. 164)
 - Zadania utrwalające (s. 171)
- 5.2. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (s. 174)
 - Zadania utrwalające (s. 178)
- 5.3. Trójkąty o kątach 45° , 45° , 90° i 30° , 60° , 90° (s. 180)
 - Zadania utrwalające (s. 183)
- 5.4. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania długości odcinków w graniastopach prostych (s. 186)
 - Zadania utrwalające (s. 189)
 - Zadania do rozwiązywania w grupie (s. 190)
- 5.5. Krok do egzaminu (s. 191)

6. Ostrostupy (s. 199)

- 6.1. Własności ostrostupów (s. 200)
 - Zadania utrwalające (s. 205)
- 6.2. Pole powierzchni całkowitej ostrostupa (s. 208)
 - Zadania utrwalające (s. 213)
- 6.3. Objętość ostrostupa (s. 215)
 - Zadania utrwalające (s. 217)
- 6.4. Przekroje ostrostupów. Treści nadobowiązkowe (s. 219)
 - Zadania utrwalające (s. 222)
 - Zadania do rozwiązywania w grupie (s. 224)
- 6.5. Krok do egzaminu (s. 225)

7. Symetrie (s. 231)

- 7.1. Symetria względem prostej (s. 232)
 - Zadania utrwalające (s. 236)
- 7.2. Oś symetrii figur (s. 238)
 - Zadania utrwalające (s. 240)
- 7.3. Symetralna odcinka, dwusieczna kąta (s. 241)
 - Zadania utrwalające (s. 244)
- 7.4. Symetria względem punktu (s. 244)
 - Zadania utrwalające (s. 248)
- 7.5. Środek symetrii figury (s. 249)
 - Zadania utrwalające (s. 252)
- 7.6. Figury symetryczne w prostokątnym układzie współrzędnych (s. 253)
 - Zadania utrwalające (s. 255)
- 7.7. Krok do egzaminu (s. 256)

8. Statystyka (s. 263)

- 8.1. Odczytywanie oraz tworzenie wykresów i diagramów (s. 264)
 - Zadania utrwalające (s. 269)
- 8.2. Średnia arytmetyczna, mediana i moda (s. 270)
 - Zadania utrwalające (s. 272)
- 8.3. Krok do egzaminu (s. 273)

Odpowiedzi (s. 281)

- Rozdział 1. Okrąg i koło (s. 281)
- Rozdział 2. Funkcje (s. 282)
- Rozdział 3. Układy równań (s. 289)
- Rozdział 4. Potęga i pierwiastek (s. 291)

Rozdział 5. Twierdzenie Pitagorasa (s. 294)

Rozdział 6. Ostrołupy (s. 296)

Rozdział 7. Symetrie (s. 297)

Rozdział 8. Statystyka (s. 298)

Wzory występujące w podręczniku (s. 301)

Fotografie (s. 305)

Indeks ważniejszych terminów (s. 306)

6.

OSTROŚŁUPY

- 6.1. Własności ostrosłupów (s. 200)
Zadania utrwalające (s. 205)
- 6.2. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa (s. 208)
Zadania utrwalające (s. 213)
- 6.3. Objętość ostrosłupa (s. 215)
Zadania utrwalające (s. 217)
- 6.4. Przekroje ostrosłupów (treści nadobowiązkowe) (s. 219)
Zadania utrwalające (s. 222)
Zadania do rozwiązywania w grupie (s. 224)
- 6.5. Krok do egzaminu (s. 225)

Kup książkę

IKONY

zadanie trudniejsze



kalkulator



Pole książki

6.1. Własności ostrosłupów

Najczęściej ostrosłupy są kojarzone z piramidami. Oto przykłady budowli w kształcie ostrosłupów.



Najsłynniejsza piramida świata — piramida Cheopsa — ma podstawę w kształcie kwadratu o boku 230 m i wysokość równą 147 m.



Najbardziej znanym grobowcem w kształcie piramidy jest budowla z 1811 r. w mazurskiej wsi Rapa.



Ta piramida ma około 10 m wysokości i podstawę w kształcie kwadratu o boku długości 12 m (jest to miniatura piramidy Cheopsa).



Piramida w fontannie na Rynku Głównym w Krakowie.

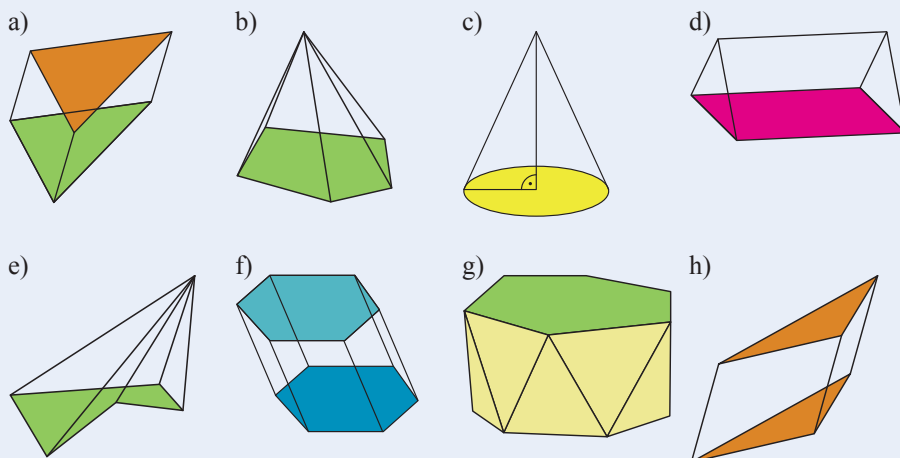


Piramida Cestiusza — monumentalny grobowiec Gajusza Cestiusza Epulona.



W Koczurkach zbudowano piramidę z drewna bez użycia gwoździ.

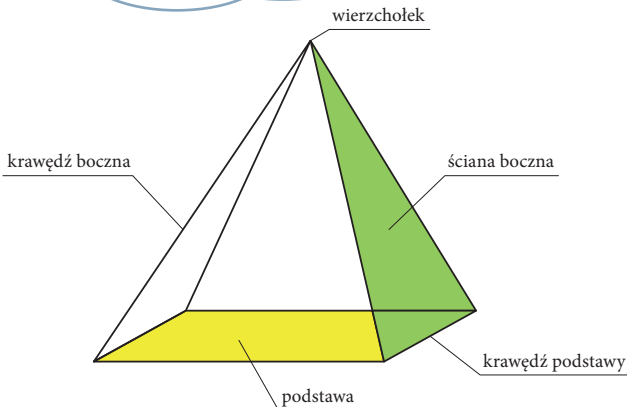
Przykład 6.1. Wskaż rysunki, które przedstawiają ostrosłup.



Ostrosłupami są wielościany na rysunkach b) i e).

Ostrosłup to wielościan, którego podstawa jest dowolnym wielokątem, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Przyjrzyj się rysunkowi, na którym znajduje się ostrosłup o podstawie czworokąta. Podaj liczbę wszystkich jego wierzchołków oraz liczbę ścian i liczbę krawędzi.



Liczba wszystkich wierzchołków tego ostrosłupa jest równa pięć. Ten ostrosłup ma pięć ścian i osiem krawędzi.



Przykład 6.2. Sprawdź, czy reguła Eulera jest prawdziwa dla ostrosłupów.

Reguła Eulera:

W wielu wielościanach, w tym w graniastosłupach, ścian i wierzchołków jest razem dokładnie tyle, ile jest krawędzi plus dwa.



Utworzyłam tabelę, w której umieściłam dane dotyczące ostrosłupów potrzebne do sprawdzenia reguły Eulera.

| Rodzaj ostrosłupa | Liczba ścian bocznych | Liczba ścian (S) | Liczba wierzchołków (W) | Liczba krawędzi (K) |
|-------------------------|-----------------------|------------------|-------------------------|---------------------|
| o podstawie trójkąta | 3 | 4 | 4 | 6 |
| o podstawie czworokąta | 4 | 5 | 5 | 8 |
| o podstawie sześciokąta | 6 | 7 | 7 | 12 |
| o podstawie n -kąta | n | $n + 1$ | $n + 1$ | $2n$ |



Sprawdziłem regułę dla ostrosłupa o podstawie trójkąta: $S + W = 8$ i $K + 2 = 8$.

Dla ostrosłupa o podstawie czworokąta mamy: $S + W = 10$ i $K + 2 = 10$, a dla ostrosłupa o podstawie n -kąta: $S + W = 2n + 2$ i $K + 2 = 2n + 2$.



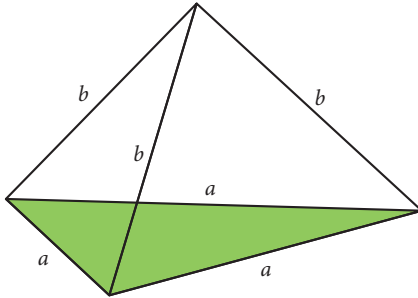
Reguła Eulera jest prawdziwa dla każdego ostrosłupa.



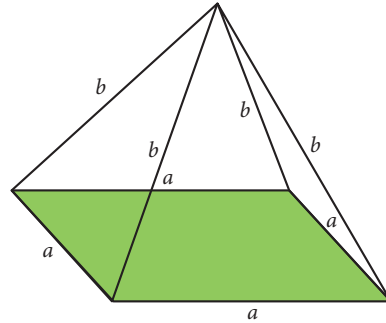
Nazwę ostrosłupa formułuje się w zależności od tego, jaka figura jest jego podstawą.

| Wielokąt będący podstawą ostrosłupa | Nazwa ostrosłupa |
|-------------------------------------|------------------------|
| trójkąt | ostrosłup trójkątny |
| czworokąt | ostrosłup czworokątny |
| sześciokąt | ostrosłup sześciokątny |

Ostrosłup, którego podstawą jest wielokąt foremny i wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są równej długości jest ostrosłupem prawidłowym.



Ostrosłup prawidłowy trójkątny — podstawą jest trójkąt równoboczny.



Ostrosłup prawidłowy czworokątny — podstawą jest kwadrat.



Nazwę ostrosłupa prawidłowego formułuje się w zależności od tego, jaki wielokąt foremny jest jego podstawą.



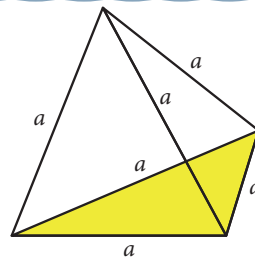
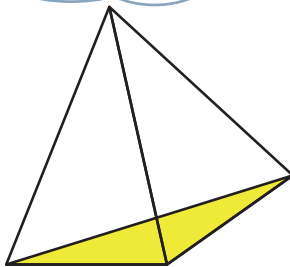
Ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.



Ostrosłup o podstawie trójkąta nazywamy **czworościanem**.



Wszystkie krawędzie czworościanu foremnego mają tę samą długość.

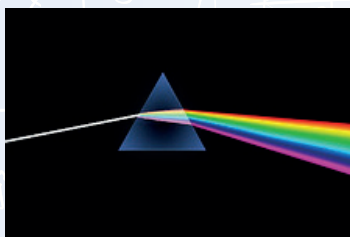


W życiu spotykamy przedmioty w kształcie ostrosłupa. Jednym z nich jest pryzmat, dzięki któremu można oglądać zjawisko rozszczepienia światła białego.

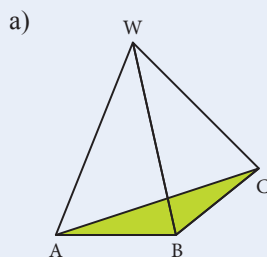
Ciekawostka

Pryzmat — bryła z przezroczystego materiału o co najmniej dwóch ścianach płaskich nachylonych do siebie pod pewnym kątem (tzw. kątem łamiącym pryzmatu). Używana jest w optyce do zmieniania kierunku biegu fal świetlnych. Dzięki temu, że zmiana kierunku zależy od długości fali, pryzmat jest stosowany w analizie widmowej światła. Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia pozwala użyć pryzmatu jako idealnego elementu odbijającego światło. Pryzmaty wykorzystywane są w produkcji wielu urządzeń optycznych, np. lornetek czy peryskopów.

Źródło: www.wikipedia.com.

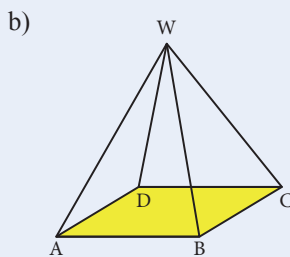


Przykład 6.3. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi poniższych ostrosłupów prawidłowych.



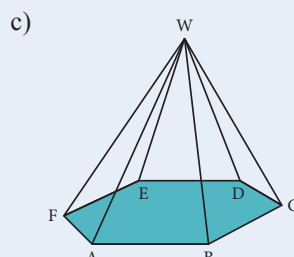
$$|AB| = 7 \text{ cm}$$

$$|AW| = 6 \text{ cm}$$



$$|AB| = 3,5 \text{ cm}$$

$$|AW| = 8 \text{ cm}$$



$$|AB| = 9 \text{ dm}$$

$$|AW| = 17 \text{ dm}$$

a) $3 \cdot 7 + 3 \cdot 6 = 39$

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 39 cm.

b) $4 \cdot 3,5 + 4 \cdot 8 = 46$

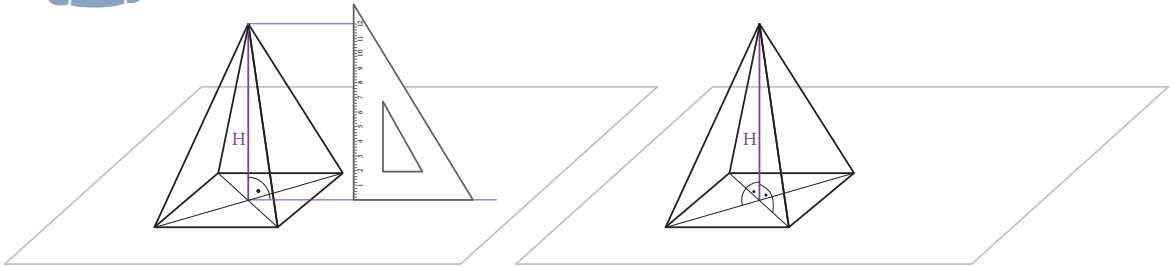
Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 46 cm.

c) $6 \cdot 9 + 6 \cdot 17 = 156$

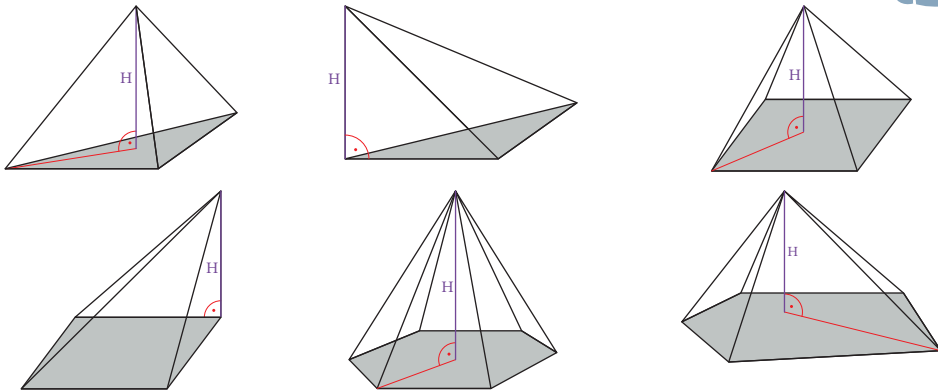
Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 156 dm.



Wysokością ostrosłupa jest odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z płaszczyzną podstawy i prostopadły do tej płaszczyzny. Wysokością ostrosłupa nazywamy także długość tego odcinka i oznaczamy ją literą H .



Wysokość jest prostopadła do każdej przekątnej podstawy.



Przykład 6.4. Oblicz długość wysokości ostrosłupa o podstawie prostokąta o bokach długości 8 cm i 6 cm. Ściany boczne ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi, których ramiona mają długość 13 cm.

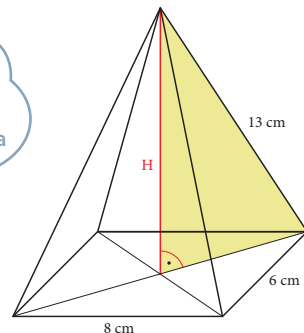
W ostrosłupie o podstawie prostokąta i wszystkich krawędziach bocznych jednakowej długości wysokość ostrosłupa jest odcinkiem łączącym wierzchołek ostrosłupa z punktem przecięcia się przekątnych jego podstawy.



W danym ostrosłupie wyznaczamy trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest krawędź boczna ostrosłupa, a przyprostokątnymi są wysokość ostrosłupa i połowa przekątnej podstawy.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość przekątnej podstawy.

$$d = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$



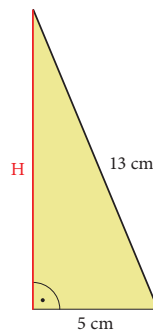
Następnie wyznaczamy długość wysokości ostrosłupa, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$H^2 + 5^2 = 13^2$$

$$H^2 = 169 - 25 = 144$$

$$H = \sqrt{144} = 12$$

Wysokość tego ostrosłupa ma długość równą 12 cm.

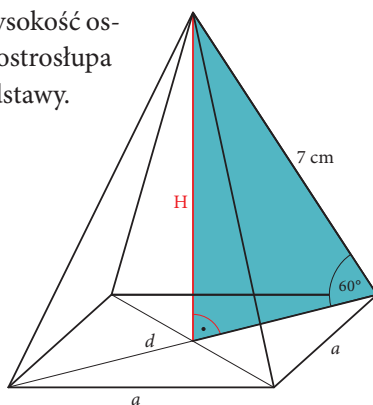


Przykład 6.5. Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 7 cm. Oblicz długość wysokości tego ostrosłupa, jeżeli kąt między krawędzią boczną ostrosłupa a przekątną jego podstawy ma miarę 60° .

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość ostrosłupa jest odcinkiem łączącym wierzchołek ostrosłupa z punktem przecięcia się przekątnych jego podstawy.



Krawędź boczna, wysokość ostrosłupa i połowa przekątnej podstawy tworzą trójkąt będący połową trójkąta równobocznego.

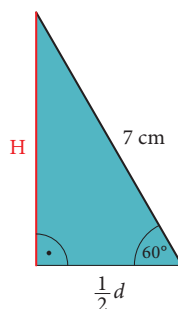


$$d = 7$$

$$H = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

$$H = 3,5\sqrt{3}$$

Długość wysokości tego ostrosłupa jest równa $3,5\sqrt{3}$ cm.



Zadania utrwalające

- Podaj, ile wierzchołków, krawędzi i ścian ma ostrosłup:
 - o podstawie trójkąta,
 - o podstawie trapezu równoramiennego,
 - ośmiokątny,
 - dwudziestokątny.
- Podstawą ostrosłupa jest studwdziesięstokąt. Ile krawędzi i ile wierzchołków ma ten ostrosłup?
- W ostrosłupie suma liczby wszystkich ścian, wierzchołków i krawędzi jest równa 50. Jaki wielokąt jest podstawą tego ostrosłupa?

4 Ostrosłup ma 12 ścian bocznych.

- a) Podaj liczbę jego wierzchołków.
- b) Podaj liczbę jego krawędzi.
- c) Podaj nazwę tego ostrosłupa.

5 Oceń prawdziwość zdań.

a) Jeżeli ostrosłup ma 12 wierzchołków, to liczba jego krawędzi jest równa 36.

| | |
|-----|-----|
| TAK | NIE |
|-----|-----|

b) Jeżeli ostrosłup ma 16 ścian, to liczba jego wierzchołków jest równa 36.

| | |
|-----|-----|
| TAK | NIE |
|-----|-----|

c) Jeżeli suma liczby wierzchołków i ścian ostrosłupa jest równa 12, to liczba krawędzi jest równa 10.

| | |
|-----|-----|
| TAK | NIE |
|-----|-----|

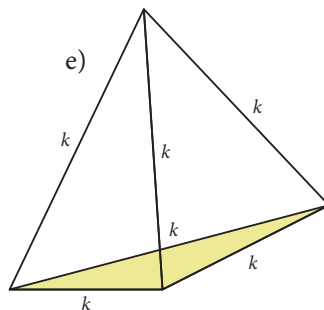
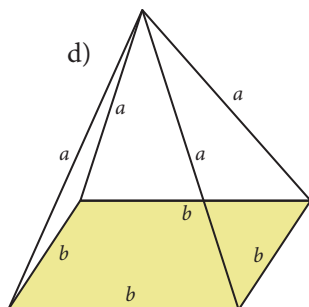
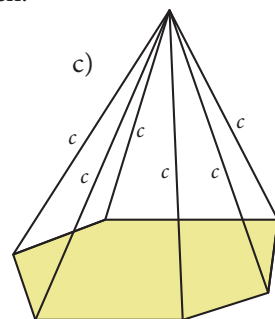
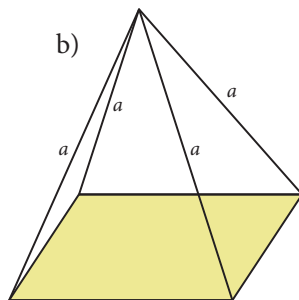
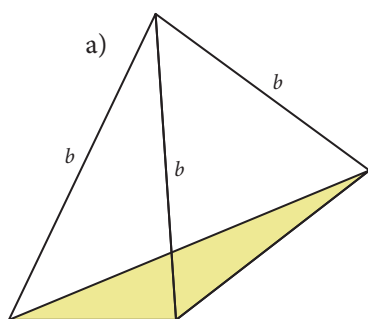
d) Jeżeli ostrosłup ma 14 krawędzi, to liczba jego ścian jest równa 8.

| | |
|-----|-----|
| TAK | NIE |
|-----|-----|

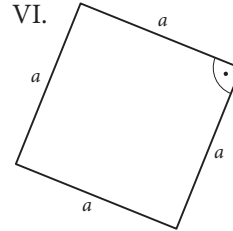
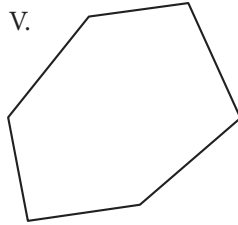
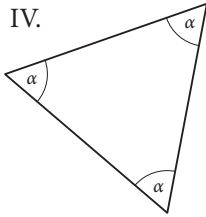
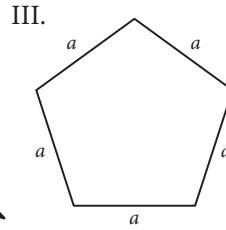
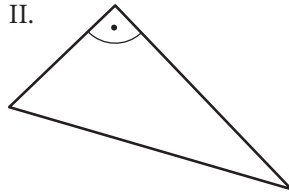
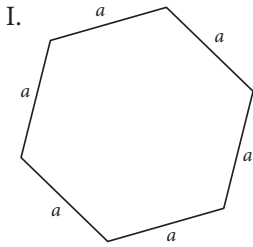
6 Podaj nazwę wielokąta będącego podstawą ostrosłupa, który ma:

- a) 9 ścian,
- b) 18 wierzchołków,
- c) 30 krawędzi.

7 Podaj nazwy ostrosłupów przedstawionych na rysunkach.

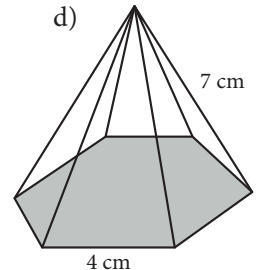
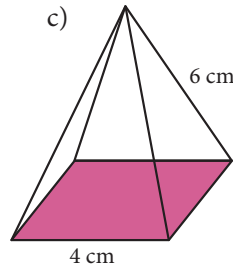
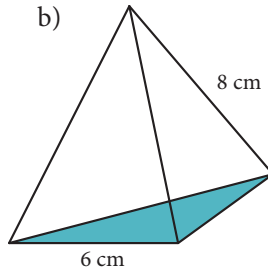
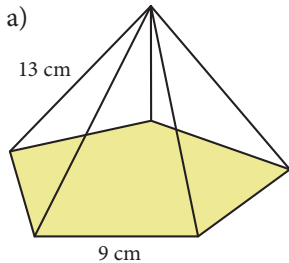


8 Połącz nazwę ostrosłupa i wielokąt będący jego podstawą. Krawędzie boczne podanych ostrosłupów są równej długości.



- A. ostrosłup trójkątny B. ostrosłup sześciokątny
 C. ostrosłup prawidłowy czworokątny D. ostrosłup prawidłowy pięciokątny
 E. ostrosłup prawidłowy trójkątny F. ostrosłup prawidłowy sześciokątny

9 Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupów prawidłowych.



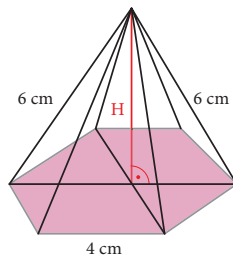
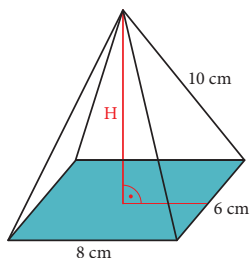
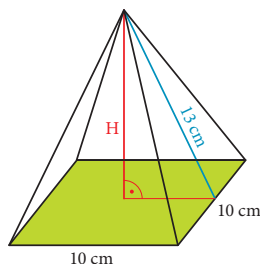
10 Jaką długość ma krawędź czworoscianu foremego, w którym suma długości wszystkich krawędzi jest równa 42 cm?

11 Jaką długość ma krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź podstawy ma długość 5 cm, a suma długości wszystkich krawędzi jest równa 73 cm?

12 Oblicz długość wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, w którym krawędź boczna o długości 12 cm jest nachylona do podstawy pod kątem 30° .

13 W każdym z ostrosłupów krawędzie boczne mają równe długości. Oblicz długość wysokości ostrosłupa:

a) o podstawie kwadratu, b) o podstawie prostokąta, c) o podstawie sześciokąta foremnego.



Wskazówka: W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym wysokość ostrosłupa jest odcinkiem łączącym wierzchołek ostrosłupa z punktem przecięcia się dłuższych przekątnych jego podstawy.



14 Jaś wykonał makietę piramidy z Luwru w Paryżu w skali 1:250. Piramida ta ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Oblicz długość wysokości ściany bocznej tej makiety. Wynik podaj w zaokrągleniu do całkowitej liczby centymetrów.

Ciekawostka

Piramida z Luwru — konstrukcja ze stali i szkła znajdująca się na dziedzińcu Luwru w Paryżu. Pomysłodawcą zbudowania piramidy był prezydent Francji François Mitterrand. Projekt konstrukcji wykonał Leoh Ming Pei. Piramida ma 20,6 m wysokości, a bok podstawy ma długość 35 m.

Źródło: www.wikipedia.pl.

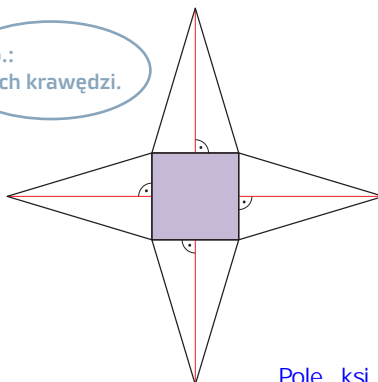
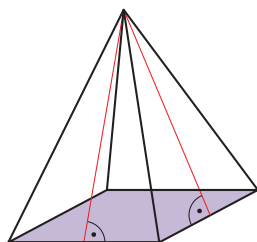
6.2. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa



Aby otrzymać siatkę ostrosłupa należy rozciąć np.: kartonowy model ostrosłupa wzdłuż odpowiednich krawędzi.



Rozciąłam model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wzdłuż jego krawędzi bocznych i otrzymałam taką siatkę.

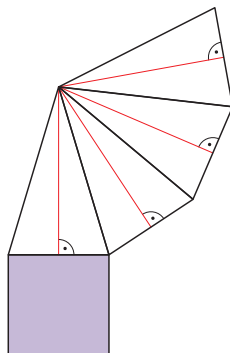


Kup ksi k

Pole ksi k

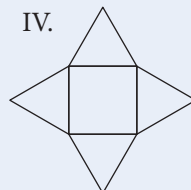
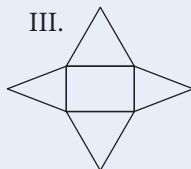
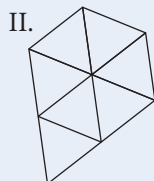
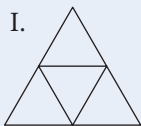


Ja rozciąłem model wzdłuż jednej krawędzi bocznej i trzech krawędzi podstawy.



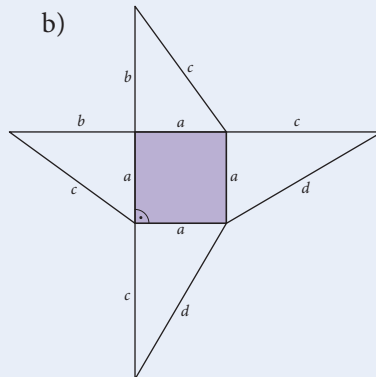
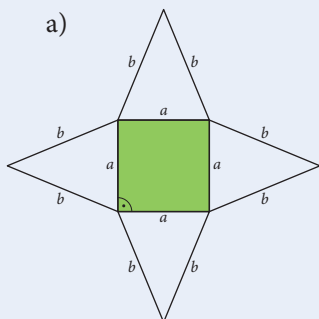
Przykład 6.6. Wskaż rysunek, który przedstawia siatkę:

a) czworoscianu, b) ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

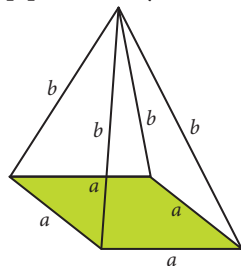


Na rysunku I znajduje się siatka czworoscianu foremnego, a na IV — ostrosłupa prawidłowego czworokątnego.

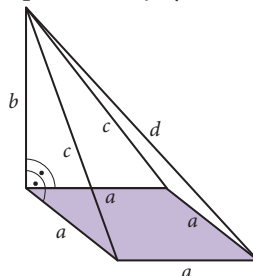
Przykład 6.7. Nazwij ostrosłup, którego siatkę przedstawia rysunek.



a) ostrosłup prawidłowy czworokątny



b) ostrosłup czworokątny



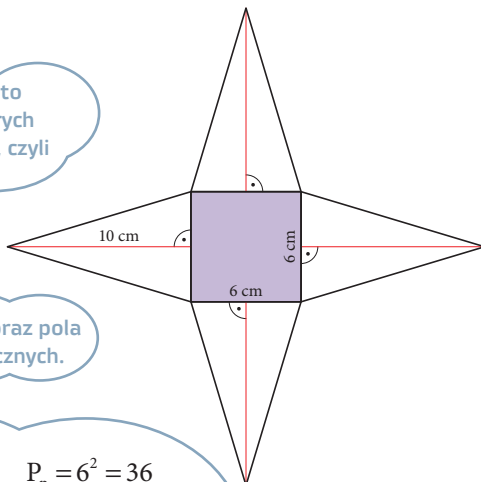
Przykład 6.8. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 6 cm i wysokości ściany bocznej długości 10 cm.



Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa to suma pól wszystkich wielokątów, z których zbudowana jest siatka tego ostrosłupa, czyli suma pól wszystkich jego ścian.



Należy obliczyć pole podstawy oraz pola czterech przystających ścian bocznych.



Obliczam pole podstawy, czyli pole kwadratu.

$$P_p = 6^2 = 36$$

Ściany boczne są trójkątami. Obliczam pole powierzchni bocznej.

$$P_s = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30$$

$$P_b = 4 \cdot P_s = 4 \cdot 30 = 120$$

Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe 156 cm^2 .

$$P_c = P_p + P_b = 36 + 120 = 156$$

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest sumą pól jego podstawy i wszystkich ścian bocznych. Możemy to zapisać za pomocą wzoru:

$$P_c = P_p + P_b,$$

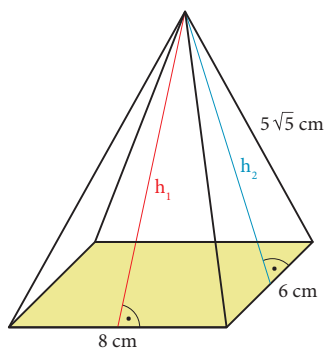
gdzie:

P_c oznacza pole powierzchni całkowitej,

P_b oznacza pole powierzchni bocznej,

P_p oznacza pole powierzchni podstawy.

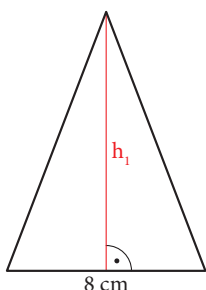
Przykład 6.9. Oblicz pole powierzchni ścian bocznych ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt o wymiarach $6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. Wszystkie krawędzie boczne są równe i mają długość $5\sqrt{5} \text{ cm}$.



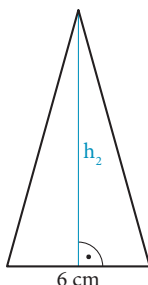
Aby obliczyć pole powierzchni bocznej, należy wyznaczyć długości wysokości ścian bocznych.

Ścianami bocznymi tego ostrosłupa są dwie pary przystających trójkątów.

Wyznaczamy wysokości ścian bocznych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.



$$\begin{aligned} h_1^2 + 4^2 &= (5\sqrt{5})^2 \\ h_1^2 + 16 &= 125 \\ h_1^2 &= 109 \\ h_1 &= \sqrt{109} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} h_2^2 + 3^2 &= (5\sqrt{5})^2 \\ h_2^2 + 9 &= 125 \\ h_2^2 &= 116 \\ h_2 &= 2\sqrt{29} \end{aligned}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

$$P_b = 2 \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{109}}{2} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 2\sqrt{29}}{2} = 8\sqrt{109} + 12\sqrt{29}$$

$$P_b = 4(2\sqrt{109} + 3\sqrt{29})$$

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe $4(2\sqrt{109} + 3\sqrt{29}) \text{ cm}^2$.

Przykład 6.10. Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o boku długości a .

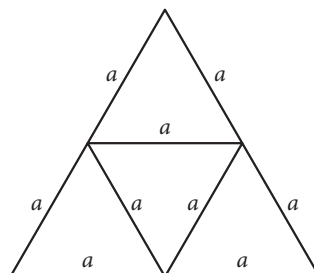
Czworościan foremny to ostrosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami równobocznymi.

Obliczamy pole powierzchni jednej ze ścian.

$$P_s = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Otrzymujemy pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego.

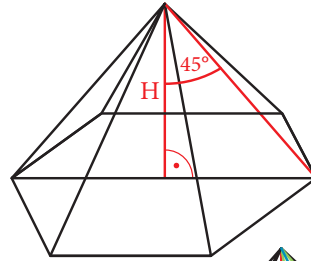
$$P_c = 4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$



Przykład 6.11. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wysokość o długości 9 cm tworzy z krawędzią boczną kąt 45° .

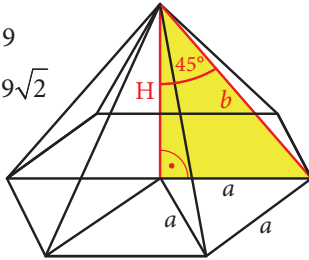


Krawędź boczna, wysokość ostrosłupa i połowa przekątnej podstawy tworzą trójkąt będący połową kwadratu.

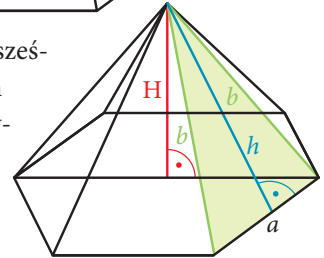


$$a = 9$$

$$b = 9\sqrt{2}$$



Ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma sześć ścian bocznych, które są przystającymi trójkątami równoramiennymi.



Wykorzystujemy twierdzenie Pitagorasa.

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 = b^2$$

Podstawiamy długości odpowiednich odcinków i otrzymujemy poniższe równanie.

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 + h^2 = (9\sqrt{2})^2$$

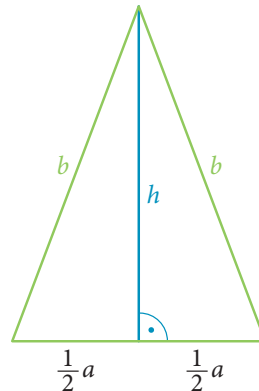
$$\frac{81}{4} + h^2 = 162$$

$$h^2 = 162 - 20\frac{1}{4}$$

$$h^2 = 141\frac{3}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{567}{4}}$$

$$h = \frac{9\sqrt{7}}{2}$$



Obliczamy pole jednej ściany. $P_s = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{9\sqrt{7}}{2} = \frac{81\sqrt{7}}{4}$

Podstawą tego ostrosłupa jest sześciokąt foremny. $P_p = 6 \cdot \frac{9^2\sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}$

Obliczamy pole powierzchni całkowitej.

$$P_c = \frac{243\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot \frac{81\sqrt{7}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2} + \frac{243\sqrt{7}}{2} = \frac{243}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})$$

Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $\frac{243}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \text{ cm}^2$.

Zadania utrwalające

1 Dobierz odpowiednią długość odcinka, tak aby zdanie było prawdziwe. Uzasadnij swój wybór.

a) Jeżeli długość wysokości ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma 12 cm, to wysokość ściany bocznej może mieć długość:

| | | |
|------|-------|-------|
| 8 cm | 12 cm | 14 cm |
|------|-------|-------|

b) Jeżeli krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm, to wysokość ściany bocznej może mieć długość:

| | | |
|------|------|------|
| 2 cm | 4 cm | 6 cm |
|------|------|------|

c) Jeżeli krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4 cm, to krawędź boczna może mieć długość:

| | | |
|------|------|------|
| 3 cm | 4 cm | 5 cm |
|------|------|------|

d) Jeżeli krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 8 cm, to wysokość ściany bocznej może mieć długość:

| | | |
|------|------|-------|
| 6 cm | 8 cm | 10 cm |
|------|------|-------|

2 Narysuj siatki opisanych poniżej brył, a następnie wytnij je i wklej podstawami do zeszytu.

a) Czworoscian foremny o krawędzi długości 6 cm.

b) Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości 4 cm i wysokości ściany bocznej długości 8 cm.

c) Ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędzie podstawy mają długość 6 cm, a każda krawędź boczna ma długość 5 cm.

3 Oblicz pole powierzchni całkowitej czworoscianu foremnego o krawędzi długości:

a) 3 cm,

b) 12 dm,

c) 1,5 m.

4 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 4 cm i wysokości ściany bocznej długości 8 cm.

5 Oblicz pole powierzchni całkowitej czworoscianu prawidłowego o krawędzi bocznej długości 5 cm i krawędzi podstawy długości:

a) 2 cm,

b) 6 cm,

c) 0,8 dm.

6 Oblicz długość krawędzi czworoscianu foremnego, jeżeli jego pole powierzchni całkowitej jest równe:

a) $36\sqrt{3}$ cm²,

b) $4\sqrt{3}$ dm²,

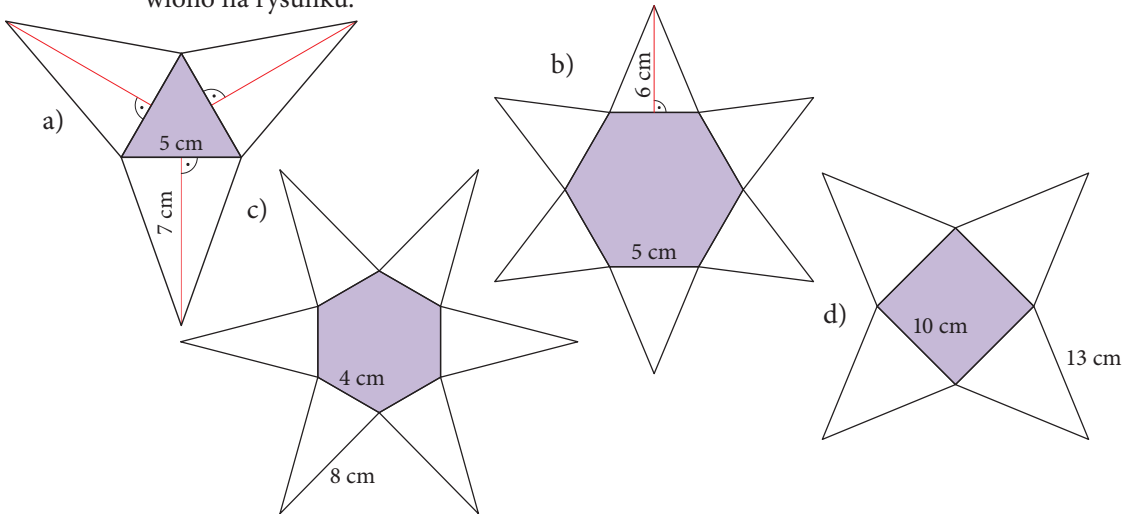
c) $75\sqrt{3}$ m².

7 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 6 cm, jeżeli:

a) kąt zawarty pomiędzy krawędzią boczną i dłuższą przekątną podstawy ma miarę 60°,

b) kąt zawarty pomiędzy krawędzią boczną i dłuższą przekątną podstawy ma miarę 45°.

- 8 Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



- 9 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 10 cm, jeżeli:

- a) kąt pomiędzy krawędzią boczną i przekątną podstawy ma miarę 60° ,
 b) kąt pomiędzy krawędzią boczną i przekątną podstawy ma miarę 45° .

- 10 Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 340 cm^2 . Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 10 cm. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

- 11 Ania zbudowała model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego w skali 2:1. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa Ani jest równe 448 cm^2 , a krawędź podstawy ma długość 16 cm. Basia zbudowała model tego samego ostrosłupa w skali 1:2. Podaj długości krawędzi ostrosłupa, który zrobiła Basia.



- 12 Oblicz pole powierzchni bocznej piramidy Cestiusza — monumentalnego grobowca wzniesionego w 12 r. p.n.e. w Rzymie.

Ciekawostka

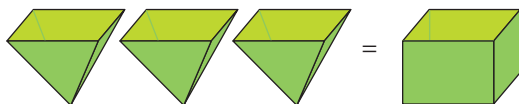
Piramida Cestiusza ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 37 m i boku podstawy równym 30 m. Jest największą i najlepiej zachowaną piramidą spośród zbudowanych w Rzymie po podbiciu Egiptu (30 r. p.n.e.). Z zewnątrz jest obłożona blokami marmuru. Wewnątrz znajduje się komora grobowa, do której prowadzi korytarz zamurowany po pogrzebie.



Zachowały się też w niej pozostałości malowideł w trzecim stylu pompejańskim.

Źródło: www.wikipedia.org.

6.3. Objętość ostrosłupa



Zrobiliśmy doświadczenie. Wsypaliśmy ryż do trzech jednakowych pojemników w kształcie ostrosłupów, a następnie przesypano go do pojemnika w kształcie graniastosłupa. Czy wiesz, dlaczego ryż z trzech identycznych pojemników w kształcie ostrosłupów idealnie wypełni pojemnik w kształcie graniastosłupa?

Stało się tak, ponieważ ostrosłup i graniastosłup miały przystające podstawy i wysokość tej samej długości.



Objętość ostrosłupa obliczamy, posługując się wzorem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H,$$

gdzie

P_p oznacza pole podstawy,

H oznacza długość wysokości ostrosłupa.



Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza od objętości graniastosłupa o tej samej podstawie i wysokości tej samej długości.

Przykład 6.12. Oblicz objętość ostrosłupa, którego pole podstawy jest równe 100 cm^2 . Długość wysokości tego ostrosłupa jest równa 36 cm .

Podstawiamy do wzoru dane i obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 36 = 1200$$

Objętość tego ostrosłupa jest równa 1200 cm^3 .

Przykład 6.13. Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości 45 cm^3 . Długość wysokości tego ostrosłupa jest równa 15 cm .

Korzystając ze wzoru na obliczenie objętości, otrzymamy równanie, które następnie rozwiążemy.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$45 = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot 15 \quad /:3$$

$$135 = 15 \cdot P_p \quad /:15$$

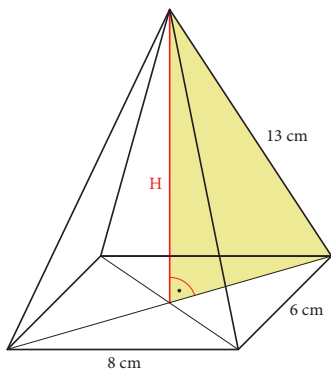
Wyznaczamy pole podstawy. $P_p = 9$

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o polu równym 9 cm^2 . $a^2 = 9$
 $a = 3$

Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość 3 cm .

Przykład 6.14. Model ostrosłupa wykonano z drewna dębowego. Oblicz objętość ostrosłupa, jeżeli wszystkie jego krawędzie boczne mają długość 13 cm, a podstawa jest prostokątem o bokach długości 8 cm i 6 cm. Oblicz masę tego modelu, jeżeli gęstość drewna dębowego jest równa 800 kg/m^3 .

W danym ostrosłupie wyznaczamy trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną jest krawędź boczna ostrosłupa, a przyprostokątnymi są wysokość ostrosłupa i połowa przekątnej podstawy.



Wyznaczamy długość przekątnej podstawy.

$$d^2 = 8^2 + 6^2$$

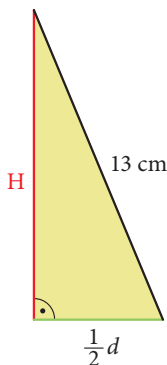
$$d^2 = 64 + 36$$

$$d^2 = 100$$

$$d = 10$$

$$\frac{1}{2}d = 5$$

Połowa przekątnej podstawy ma długość 5 cm.



Obliczamy długość wysokości ostrosłupa.

$$H^2 + 5^2 = 13^2$$

$$H^2 = 13^2 - 5^2$$

$$H^2 = 169 - 25$$

$$H^2 = 144$$

$$H = 12$$

Wyzaczyliśmy długości odcinków koniecznych do obliczenia objętości ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 6 \cdot 12 = 192$$

Objętość tego ostrosłupa jest równa 192 cm^3 .

$$192 \text{ cm}^3 = 0,000192 \text{ m}^3$$

Obliczamy masę modelu ostrosłupa.

$$m = 0,000192 \cdot 800 = 0,1536$$

$$0,1536 \text{ kg} = 15,36 \text{ dag}$$

Masa modelu ostrosłupa wykonanego z drewna dębowego jest równa 15,36 dag.

gęstość = $\frac{m}{V}$
 m — masa
 V — objętość

Zadania utrwalające

1 Uzupełnij brakujące zapisy.

a) $12 \text{ m}^3 = \dots\dots \text{ cm}^3$

b) $5,5 \text{ m}^3 = \dots\dots \text{ dm}^3$

c) $1080 \text{ mm}^3 = \dots\dots \text{ cm}^3$

d) $88 \text{ l} = \dots\dots \text{ m}^3$

e) $20 \text{ l} = \dots\dots \text{ hl}$

f) $43 \text{ m}^3 = \dots\dots \text{ l}$

2 Oceń prawdziwość zdań.

a) Objętość ostrosłupa jest równa objętości graniastosłupa o tej samej podstawie co ostrosłup i wysokości równej wysokości ostrosłupa.

| | |
|---|---|
| P | F |
|---|---|

b) Objętość ostrosłupa jest trzy razy mniejsza od objętości graniastosłupa o tej samej podstawie co ostrosłup i wysokości równej wysokości ostrosłupa.

| | |
|---|---|
| P | F |
|---|---|

c) Objętość ostrosłupa jest równa objętości graniastosłupa o tej samej podstawie co ostrosłup i wysokości trzy razy krótszej od wysokości ostrosłupa.

| | |
|---|---|
| P | F |
|---|---|

d) Objętość ostrosłupa jest równa objętości graniastosłupa o polu podstawy trzy razy mniejszym od pola podstawy ostrosłupa i wysokości trzy razy mniejszej od wysokości ostrosłupa.

| | |
|---|---|
| P | F |
|---|---|

3 Oblicz objętość ostrosłupa, którego podstawą jest kwadrat o boku długości a i o wysokości długości 18 cm, jeżeli:

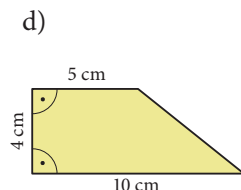
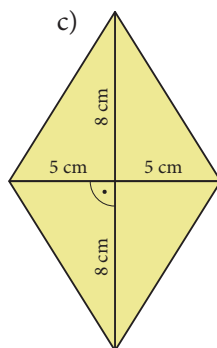
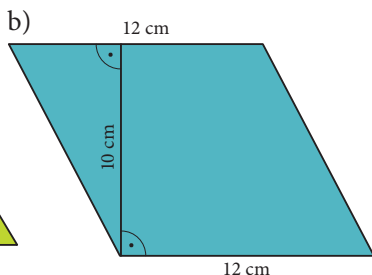
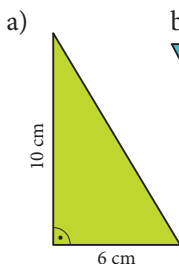
a) $a = 5 \text{ cm}$,

b) $a = 11 \text{ cm}$,

c) $a = 0,8 \text{ dm}$,

d) $a = 1\frac{3}{4} \text{ cm}$.

4 Oblicz objętość ostrosłupa o wysokości równej 20 cm i podstawie przedstawionej na rysunku.



5 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość ma długość 12 cm. Krawędź podstawy ma długość:

a) 4 cm,

b) 14 cm,

c) 2,4 cm.

6 Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach 12 cm i 5 cm. Wysokość tego ostrosłupa ma długość równą 6 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

7 Objętość ostrosłupa o podstawie trójkąta jest równa 104 dm^3 . Pole podstawy bryły wynosi 24 dm^2 . Oblicz długość wysokości tego ostrosłupa.

8 Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o boku długości 14 cm . Oblicz długość wysokości tego ostrosłupa, jeżeli jego objętość jest równa:

- a) 588 cm^3 , b) $19,6 \text{ cm}^3$.

9 Oblicz objętość ostrosłupa o wysokości długości 9 cm i podstawie będącej:

- a) kwadratem o boku długości 7 cm ,
b) prostokątem, w którym sąsiednie boki mają długość 4 cm i 6 cm ,
c) trójkątem równoramiennym o podstawie długości 10 cm i ramionach długości 13 cm ,
d) trapezem równoramiennym o podstawach długości 17 cm i 5 cm oraz wysokości długości 8 cm .

10 Oblicz objętość ostrosłupa, którego długość wysokości jest równa 10 cm . Podstawą bryły jest prostokąt. Obwód podstawy wynosi 48 cm . Stosunek długości boków prostokąta jest równy $3:5$.

11 Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy długości a oraz wysokości długości H . Napisz, jak zmieni się objętość tego ostrosłupa, gdy:

- a) długość krawędzi podstawy zwiększymy trzy razy,
b) długość krawędzi podstawy zmniejszymy dwukrotnie,
c) długość wysokości zmniejszymy cztery razy.

12 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 18 cm , jeżeli:

- a) kąt między krawędzią boczną a przekątną podstawy ma miarę 60° ,
b) kąt między krawędzią boczną a przekątną podstawy ma miarę 45° .

13 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 12 cm , jeżeli:

- a) kąt między krawędzią boczną i dłuższą przekątną podstawy ma miarę 60° ,
b) kąt między krawędzią boczną i dłuższą przekątną podstawy ma miarę 45° .

Ciekawostka


Diament to forma węgla o regularnym układzie krystalograficznym. Jest najtwardszym znanym minerałem – jego twardość w skali Mohsa wynosi 10 . Gęstość diamentu jest równa $3,52 \text{ g/cm}^3$. Diament jest trudno topliwym izolatorem odpornym na działanie kwasów i zasad. Minerał ten powstaje w głębi Ziemi pod wpływem wysokiej temperatury oraz ciśnienia.


Masę diamentu określa się w karatach (ct).

$$1 \text{ ct} = \frac{1}{5} \text{ g} = 0,2 \text{ g}$$

Źródło: www.wikipedia.com.

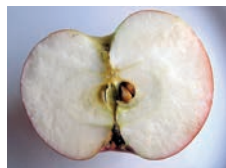


 **14** Przeczytaj ciekawostkę i oblicz masę diamentu w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wszystkich krawędziach długości 6 cm. Przyjmij $\sqrt{2} \approx 1,41$. Sprawdź, jaka jest masa tego diamentu, gdy przyjmiemy przybliżenie liczby $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

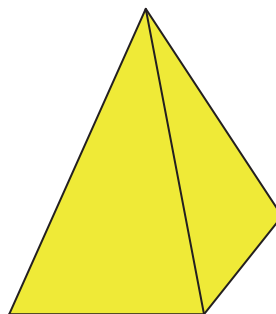
 **15** Oblicz masę diamentu w kształcie czworościanu foremnego o krawędzi długości 0,9 cm. Wynik wyraż w karatach.

6.4. Przekroje ostrosłupów. Treści nadobowiązkowe

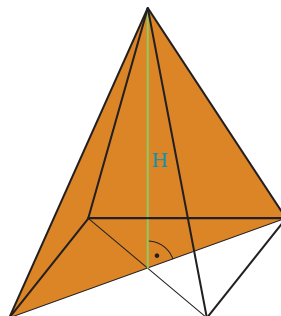
Przecinamy owoce, kroimy chleb. Podobnie możemy rozcinać bryły.



Tomek przyniósł model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego zrobiony z modeliny.

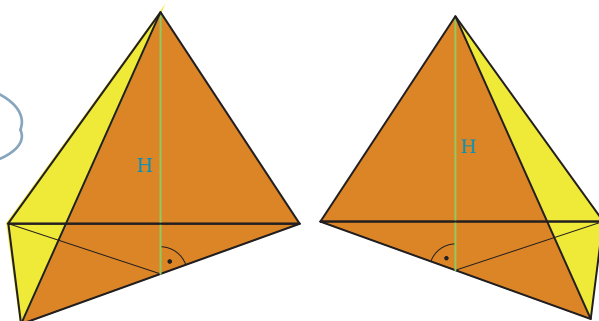


Przekroiliśmy ten model ostrosłupa wzdłuż przeciwległych krawędzi bocznych i odpowiedniej przekątnej podstawy.





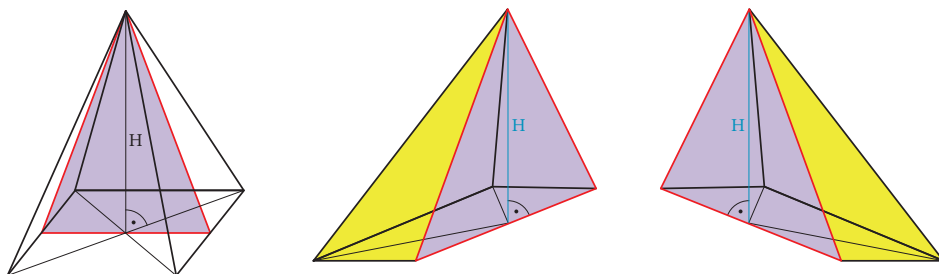
Otrzymaliśmy dwa takie same modele ostrosłupów, tak jak na rysunku obok.



Wyróżnioną kolorem brązowym figurę nazywamy przekrojem ostrosłupa. Przekrój ten jest trójkątem równoramiennym. Jego podstawą jest przekątna podstawy ostrosłupa, a ramionami są krawędzie boczne ostrosłupa.



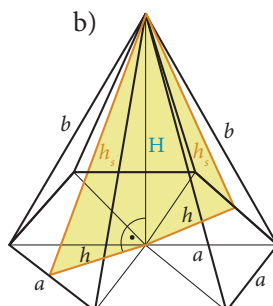
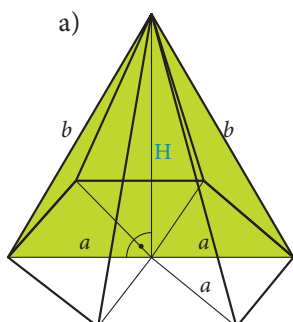
Innym przekrojem tego samego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkąt zaznaczony na poniższym rysunku kolorem fioletowym.



Przykład 6.15. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym zaznacz przekrój wyznaczony przez:

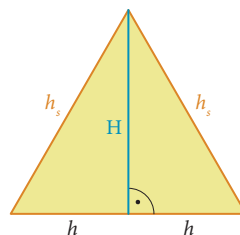
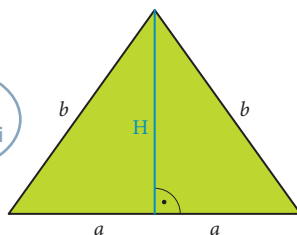
- przeciwnie leżące krawędzie boczne ostrosłupa,
- wysokości przeciwnych ścian bocznych ostrosłupa.

Opisz powstałe przekroje. Oblicz pola tych przekrojów, jeżeli krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 6 cm, a długość krawędzi bocznej jest równa 10 cm.

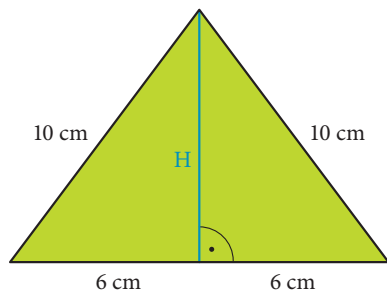




Otrzymane w przykładzie przekroje ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego są trójkątami równoramiennymi.



Obliczamy pola otrzymanych przekrojów.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość wysokości otrzymanego trójkąta.

$$H^2 + 6^2 = 10^2$$

$$H^2 = 100 - 36$$

$$H = 8$$

Obliczamy pole przekroju.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$$

Pole tego przekroju jest równe 48 cm^2 .

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość wysokości ściany bocznej ostrosłupa oraz długość odcinka łączącego środki przeciwległych krawędzi podstawy.

$$h_s^2 + 3^2 = 10^2$$

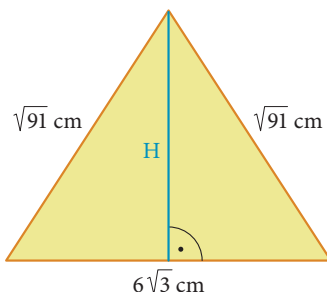
$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$h_s^2 = 100 - 9$$

$$h = 3\sqrt{3}$$

$$h_s = \sqrt{91}$$

$$2h = 6\sqrt{3}$$



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość wysokości przekroju.

$$H^2 + (3\sqrt{3})^2 = \sqrt{91}^2$$

$$H^2 = 91 - 27$$

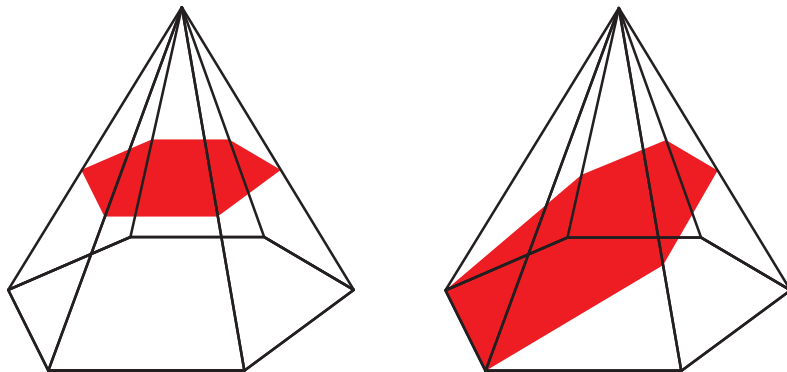
$$H = 8$$

Obliczamy pole przekroju.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 8 = 24\sqrt{3}$$

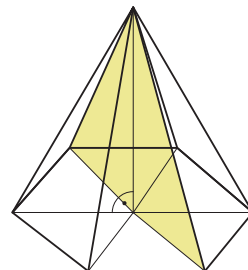
Pole tego przekroju jest równe $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Przykłady innych przekrojów ostrosłupów:

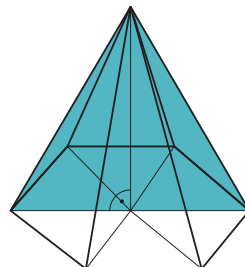


Zadania utrwalające

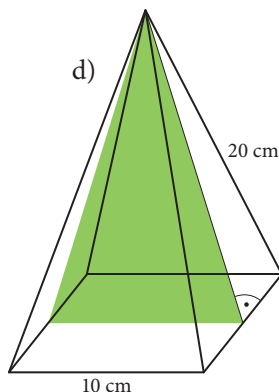
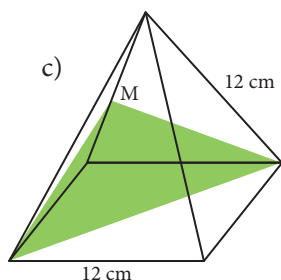
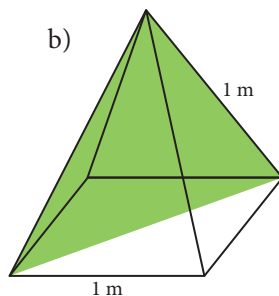
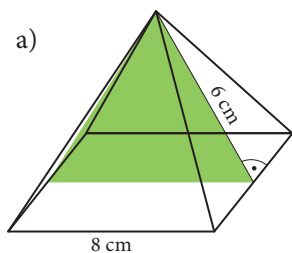
- 1 W czworoscianie foremnyim połącz środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Naskicuj przekrój wyznaczony przez te punkty. Jaką figurą jest ten przekrój?
- 2 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym połącz środki dwóch równoległych krawędzi podstaw. Naskicuj przekrój wyznaczony przez te punkty i wierzchołek ostrosłupa. Jaką figurą jest ten przekrój?
- 3 Ostrosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy długości 5 cm i wysokości długości 13 cm przecięto wzdłuż krawędzi bocznych, jak na rysunku obok. Oblicz pole tego przekroju.



- 4 Wysokość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm. Pole zaznaczonego na rysunku przekroju zawierającego krawędzie boczne jest równe 40 cm^2 . Oblicz objętość tego ostrosłupa.

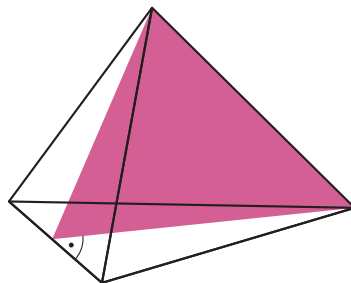


5 Oblicz pola zaznaczonych przekrojów ostrosłupów prawidłowych czworokątnych.



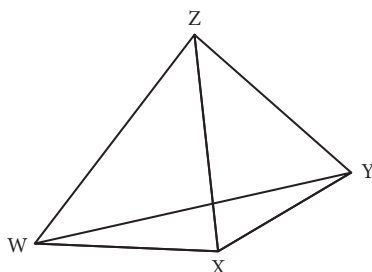
Punkt M jest środkiem krawędzi bocznej.

6 Na rysunku przedstawiono przekrój zawierający wysokości dwóch ścian i krawędź boczną. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeżeli krawędź czworoscianu foremnego ma długość 6 m.

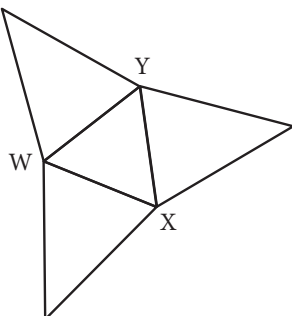


7 Ostrosłup prawidłowy trójkątny WXYZ przecięto wzdłuż wysokości podstawy i krawędzi bocznej wychodzącej z tego samego wierzchołka.

- Jaką figurą jest ten przekrój?
- Oblicz obwód tego przekroju, jeżeli krawędź podstawy ma długość 9 dm. Długość krawędzi bocznej jest równa 7 dm.



- c) Wskaż inne przekroje tego ostrosłupa mające taki sam kształt i takie same wymiary.
 d) Na siatce tego ostrosłupa zaznacz odcinki wyznaczające opisany przekrój.



8 Ustal, czy przekrój czworoscianu foremnego może być:

- a) kwadratem,
 b) trójkątem równobocznym,
 c) prostokątem,
 d) trapezem.

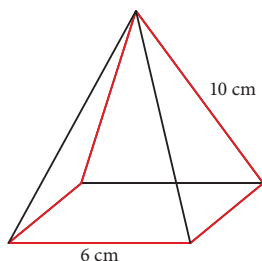
| | |
|-----|-----|
| TAK | NIE |
| TAK | NIE |
| TAK | NIE |
| TAK | NIE |

Uzasadnij wybór i wykonaj odpowiednie rysunki.

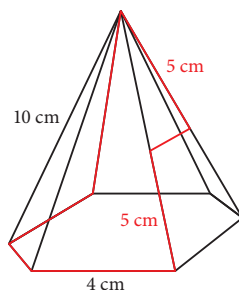
Zadania do rozwiązywania w grupie

1 Na siatce ostrosłupa narysuj drogę, jaką musi przebyć mrówka poruszająca się wzdłuż odcinków zaznaczonych na rysunkach kolorem czerwonym.

a) ostrosłup prawidłowy czworokątny



b) ostrosłup prawidłowy sześciokątny



2 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości a cm, jeżeli:

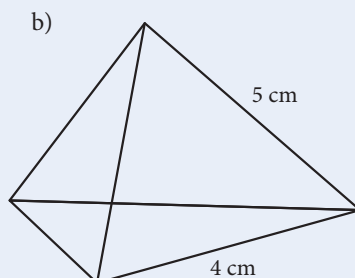
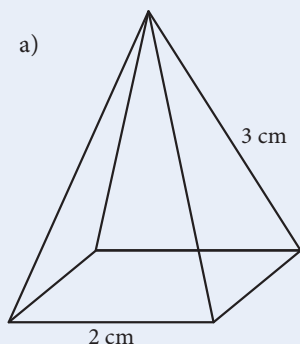
- a) kąt między krawędzią boczną i dłuższą przekątną podstawy ma miarę 60° ,
 b) kąt między krawędzią boczną i dłuższą przekątną podstawy ma miarę 45° .

- 3 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości a cm, jeżeli:
- kąt między krawędzią boczną i przekątną podstawy ma miarę 60° ,
 - kąt między krawędzią boczną i przekątną podstawy ma miarę 45° .

6.5. Krok do egzaminu

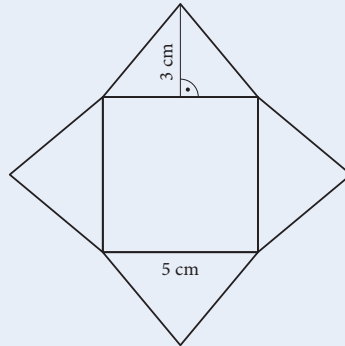
Zadania powtórzeniowe

- 1 Wpisz brakujące liczby.
- $0,16 \text{ m}^3 = \dots\dots\dots l$
 - $32 \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots l$
 - $12,5 l = \dots\dots\dots hl$
 - $0,2371 l = \dots\dots\dots \text{cm}^3$
- 2 Podaj liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian ostrosłupa o podstawie:
- czworokąta,
 - dziesięciokąta,
 - dwudziestopięciokąta.
- 3 Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego ma długość 13 cm, a długość krawędzi podstawy jest równa 7 cm. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:
- pięciokąt,
 - osiemnastokąt.
- 4 Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego.



- 5 Oblicz pole powierzchni ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a wysokość ściany bocznej ma długość 4 cm.
- 6 Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 92 cm. Krawędź podstawy ma długość 10 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

- 7 Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego długość krawędzi podstawy jest równa 8 cm. Długość wysokości tego ostrosłupa wynosi 6 cm.
- 8 Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm, a jego pole powierzchni bocznej wynosi 72 cm^2 . Oblicz obwód podstawy tego ostrosłupa.
- 9 Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 64 dm^2 . Długość wysokości ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 5 dm. Oblicz jego pole powierzchni bocznej.
- 10 Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



- 11 Wysokość ściany czworobocianu foremny ma długość $4\sqrt{6}$ cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej bryły.
- 12 W ostrosłupie prawidłowym krawędź boczna ma długość 8 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawa jest:
- kwadratem, a kąt między krawędzią boczną i przekątną podstawy ma miarę 30° ,
 - sześciokątem foremnym, a kąt między krawędzią boczną a dłuższą przekątną podstawy ma miarę 30° .
- 13 Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $8\sqrt{2}$ cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego krawędź boczna stanowi 120% krawędzi podstawy.
- 14 Dach budynku ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 5 m i wysokości długości 3 m. Ile metrów kwadratowych blachy potrzeba na pokrycie tego dachu? Podaj wynik z dokładnością do części setnych. Wykonaj rysunek pomocniczy.
- 15 Klasa IID przygotowała przedstawienie o Królowie Śnieżce. Dekoracje wykonali uczniowie. Janek i Jacek zrobili wieżę i na jej szczycie umieścili ostrosłup prawidłowy czworokątny, który okleili folią w kolorze złotym (z pominięciem podstawy). Jaką powierzchnię pokryli tą folią, jeżeli krawędź podstawy ozdobnego ostrosłupa ma długość 120 cm, a jego wysokość ma długość 80 cm? Wynik podaj w metrach kwadratowych.

Zadania z egzaminów

1 Tomek ogląda zdjęcie, które przedstawia piramidę Cheopsa. Piramida Cheopsa ma kształt¹

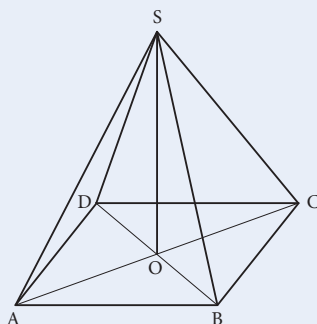
- A. prostopadłościanu.
- B. graniastosłupa o podstawie kwadratu.
- C. ostrosłupa o podstawie kwadratu.
- D. stożka.



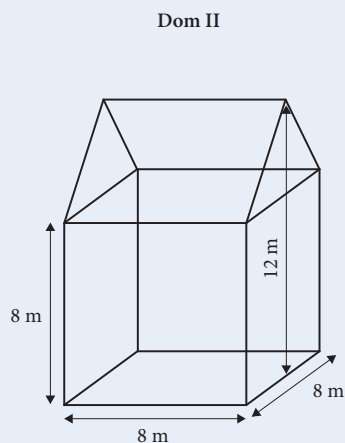
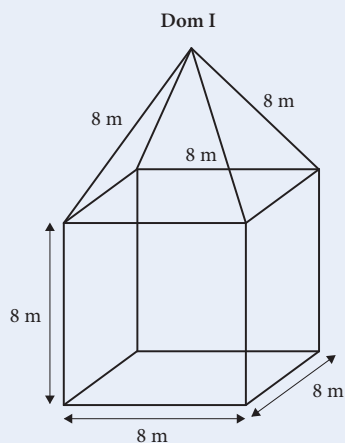
2 Krawędź czworobocianu foremnego ma długość 4 cm. Pole powierzchni całkowitej tego czworobocianu jest równe²

- A. $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- B. $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- C. $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- D. $32\sqrt{3} \text{ cm}^2$

3 Piramida ma kształt ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Ile cm^2 papieru potrzeba na wykonanie modelu tej piramidy (wraz z podstawą), w którym krawędzie podstawy mają długość 10 cm, a wysokość 12 cm? Ze względu na zakładki zużycie papieru jest większe o 5%. Zapisz obliczenia³.



4 Na sąsiednich działkach wybudowano domy różniące się kształtem dachów (patrz: rysunki). Który dach ma większą powierzchnię? Zapisz obliczenia⁴.



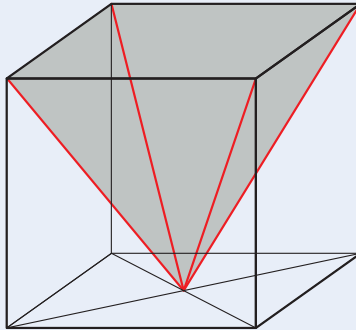
¹ Egzamin, maj 2004.

² Egzamin, kwiecień 2010.

³ Egzamin, kwiecień 2005.

⁴ Egzamin 2009.

- 7** Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat o boku długości 7 cm. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa ma długość 10 cm. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe
- A. 70 cm^2 B. 140 cm^2 C. 189 cm^2 D. 490 cm^2
- 8** Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 6 cm i krawędzi bocznej długości 5 cm jest równe
- A. 20 cm^2 B. 40 cm^2 C. 84 cm^2 D. 166 cm^2
- 9** Objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 5 cm i wysokości długości 6 cm wynosi
- A. $75\sqrt{3} \text{ cm}^3$ B. $225\sqrt{3} \text{ cm}^3$ C. $5\sqrt{15} \text{ cm}^3$ D. 60 cm^3
- 10** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym każda krawędź ma długość 8 cm. Wysokość tego ostrosłupa ma długość
- A. $2\sqrt{2} \text{ cm}$ B. $8\sqrt{2} \text{ cm}$ C. $4\sqrt{2} \text{ cm}$ D. $16\sqrt{2} \text{ cm}$
- 11** Dane są ostrosłupy: prawidłowy czworokątny i prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy długości 4 cm. Wysokość ściany bocznej każdego z tych ostrosłupów ma długość 4 cm.
- a) Oblicz objętość każdego z tych ostrosłupów.
b) Oblicz stosunek objętości tych ostrosłupów.
- 12** Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy długości 14 cm i wysokości długości 2,4 dm.
- 13** Z sześcianu o krawędzi długości 3 cm wycięto ostrosłup taki, jak pokazano na rysunku. Oblicz objętość bryły, która pozostała po wycięciu tego ostrosłupa.



Indeks ważniejszych terminów

A

ABF, 137
Ahmes, 21
Artificial Bacterial Flagella, *patrz*: ABF

C

cięciwa, 10, 14
czworościan, 202
foremny, 202

D

diagram, 264, 265
kołowy, 266, 267
słupkowy, 266
diament, 218
dominanta, *patrz*: moda
dwusieczna kąta, *patrz*: kąt dwusieczna
działania
na potęgach, *patrz*: potęga działania
na pierwiastkach, *patrz*: pierwiastek
działania

E

Eulera reguła, *patrz*: reguła Eulera

F

Fahrenheit Daniel Gabriel, 71
figura
osiowosymetryczna, 238
środkowosymetryczna, 249, 250
funkcja, 52, 54
argument, 54, 64
dziedzina, 54, 60
miejsce zerowe, 64
wartość, 54

własności, 64
wykres, 58, 59, 60
zbiór wartości, 54

G

graf, 52, 53, 54
graniastosłup, 186, 201
pole powierzchni całkowitej, 189
przekątna, 186, 187, 188
podstawa, 186
ściana boczna, 186

J

jednostka
astronomiczna, 134
w układzie SI, 138, 304

K

kąt
dwusieczna, 241, 242
łamiący pryzmatu, 203
pełny, 11
prosty, 17
środkowy, 12, 16, 31
wpisany, 14, 16, 17
koło, 10
kwadratura, *patrz*: kwadratura koła
pole, 24, 25
wycinek, 30, 31, 301
promień, 10
pole, *patrz*: koło pole wycinka
kwadrat, 168, 174, 202
pole, 165, 175
przekątna, 153, 175, 301
kwadratura koła, 159

L

liczba

- niewymierna, 153
- podpierwiastkowa, 141
- π , 21

Ludolf van Ceulen, 21

ł

łuk, 10, 11

- długość, 28, 29, 301

M

mediana, 270, 271, 272

metoda

- podstawiania, 96
- przeciwnych współczynników, 101

Międzynarodowy Układ Jednostek

- Miar, 138

moda, 270, 271

N

niewymierność, 153

notacja wykładnicza, 134, 301

O

odcięta, 254

odcinek

- oś symetrii, *patrz*: oś symetrii
- odcinka
- symetralna, *patrz*: oś symetrii
- odcinka

okrąg, 10, 20, 33

- cięciwa, 10, 14
- długość, 20, 21, 301
- promień, 10, 301
- sieczna, 39
- styczna, 39

ostrosłup, 200, 201, 202

- objętość, 215, 301
- pole powierzchni całkowitej, 208, 210, 301
- prawiłowy, 202
- przekrój, 219, 221
- wierzchołek, 201
- wysokość, 204

oś symetrii, 232, 238, 239, 253

- kąta, 242
- odcinka, 241, 242
- prostokąta, *patrz*: prostokąt
- oś symetrii

P

pierścień kołowy, 36

pierwiastek

- drugiego stopnia, 141, 301
- działania, 151
- kwadratowy, *patrz*: pierwiastek
- drugiego stopnia
- obliczanie za pomocą rozkładu
- na czynniki pierwsze,
- stopień, 141
- trzeciego stopnia, 142, 301

pierwiastkowania własności, 147, 302

piramida Cestiusza, 200, 214

Pitagoras, 164

Pitagorasa twierdzenie, *patrz*:

- twierdzenie Pitagorasa

Playfair William, 267

potęga, 124

- działania, 131, 302
- iloczyn, 131, 302
- iloraz, 131, 302
- o wykładniku naturalnym, 124
- o wykładniku całkowitym, 127
- o wykładniku ujemnym, 127, 301

promień, 10

prostokąt, 168
oś symetrii, 240
przekątna, 169, 204, 240
pryzmat, 203
kąt łamiący, 203
przeciwprostokątna, 164, 170
przyprostokątna, 164

R

reguła Eulera, 201
rok świetlny, 134
romb, 168, 187
równanie
stopnia pierwszego z dwiema
niewiadomymi, 86
układ równań, 90
rozwiązywanie układów równań,
96, 101, 106
równoległobok, 168, 169
ryjówka etruska, 138
rzędna, 254

S

SI, *patrz*: Międzynarodowy
Układ Jednostek Miar
stopnie
Celsjusza, 70
Fahrenheita, 70
styczna do okręgu, *patrz*: okrąg styczna
symetria
oś, *patrz*: oś symetrii
środek symetrii, 249
w prostokątnym układzie
współrzędnych, 253
względem prostej, 232
względem punktu, 244
sześcianu przekątna, 188, 301

Ś

ślimak Teodorosa, 178
średnia arytmetyczna, 270, 271, 301
średnica, 11
środek symetrii, *patrz*: symetria środek

T

temperatura, 70
Teodorosa ślimak, *patrz*: ślimak
Teodorosa
trójka pitagorejska, 190
trójkąt, 180
egipski, 167
prostokątny, 164, 167, 169, 190
przystający, 169
równoboczny, 176, 202, 205
pole, 176, 301
wysokość, 176, 301
równoramienny, 177, 180, 181, 212,
220, 221
twierdzenie Pitagorasa, 164, 167, 174,
186, 191

U

układ
równań, *patrz*: równanie układ
SI, *patrz*: Międzynarodowy Układ
Jednostek Miar
współrzędnych, 58, 253

W

wartość modalna, *patrz*: moda
wielokąt foremny, 202
wielościán, 201
współrzędna punktu, 58, 253, 254
wycinek koła, *patrz*: koło pole wycinka
wykładnik naturalny, 124
wykres, 264
funkcji, *patrz*: funkcja wykres
kołowy, 267
liniowy, 267
słupkowy, 267

PROGRAM PARTNERSKI

GRUPY WYDAWNICZEJ HELION



1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA WYDAWNICZA

 **Helion SA**

Dobre wyniki z matematyki

„Liczby rządzą światem” — mawiał Pitagoras, grecki filozof i matematyk. Oprócz niezliczonych mądrości pozostawił po sobie słynne twierdzenie, które poznasz podczas lektury tego podręcznika. Znajdziesz tu zresztą wiele ciekawych rzeczy, na przykład dowiesz się, czy okrąg może mieć długość i jak rozwiązać trudny układ równań. Przekonasz się, że to matematyka buduje każdą dziedzinę naszego życia. Przed Tobą osiem rozdziałów, dzięki którym świetnie przygotujesz się do egzaminu gimnazjalnego. Podręcznik zawiera mnóstwo zadań wraz z odpowiedziami, tabelę wzorów oraz przydatny indeks ważniejszych terminów.

Kompletny zestaw **Matematyka Europejczyka. Klasa 2** to **podręcznik + zeszyty ćwiczeń + zbiór zadań + płyta CD.**



Zbiór zadań został wzbogacony o płytę multimedialną, pełną interesujących zadań interaktywnych, animacji, tamigłówek, ciekawostek oraz wiedzy teoretycznej przedstawionej w formie wykładów.



Seria podręczników, zbiorów zadań, zeszytów ćwiczeń i płyt CD *Matematyka Europejczyka* wydawnictwa Helion pozwala uczniom zdobywać wiedzę bez stresu, a nauczycielom ułatwia przekazywanie nowego materiału w interesującej i niebanalnej formie.

Matematyka Europejczyka – TO SIĘ LICZY!

<http://edukacja.helion.pl>

Nr katalogowy: 5080



Księgarnia internetowa
<http://helion.pl>



Zamówienia telefoniczne:
0 801 339900



0 601 339900

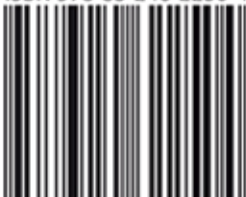
Helion
EDUKACJA

Sprawdź najnowsze promocje:
• <http://helion.pl/promocje>
Książki najchętniej czytane:
• <http://helion.pl/bestsellery>
Zamów informacje o nowościach:
• <http://helion.pl/nowosci>

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
<http://helion.pl>

helion.pl
księgarnia
internetowa

ISBN 978-83-246-2250-4



9 788324 622504

Informatyka w najlepszym wydaniu