OLDSCHOOL
STARA DOBRA SZKOŁA

Seria repetytoriów dla szkół średnich

MATEMATYKA

DLA MATURZYSTY

ZBIÓR ZADAŃ

NASZ CEL:
MATURA
ZDANA NA 100%

TWÓJ DOMOWY NAUCZYCIEL

ADAM KONSTANTYNOWICZ
ANNA KONSTANTYNOWICZ

MATEMATYKA

DLA MATURZYSTY

ZBIÓR ZADAŃ

OLDSCHOOL
STARA DOBRA SZKOŁA

Redaktor serii: **Marek Jannasz**

Korekta: **Marek Kowalik**

Projekt okładki: **Teresa Chylińska-Kur, KurkaStudio**

Projekt makiety i opracowanie graficzne: **Kaja Mikoszewska**

www.cel-matura.pl

ISBN wydania elektronicznego: 978-83-7892-266-7

Skład i łamanie: Kaja Mikoszewska

Od roku szkolnego 2014/2015 obowiązuje nowa formuła egzaminu maturalnego z matematyki odwołująca się do nowej podstawy programowej wprowadzonej w roku szkolnym 2012/2013. Zbiór niniejszy zawiera zadania zgodne z wyżej wymienioną podstawą i przeznaczony jest do przygotowania ucznia do matury w zakresie podstawowym.

Nowa podstawa zakłada różny stopień opanowania wiadomości i umiejętności przez uczniów, zatem i zbiór zadań zawiera zadania o różnym poziomie trudności. Są dobrane zgodnie z zasadą przystępności, poglądowości i stopniowania trudności. Rozdziały w zbiorze i ich kolejność pokrywają się z działami i ich kolejnością w podstawie programowej.

W każdym rozdziale jest około połowa zadań zamkniętych, których rozwiązania nie ograniczają się do podania prawidłowej litery A, B, C lub D, ale przedstawiają tok rozumowania, jakim powinien kierować się rozwiązujący. Rozwiązania zadań otwartych dokładnie tłumaczą kolejność postępowania, choć nie podają wszystkich możliwych sposobów.

Zbiór zadań jest doskonałym uzupełnieniem podręczników do matematyki, może również służyć do samodzielnego powtórzenia materiału pod kątem rodzajów zadań, które mogą pojawić się na egzaminie maturalnym. W nadziei, że choć troszkę pomożemy zrozumieć matematykę i przybliżymy umiejętność rozwiązywania zadań, życzymy powodzenia na maturze.

Z poważaniem

Autorzy

1.

LICZBY RZECZYWISTE

Zadania

1. Liczba $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt[5]{32}}+\dfrac{\sqrt[4]{16}}{8}}{\sqrt[3]{8}-\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ **jest równa**

A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{16}{9}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{9}{16}$.

2. Wartość ułamka $\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{27:\sqrt{81}}$ **wynosi**

A. 0,2. B. $2\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 9.

3. Wartość wyrażenia arytmetycznego $\dfrac{32\cdot\sqrt[3]{8}}{\sqrt{8}:\sqrt{2}}$ **wynosi**

A. 2^2. B. 2^4. C. 2^5. D. 2^7.

4. Wartość wyrażenia arytmetycznego $\dfrac{0,(3)+0,(1)}{0,(6)-0,(1)}$ **wynosi**

A. 0,8. B. 0,(8). C. 0,(3). D. 0,3.

5. Po uproszczeniu $5\sqrt{48}-3\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{300}$ **otrzymamy**

A. $\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $5\sqrt{3}$. D. $7\sqrt{3}$.

6. Wykonując działania $\dfrac{\sqrt{20}+2\sqrt{45}}{3\sqrt{80}-\sqrt{500}}$**, otrzymamy**

A. $\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $5\sqrt{5}$. D. 4.

7. Liczbą odwrotną do liczby $\dfrac{4^{-\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}:16^{\frac{1}{4}}}{2^{-2}\cdot 32^{\frac{4}{5}}}$ **jest**

A. 16. B. 2^4. C. -2^4. D. $\frac{1}{16}$.

8. Liczbą przeciwną do liczby $\dfrac{9^{-\frac{3}{2}}\cdot 27^{\frac{2}{3}}}{3^{-2}}$ **jest**

A. -3^{-2}. B. 3^{-2}. C. -3. D. 3.

9. Prędkość światła w próżni (około 300 000 km/s**) zapisana w notacji wykładniczej wynosi**

A. $300 \cdot 10^3$ km/s.

B. $30 \cdot 10^4$ km/s.

C. $3 \cdot 10^5$ km/s.

D. $0{,}3 \cdot 10^6$ km/s.

10. Wyznaczając q_1 **ze wzoru** $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, **otrzymamy**

A. $q_1 = \frac{F \cdot q_2}{k \cdot r^2}$. B. $q_1 = \frac{F \cdot r^2}{k \cdot q_2}$.

C. $q_1 = \frac{F \cdot k}{q_2 \cdot r^2}$. D. $q_1 = \frac{k \cdot r^2}{F \cdot q_2}$.

11. Liczba $\log_5 50 - \log_5 10$ **jest równa**

A. $\log_5 40$. B. 1. C. $\log_5 500$. D. 5.

12. Liczba $2\log_3 6 - \log_3 4$ **jest równa**

A. $\log_3 24$. B. $2\log_3 24$. C. 2. D. 3.

13. Jeżeli $\log_2 3 = a$, **to wartość wyrażenia** $\log_2 9 + \log_2 6$ **wynosi**

A. $4a$. B. $3a + 1$. C. $2a + 1$. D. $a - 2$.

14. Błąd bezwzględny przybliżenia $a = 3{,}2$ **liczby** $x = 3{,}215$ **wynosi**

A. 0,2. B. 0,02. C. 0,015. D. 0,01.

15. Błąd względny procentowy z dokładnością do 0,01% **przybliżenia** $a = 4$ **liczby** $x = 3{,}98$ **wynosi**

A. 0,5%. B. 0,02%. C. 0,05%. D. 1%.

16. Jeżeli $A = \langle -2; 4 \rangle$ **i** $B = (-1; 5\rangle$, **to błędnie wyznaczono przedział**

A. $A \cup B = \langle -2; 5 \rangle$. B. $A \cap B = (-1; 4\rangle$.

C. $A - B = (-2; -1\rangle$. D. $B - A = (4; 5\rangle$.

17. Wybierz zapis przedstawiający zbiór rozwiązań nierówności $|x-1|>3$.

A. $x \in \langle -2; 4\rangle$.
B. $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.
C. $x \in (-2; 4)$.
D. $x \in R$.

18. Przedział $\langle -4;1\rangle$ jest zbiorem rozwiązań nierówności

A. $|x-4|>1$.
B. $|2x+3| \leqslant 5$.
C. $|x-1|<4$.
D. $|3x+2| \geqslant 5$.

19. Jeśli cenę pewnego towaru obniżono o 10%, a następnie podwyższono o 5%, to znaczy, że po tych operacjach cena końcowa jest obniżona w stosunku do początkowej o

A. 5,5%.
B. 5%.
C. 4,5%.
D. 4%.

20. Wpłacając 1000 zł na lokatę terminową roczną oprocentowaną 3% w skali roku, z kwartalną kapitalizacją odsetek, po upłynięciu terminu otrzymamy

A. 1030 zł.
B. 1120 zł.
C. $1000 \cdot (1{,}03)^4$ zł.
D. $1000 \cdot (1{,}0075)^4$ zł.

21. Uzasadnij, że dla $n \in N$ liczba $\frac{2n^2+11n+5}{n+5}$ jest liczbą nieparzystą.

22. Wyznacz sumę liczb 2,8793 i 1,1205. Wynik zaokrąglij do trzeciego miejsca po przecinku. Oblicz błąd względny procentowy tego przybliżenia.

23. Oblicz, jaką kwotę po upływie lokaty otrzyma klient wpłacający 50 000 zł do banku na 2 lata, jeżeli kapitalizacja odsetek jest dokonywana co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi 4%.

24. Telewidz oglądający memoriał Janusza Kusocińskiego oszacował długość rzutu oszczepem naszego zawodnika na 81,5 m**. Na tablicy wyników wyświetlono** 80,75 m**. Ile wyniósł błąd względny procentowy popełniony przez telewidza?**

25. Cena spodni po podwyżce o 10% **i następnej o** 20% **wyniosła** 349,80 zł**. Jaka była cena tych spodni przed podwyżkami?**

26. Cenę pewnego towaru zwiększono o 10%**. O ile procent należy obniżyć nową cenę, aby wróciła do pierwotnej?**

27. Oblicz wartość liczbową wyrażenia 2^x**, wiedząc, że** $x = 2\log_2 9 + \frac{1}{4}\log_2 81 - 3\log_2 3$**.**

28. Podaj współrzędne punktu A **symetrycznego do punktu** $B = (x, y)$ **względem początku układu współrzędnych, wiedząc, że** $x = \frac{2^{-3} \cdot 3^{-2}}{6^{-2} \cdot \frac{1}{2}}$ **i** $y = 5^{3\log_5 2}$**.**

29. Uzasadnij, że suma liczb 2^{125}, 2^{126}, 2^{127} **jest podzielna przez** 14**.**

30. Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych powiększona o 4 **jest podzielna przez** 12**.**

31. Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych pomniejszona o 2 **jest podzielna przez** 3**.**

32. Wskaż, która z liczb: $a = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ **czy** $b = \sqrt[4]{9\sqrt[4]{9\sqrt[4]{9}}}$ **jest większa i ile razy.**

33. Kurtka narciarska męska kosztuje 350 zł**, a kurtka narciarska damska** 200 zł**. O ile procent jest droższa kurtka męska od kurtki damskiej?**

34. Czy podwyżka ceny towaru najpierw o 15%**, a następnie o** 25%**, będzie wynosiła tyle samo co podwyżka ceny tego samego towaru o** 40%**? Jeżeli nie, to która z nich jest bardziej opłacalna dla sprzedającego?**

35. Podczas doświadczenia na lekcji fizyki czas swobodnego spadku ciała z pewnej wysokości został zmierzony jako $1{,}375$ s**. Uczeń zapisał w zeszycie czas** $1{,}4$ s**. Ile wynosił błąd względny przybliżenia dokonanego przez ucznia?**

36. Oblicz, ile procent wynosi podatek VAT, jeżeli cena brutto jest równa $3062{,}70$ zł**, a cena netto to** 2490 zł**.**

37. Podatek VAT na materiały budowlane wynosi 8%**. Ile zapłaci klient za** 2500 **cegieł, jeżeli cena netto** 1 **cegły wynosi** 66 gr**?**

38. Nad wejściem do sklepu z artykułami AGD umieszczony jest napis: „Dzisiaj bez 23% **VAT". Ile złotych zaoszczędzi klient kupujący lodówkę w cenie brutto** 1230 zł**?**

39. Zmniejszamy długość boku a **prostokąta o** 10% **oraz zwiększamy długość boku** b **tego prostokąta o** 20%**. Wyznacz stosunek** $\frac{a}{b}$**, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak o bokach długości** a **i** b**.**

40. Zapisz wyrażenie $\frac{81^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} : 27}$ **w postaci** 3^k**, gdzie** $k \in C$**.**

41. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności: $2x + 3 > -8$ **i** $3x - 2 \leqslant 6$**.**

42. Dwaj bracia złożyli w banku po 20 000 zł **każdy na roczne lokaty terminowe oprocentowane** 3% **w skali roku. Pierwszy z nich na lokatę z półroczną kapitalizacją odsetek, a drugi na lokatę z kwartalną kapitalizacją odsetek. Który z nich otrzyma po roku więcej odsetek i o ile?**

43. Prędkość rozchodzenia się dźwięku w stali wynosi $2{,}16 \cdot 10^4$ km/h**. Wyraź tę prędkość w metrach na sekundę, zapisując ją w notacji wykładniczej.**

44. Jaką liczbę atomów wodoru zawierają 3 **mole, jeżeli wiadomo, że** 1 **mol zawiera** $6{,}02 \cdot 10^{23}$ **cząsteczek, a** 1 **cząsteczka wodoru zawiera** 2 **atomy?**

45. Ślimak winniczek porusza się z prędkością $3 \cdot 10^{-3}$ **km/h. Jaką odległość w metrach pokona w ciągu kwadransa?**

Rozwiązania

1. Liczba $\dfrac{\frac{1}{\sqrt[5]{32}}+\frac{\sqrt[4]{16}}{8}}{\sqrt[3]{8}-\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ **jest równa** D. $\frac{9}{16}$.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt[5]{32}}+\frac{\sqrt[4]{16}}{8}}{\sqrt[3]{8}-\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}}=\frac{9}{16}.$$

---

2. Wartość ułamka $\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{27:\sqrt{81}}$ **wynosi** C. $\frac{1}{3}$.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia: $\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{27:\sqrt{81}}=\dfrac{9^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{27:9}=\dfrac{3^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{3}=\dfrac{1}{3}.$

---

3. Wartość wyrażenia arytmetycznego $\dfrac{32\cdot\sqrt[3]{8}}{\sqrt{8}:\sqrt{2}}$ **wynosi** C. 2^5.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia: $\dfrac{32\cdot\sqrt[3]{8}}{\sqrt{8}:\sqrt{2}}=\dfrac{2^5\cdot 2}{\sqrt{8:2}}=\dfrac{2^6}{2}=2^5.$

---

4. Wartość wyrażenia arytmetycznego $\dfrac{0,(3)+0,(1)}{0,(6)-0,(1)}$ **wynosi** A. 0,8.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia: $\dfrac{0,(3)+0,(1)}{0,(6)-0,(1)}=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{9}}=\dfrac{4}{5}=0,8.$

---

5. Po uproszczeniu $5\sqrt{48}-3\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{300}$ **otrzymamy** D. $7\sqrt{3}$.

Upraszczamy wyrażenie:

$5\sqrt{48}-3\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{300}=$

$=5\sqrt{16\cdot 3}-3\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{100\cdot 3}=20\sqrt{3}-6\sqrt{3}+3\sqrt{3}-10\sqrt{3}=7\sqrt{3}.$

---

6. Wykonując działania $\frac{\sqrt{20}+2\sqrt{45}}{3\sqrt{80}-\sqrt{500}}$**, otrzymamy D.** 4.

Wykonujemy działania:

$$\frac{\sqrt{20}+2\sqrt{45}}{3\sqrt{80}-\sqrt{500}} = \frac{\sqrt{4\cdot 5}+2\sqrt{9\cdot 5}}{3\sqrt{16\cdot 5}-\sqrt{100\cdot 5}} = \frac{2\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{12\sqrt{5}-10\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 4.$$

---

7. Liczbą odwrotną do liczby $\frac{4^{-\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{4}}}{2^{-2}\cdot 32^{\frac{4}{5}}}$ **jest B.** 2^4.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia:

$$\frac{4^{-\frac{3}{2}}\cdot 8^{\frac{2}{3}} : 16^{\frac{1}{4}}}{2^{-2}\cdot 32^{\frac{4}{5}}} = \frac{2^{-3}\cdot 2^{2} : 2^{1}}{2^{-2}\cdot 2^{4}} = \frac{2^{-2}}{2^{2}} = 2^{-4} = \frac{1}{16}.$$

Liczbą odwrotną do liczby $\frac{1}{16}$ jest liczba 16, czyli 2^4.

---

8. Liczbą przeciwną do liczby $\frac{9^{-\frac{3}{2}}\cdot 27^{\frac{2}{3}}}{3^{-2}}$ **jest C.** –3.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia: $\frac{9^{-\frac{3}{2}}\cdot 27^{\frac{2}{3}}}{3^{-2}} = \frac{3^{-3}\cdot 3^{2}}{3^{-2}} = \frac{3^{-1}}{3^{-2}} = 3.$

Liczbą przeciwną do liczby 3 jest –3.

---

9. Prędkość światła w próżni (około 300 000 km/s**) zapisana w notacji wykładniczej wynosi C.** $3\cdot 10^5$ km/s.

300 000 km/s = $3\cdot 100\,000$ km/s = $3\cdot 10^5$ km/s.

---

10. Wyznaczając q_1 **ze wzoru** $F = k\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}$**, otrzymamy B.** $q_1 = \frac{F\cdot r^2}{k\cdot q_2}$.

Przekształcamy wzór: $F\cdot r^2 = k\cdot q_1\cdot q_2$, zatem $q_1 = \frac{F\cdot r^2}{k\cdot q_2}$.

---

11. Liczba $\log_5 50 - \log_5 10$ **jest równa** B. 1.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia: $\log_5 50 - \log_5 10 = \log_5 \frac{50}{10} = \log_5 5 = 1$.

---

12. Liczba $2\log_3 6 - \log_3 4$ **jest równa** C. 2.

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia:

$2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3 6^2 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = 2$.

---

13. Jeżeli $\log_2 3 = a$**, to wartość wyrażenia** $\log_2 9 + \log_2 6$ **wynosi** B. $3a + 1$.

Zapisujemy wyrażenie w postaci: $\log_2 9 + \log_2 6 = \log_2 3^2 + \log_2 3 \cdot 2 =$

$= 2\log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 2$. Wstawiamy a w miejsce $\log_2 3$:

$2a + a + 1 = 3a + 1$.

---

14. Błąd bezwzględny przybliżenia $a = 3{,}2$ **liczby** $x = 3{,}215$ **wynosi** C. 0,015.

Obliczamy błąd bezwzględny: $|3{,}215 - 3{,}2| = |0{,}015| = 0{,}015$.

---

15. Błąd względny procentowy z dokładnością do 0,01% **przybliżenia** $a = 4$ **liczby** $x = 3{,}98$ **wynosi** A. 0,5%.

Obliczamy błąd względny procentowy:

$\frac{|4 - 3{,}98|}{|3{,}98|} \cdot 100\% = \frac{0{,}02}{3{,}98} \cdot 100\% = \frac{200}{398}\% \approx 0{,}5\%$.

---

16. Jeżeli $A = \langle -2; 4\rangle$ **i** $B = (-1; 5\rangle$**, to błędnie wyznaczono przedział** C. $A - B = (-2; -1\rangle$.

Wyznaczamy różnicę przedziałów A i B: $A - B = \langle -2; -1\rangle$.

---

17. Wybierz zapis przedstawiający zbiór rozwiązań nierówności $|x - 1| > 3$**.** B. $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

Rozwiązujemy nierówność:

$x - 1 > 3$ lub $x - 1 < -3$

$x > 4$ lub $x < -2$

$x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

---

18. Przedział $\langle -4; 1 \rangle$ **jest zbiorem rozwiązań nierówności**

B. $|2x + 3| \leqslant 5$.

Rozwiązujemy nierówność:

$|2x + 3| \leqslant 5$

$-5 \leqslant 2x + 3 \leqslant 5$

$-5 - 3 \leqslant 2x \leqslant 5 - 3$

$-8 \leqslant 2x \leqslant 2$

$-4 \leqslant x \leqslant 1$

$x \in \langle -4; 1 \rangle$.

---

19. Jeśli cenę pewnego towaru obniżono o 10%**, a następnie podwyższono o** 5%**, to znaczy, że po tych operacjach cena końcowa jest obniżona w stosunku do początkowej o** A. 5,5%.

Oznaczamy cenę towaru jako x. Wtedy cena po obniżce wynosi $0{,}9x$, a po podwyżce wynosi $1{,}05 \cdot 0{,}9x = 0{,}945x$.

W stosunku do ceny początkowej końcowa cena towaru zmalała o 5,5%.

---

20. Wpłacając 1000 zł **na lokatę terminową roczną oprocentowaną** 3% **w skali roku, z kwartalną kapitalizacją odsetek, po upłynięciu terminu otrzymamy** **D.** $1000 \cdot (1{,}0075)^4$ zł.

Korzystając ze wzoru $K_n = K \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$, otrzymujemy:

$1000 \cdot (1 + \frac{0{,}75}{100})^4 = 1000 \cdot (1 + 0{,}0075)^4 = 1000 \cdot (1{,}0075)^4$.

---

21. Uzasadnij, że dla $n \in N$ **liczba** $\frac{2n^2 + 11n + 5}{n + 5}$ **jest liczbą nieparzystą.**

Zapisując wyrażenie w liczniku w postaci iloczynowej, otrzymujemy:

$$\frac{2n^2 + 11n + 5}{n + 5} = \frac{2(n + 5)(n + \frac{1}{2})}{n + 5} = 2n + 1,$$

co jest ogólną postacią liczby nieparzystej.

---

22. Wyznacz sumę liczb 2,8793 **i** 1,1205**. Wynik zaokrąglij do trzeciego miejsca po przecinku. Oblicz błąd względny procentowy tego przybliżenia.**

$2{,}8793 + 1{,}1205 = 3{,}9998 \approx 4{,}000$

$$\frac{|4{,}000 - 3{,}9998|}{|3{,}9998|} \cdot 100\% = \frac{0{,}0002}{3{,}9998} \cdot 100\% = \frac{200}{39998}\% \approx 0{,}005\%.$$

---

23. Oblicz, jaką kwotę po upływie lokaty otrzyma klient wpłacający 50 000 zł **do banku na** 2 **lata, jeżeli kapitalizacja odsetek jest dokonywana co kwartał, a roczna stopa procentowa wynosi** 4%**.**

Korzystając ze wzoru $K_n = K \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$, otrzymujemy:

$50000 \cdot (1 + \frac{1}{100})^8 = 50000 \cdot (1 + 0{,}01)^8 = 50000 \cdot (1{,}01)^8 =$

$= 50000 \cdot 1{,}083 = 54\ 150$. Klient otrzyma 54 150 zł.

---

24. Telewidz oglądający memoriał Janusza Kusocińskiego oszacował długość rzutu oszczepem naszego zawodnika na 81,5 m**. Na tablicy wyników wyświetlono** 80,75 m**. Ile wyniósł błąd względny procentowy popełniony przez telewidza?**

Obliczamy błąd względny procentowy:

$$\frac{|81{,}5-80{,}75|}{|80{,}75|}\cdot 100\% = \frac{0{,}75}{80{,}75}\cdot 100\% = \frac{7500}{8075}\% \approx 0{,}93\%.$$

Błąd względny procentowy wyniósł około 0,93%.

---

25. Cena spodni po podwyżce o 10% **i następnej o** 20% **wyniosła** 349,80 zł**. Jaka była cena tych spodni przed podwyżkami?**

Oznaczamy cenę spodni przed podwyżkami jako x. Wówczas cenę spodni po obu podwyżkach zapiszemy jako $1{,}2\cdot 1{,}1x$. Zapisujemy równanie i rozwiązujemy je:

$1{,}2\cdot 1{,}1x = 349{,}80$

$1{,}32x = 349{,}8$

$x = 265$

Cena spodni przed podwyżkami wynosiła 265 zł.

---

26. Cenę pewnego towaru zwiększono o 10%**. O ile procent należy obniżyć nową cenę, aby wróciła do pierwotnej?**

Oznaczamy pierwotną cenę towaru jako x, a nową cenę jako y.

Otrzymujemy $y = 1{,}1x$, a po przekształceniu $x = \frac{y}{1{,}1} = \frac{10}{11}y$. Zatem:

$$y - \frac{10}{11}y = \frac{1}{11}y = \frac{100}{11}\%y = 9\frac{1}{11}\%y.$$

Nową cenę należy obniżyć o $9\frac{1}{11}\%$.

---

27. Oblicz wartość liczbową wyrażenia 2^x, wiedząc, że $x = 2\log_2 9 + \frac{1}{4}\log_2 81 - 3\log_2 3$.

Zapisujemy x w prostszej postaci:

$x = 2\log_2 9 + \frac{1}{4}\log_2 81 - 3\log_2 3 = \log_2 9^2 + \log_2 \sqrt[4]{81} - \log_2 3^3 = \log_2 \frac{81 \cdot 3}{27} = \log_2 9.$

Obliczamy wartość liczbową wyrażenia 2^x.

$2^x = 2^{\log_2 9}$ $\qquad$ $2^x = 9.$

---

28. Podaj współrzędne punktu A symetrycznego do punktu $B = (x, y)$ względem początku układu współrzędnych, wiedząc, że $x = \dfrac{2^{-3} \cdot 3^{-2}}{6^{-2} \cdot \frac{1}{2}}$ i $y = 5^{3\log_5 2}$.

Obliczamy współrzędne punktu B: $x = \dfrac{2^{-3} \cdot 3^{-2}}{6^{-2} \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{2^{-3} \cdot 3^{-2}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-1}} = 1$

$y = 5^{3\log_5 2} = 5^{\log_5 8} = 8.$

Zatem $B = (1, 8)$. Punkt A jest symetryczny do punktu $B = (1, 8)$ względem początku układu współrzędnych, więc $A = (-1, -8)$.

---

29. Uzasadnij, że suma liczb 2^{125}, 2^{126}, 2^{127} jest podzielna przez 14.

Zapisujemy sumę liczb 2^{125}, 2^{126}, 2^{127} w postaci iloczynu.

$2^{125} + 2^{126} + 2^{127} = 2^{125}(1 + 2 + 4) = 2^{125} \cdot 7 = 2^{124} \cdot 2 \cdot 7 = 2^{124} \cdot 14.$

Zatem suma liczb 2^{125}, 2^{126}, 2^{127} jest podzielna przez 14.

---

30. Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb parzystych powiększona o 4 jest podzielna przez 12.

Oznaczamy kolejne liczby parzyste jako $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$. Zatem:

$(2n)^2 + (2n + 2)^2 + (2n + 4)^2 + 4 = 4n^2 + 4n^2 + 8n + 4 + 4n^2 + 16n + 16 + 4 =$

$= 12n^2 + 24n + 24 = 12(n^2 + 2n + 2).$

Iloczyn dwóch liczb, z których jedna to 12, jest podzielny przez 12.

31. Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych pomniejszona o 2 jest podzielna przez 3.

Oznaczamy kolejne liczby nieparzyste jako $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$.

Zatem:

$(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + (2n + 5)^2 - 2 =$

$= 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 - 2 =$

$= 12n^2 + 36n + 33 = 3(4n^2 + 12n + 11)$.

Iloczyn dwóch liczb, z których jedna to 3, jest podzielny przez 3.

---

32. Wskaż, która z liczb: $a = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ **czy** $b = \sqrt[4]{9\sqrt[4]{9\sqrt[4]{9}}}$ **jest większa i ile razy.**

$a = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt{3\sqrt{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{3\sqrt{3^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{3 \cdot 3^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{3^{\frac{7}{4}}} = 3^{\frac{7}{8}}$.

$b = \sqrt[4]{9\sqrt[4]{9\sqrt[4]{9}}} = \sqrt[4]{9\sqrt[4]{9 \cdot 9^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt[4]{9\sqrt[4]{9^{\frac{5}{4}}}} = \sqrt[4]{9 \cdot 9^{\frac{5}{16}}} = \sqrt[4]{9^{\frac{21}{16}}} = 9^{\frac{21}{64}} = 3^{\frac{21}{32}}$.

Zatem $a > b$.

Obliczamy, ile razy liczba a jest większa od liczby b.

$3^{\frac{7}{8}} : 3^{\frac{21}{32}} = 3^{\frac{28-21}{32}} = 3^{\frac{7}{32}}$.

Liczba a jest większa $3^{\frac{7}{32}}$ razy od liczby b.

---

33. Kurtka narciarska męska kosztuje 350 zł, a kurtka narciarska damska 200 zł. O ile procent jest droższa kurtka męska od kurtki damskiej?

Obliczamy różnicę cen: $350 - 200 = 150$.

Obliczamy, jakim procentem ceny 200 zł jest różnica wynosząca 150 zł:

$\frac{150}{200} \cdot 100\% = 75\%$.

Kurtka męska jest droższa od kurtki damskiej o 75%.

---

34. Czy podwyżka ceny towaru najpierw o 15%**, a następnie o** 25%**, będzie wynosiła tyle samo co podwyżka ceny tego samego towaru o** 40%**? Jeżeli nie, to która z nich jest bardziej opłacalna dla sprzedającego?**

Oznaczamy:

cenę towaru jako x, cenę towaru po podwyżce o 15% jako $1{,}15x$,

cenę towaru po następnej podwyżce o 25% jako $1{,}25 \cdot 1{,}15x$, czyli $1{,}4375x$,

a cenę towaru po podwyżce o 40% jako $1{,}4x$.

Porównujemy obie ceny:

$1{,}4375x > 1{,}4x$.

Zatem dwie kolejne podwyżki, o 15%, a następnie o 25%, są korzystniejsze dla sprzedającego niż jednokrotna podwyżka o 40%.

---

35. Podczas doświadczenia na lekcji fizyki czas swobodnego spadku ciała z pewnej wysokości został zmierzony jako 1,375 s**. Uczeń zapisał w zeszycie czas** 1,4 s**. Ile wynosił błąd względny przybliżenia dokonanego przez ucznia?**

Obliczamy błąd względny przybliżenia:

$$\frac{|1{,}4 - 1{,}375|}{|1{,}375|} = \frac{0{,}025}{1{,}375} = \frac{25}{1375} = 0{,}0(18) \approx 0{,}02.$$

Błąd względny przybliżenia wynosił około 0,02.

---

36. Oblicz, ile procent wynosi podatek VAT, jeżeli cena brutto jest równa 3062,70 zł**, a cena netto to** 2490 zł**.**

Obliczamy różnicę cen: $3062{,}70 - 2490 = 572{,}70$ zł.

Obliczamy wartość procentową podatku VAT: $\frac{572{,}7}{2490} \cdot 100\% = 23\%$.

---

37. Podatek VAT na materiały budowlane wynosi 8%. Ile zapłaci klient za 2500 cegieł, jeżeli cena netto 1 cegły wynosi 66 gr?

Obliczamy wartość netto 2500 cegieł: $2500 \cdot 0{,}66 = 1650$ (zł).

Obliczamy wartość cegieł z uwzględnieniem podatku VAT:

$1{,}08 \cdot 1650 = 1782$ (zł).

---

38. Nad wejściem do sklepu z artykułami AGD umieszczony jest napis: „Dzisiaj bez 23% VAT". Ile złotych zaoszczędzi klient kupujący lodówkę w cenie brutto 1230 zł?

Oznaczamy cenę netto jako x, a cenę brutto jako $1{,}23x$.

Zapisujemy równanie i rozwiązujemy je.

$1{,}23x = 1230$

$x = 1000$

Obliczamy wartość zaoszczędzonych pieniędzy:

1230 zł – 1000 zł = 230 zł.

Klient zaoszczędzi 230 zł.

---

39. Zmniejszamy długość boku a prostokąta o 10% oraz zwiększamy długość boku b tego prostokąta o 20%. Wyznacz stosunek $\frac{a}{b}$, jeśli wiadomo, że otrzymany prostokąt ma taki sam obwód jak o bokach długości a i b.

Oznaczamy długości boków nowego prostokąta jako $c = 0{,}9a$ oraz $d = 1{,}2b$.

Prostokąty mają równe obwody, więc $2(a + b) = 2(c + d)$, czyli

$a + b = 0{,}9a + 1{,}2b$. Zatem $0{,}1a = 0{,}2b$.

Wyznaczamy stosunek $\frac{a}{b}$:

$\frac{a}{b} = \frac{0{,}2}{0{,}1} = 2$.

---

40. Zapisz wyrażenie $\dfrac{81^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} : 27}$ **w postaci** 3^k**, gdzie** $k \in C$**.**

Przekształcamy wyrażenie: $\dfrac{81^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(3^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} : 27} = \dfrac{(3^4)^{-\frac{1}{4}} \cdot 3^5}{9^2 : 3^3} = \dfrac{3^{-1} \cdot 3^5}{3^4 : 3^3} = \dfrac{3^4}{3^1} = 3^3$.

---

41. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór rozwiązań nierówności: $2x + 3 > -8$ **i** $3x - 2 \leqslant 6$**.**

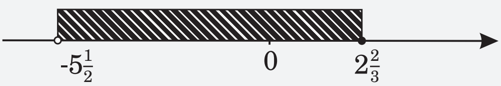
Rozwiązujemy nierówności.

$2x + 3 > -8$ i $3x - 2 \leqslant 6$

$2x > -11$ i $3x \leqslant 8$

$x > -5\frac{1}{2}$ i $x \leqslant 2\frac{2}{3}$

Przedstawiamy zbiór rozwiązań nierówności na osi liczbowej:



Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności w postaci przedziału:

$x \in \left(-5\frac{1}{2}; 2\frac{2}{3}\right\rangle$.

---

42. Dwaj bracia złożyli w banku po 20 000 zł **każdy na roczne lokaty terminowe oprocentowane** 3% **w skali roku. Pierwszy z nich na lokatę z półroczną kapitalizacją odsetek, a drugi na lokatę z kwartalną kapitalizacją odsetek. Który z nich otrzyma po roku więcej odsetek i o ile?**

Obliczamy wartość po roku lokaty pierwszego brata:

$20\,000 \cdot \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^2 = 20\,000 \cdot (1,015)^2 = 20\,604,50$ (zł).

Obliczamy wartość po roku lokaty drugiego brata:

$20000 \cdot \left(1 + \frac{0,75}{100}\right)^4 = 20000 \cdot (1,0075)^4 = 20606,78$ (zł).

Obliczamy różnicę wartości lokat:

20606,78 – 20604,50 = 2,28 (zł).

Drugi brat otrzyma o 2,28 zł więcej odsetek.

---

43. Prędkość rozchodzenia się dźwięku w stali wynosi $2{,}16 \cdot 10^4$ km/h. Wyraź tę prędkość w metrach na sekundę, zapisując ją w notacji wykładniczej.

Wyrażamy prędkość w metrach na sekundę i zapisujemy ją w notacji wykładniczej:

$$2{,}16 \cdot 10^4 \text{ km/h} = 21\,600 \text{ km/h} = \frac{21\,600 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{216\,000 \text{ m}}{36 \text{ s}} =$$
$$= 6000 \text{ m/s} = 6 \cdot 10^3 \text{ m/s}.$$

---

44. Jaką liczbę atomów wodoru zawierają 3 mole, jeżeli wiadomo, że 1 mol zawiera $6{,}02 \cdot 10^{23}$ cząsteczek, a 1 cząsteczka wodoru zawiera 2 atomy?

Obliczamy liczbę atomów wodoru:

$3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 2 = 3{,}612 \cdot 10^{24}$ atomów.

---

45. Ślimak winniczek porusza się z prędkością $3 \cdot 10^{-3}$ km/h. Jaką odległość w metrach pokona w ciągu kwadransa?

Wyrażamy prędkość w m/min:

$$3 \cdot 10^{-3} \text{ km/h} = \frac{3}{1000}\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{3000}{60000}\frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{1}{20}\text{m/min}.$$

Obliczamy drogę przebytą przez ślimaka:

$\frac{1}{20} \cdot 15 = \frac{3}{4}$ (m).
