

*„Cała analiza nieskończonych
obraca się dookoła wielkości
zmiennych i ich funkcji”*

L. Euler

Część IV. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

Rozdział 1

Przestrzenie metryczne

1.1. Przestrzenie metryczne

Definicja 1.1.

1° Niech X będzie niepustym zbiorem o elementach x, y, z, \dots . Odwzorowanie:

$$\varrho : X \times X \ni (x, y) \rightarrow \varrho(x, y) \in \mathbb{R}_+ \quad (1.1)$$

spełniające warunki:

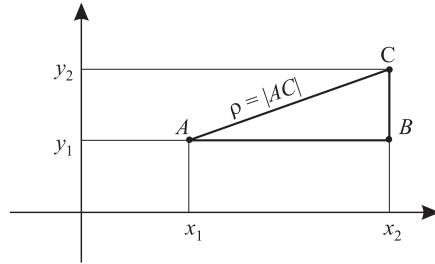
- M1. $\forall x, y \in X \quad \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- M2. $\forall x, y \in X \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad \text{— własność symetrii}$
- M3. $\forall x, y, z \in X \quad \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y) \quad \text{— nierówność trójkąta}$

nazywamy metryką (odległością) w zbiorze X .

2° Parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią metryczną (krótko przestrzeń metryczną będziemy oznaczać p.m.).

Przykład 1.1.

- a) Zbiór liczb rzeczywistych $X = \mathbb{R}$ z metryką $\varrho(x, y) = |x - y|$ jest p.m. z metryką naturalną.
- b) Zbiór liczb zespolonych $X = \mathbb{C}$ z metryką $\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ jest p.m.
- c) Zbiór \mathbb{R}^2 punktów $x = (x_1, x_2)$; $y = (y_1, y_2)$ z metryką
1° $\varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ jest p.m. (patrz rys. 1.1)
2° Zbiór \mathbb{R}^2 punktów $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ z metryką $\varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ — jest p.m..
3° Zbiór \mathbb{R}^2 punktów $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ z metryką $\varrho_2(x, y) = \max_{i=1,2} |x_i - y_i|$ jest p.m.



Rys. 1.1

Przykład 1.2.

W przestrzeni \mathbb{R}^n najczęściej wprowadza się metryki następujące: dla punktów $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$1^\circ \quad \varrho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (1.2)$$

$$2^\circ \quad \varrho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| \quad (1.3)$$

$$3^\circ \quad \varrho_2(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} \quad (1.4)$$

Uwaga 1.1. Przykład metryki $\varrho(x, y)$ określony w 1° odgrywa podstawową rolę. Parę (\mathbb{R}^n, ϱ) będziemy dalej nazywać n -wymiarową przestrzenią kartezjańską i oznaczać jako \mathbb{R}^n . Wykażemy, że metryka $\varrho(x, y)$ dana wzorem 1° spełnia aksjomaty metryki. Dla przykładu wykażemy warunek M3. Skorzystamy tutaj z nierówności Schwartza postaci:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (1.5)$$

Mamy:

$$\begin{aligned} \varrho^2(x, y) &= (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = \\ &= (x_1 - z_1 + z_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - z_n + z_n - y_n)^2 \\ &= (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2 + 2(x_1 - z_1)(z_1 - y_1) + \dots \\ &\quad + 2(x_n - z_n)(z_n - y_n) + (z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2 \leq \\ &\leq (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2 + \\ &\quad + 2\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2} + \\ &\quad (z_1 - y_1)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2 = (\varrho(x, z) + \varrho(z, y))^2 \end{aligned}$$

Zatem

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

c.n.d.

Przykład 1.3. (Przestrzeń dyskretna)

Para (X, ϱ) gdzie X jest dowolnym zbiorem $\neq \emptyset$ oraz

$$\varrho : X \times X \ni (x, y) \rightarrow \varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases} \quad (1.6)$$

jest przestrzenią metryczną

Sprawdzamy, że ϱ zdefiniowane powyżej spełnia aksjomaty metryki

M1 $\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ wynika z definicji

M2 $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ wynika z definicji.

M3 $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Gdy $x \neq y$, to mamy $z \neq y \vee z \neq x$ zatem $\varrho(x, y) = 1 \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$

Gdy $x = y$, to mamy $0 \leq 0 + 1$

Parę (X, ϱ) nazywamy przestrzenią dyskretną.

Przykład 1.4.

Para (\mathbb{R}, ϱ) gdzie ϱ jest określona następująco

$$\varrho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \rightarrow \varrho(x, y) = |x + y| \in \mathbb{R}$$

nie jest przestrzenią metryczną.

Dowód.

1° $|x + y| = 0 \Rightarrow x = -y$ zatem dla $x \neq y$ mamy $|x + y| = 0$

2° $|x + y| = |y + x|$ jest spełniona

3° $|x + y| \geq |x + z| + |y + z|$ np. dla $x = 5$ $y = 10$ $z = -9$.

Zatem warunki M1 i M3 nie są spełnione.

Przestrzeń (\mathbb{R}, ϱ) z funkcją $\varrho(x, y) = |x + y|$ nie jest przestrzenią metryczną.

Definicja 1.2. Niech będzie dana p.m. (\mathbb{X}, ϱ) . Wówczas

1° Kulą otwartą o środku w punkcie x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \varrho(x, x_0) < r\} \quad (1.7)$$

2° Kulą domkniętą o środku w punkcie x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X : \varrho(x, x_0) \leq r\} \quad (1.8)$$

3° Epsilonowym otoczeniem punktu x_0 nazywamy kulę $B(x_0, \varepsilon)$

Definicja 1.3. Punkt $x \in U \subset \mathbb{X}$ nazywamy punktem wewnętrznym zbioru U , jeśli $\exists r > 0$, takie że $B(x, r) \subset U$.

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru U nazywamy wnętrzem zbioru U i oznaczamy symbolem $\text{Int}U$.

Definicja 1.4. Punkt $x \in X$ nazywamy punktem brzegowym zbioru $U \subset X$ jeśli dla $\forall r > 0$ $B(x, r) \cap U \neq \emptyset \neq B(x, r) \cap (X \setminus U)$.

Zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru U nazywamy brzegiem zbioru U i oznaczamy symbolem ∂U .

Definicja 1.5. Punkt $x \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru $U \subset X$, jeśli dla $\forall r > 0$, $(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$

Zbiór wszystkich punktów skupienia zbioru U oznaczamy symbolem U^d . Jeżeli $x \in U \setminus U^d$, to x nazywamy punktem izolowanym zbioru U .

Definicja 1.6. Zbiór $U \subset X$ nazywamy zbiorem otwartym, jeżeli każdy punkt $x \in U$ jest punktem wewnętrznym zbioru U .

Twierdzenie 1.1. Jeżeli $U \subset X$, to

1° $\text{Int}U$ jest zbiorem otwartym

2° U jest zbiorem otwartym wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Int}U = U$.

Definicja 1.7. Zbiór $U \subset X$ nazywamy zbiorem domkniętym, jeżeli $X \setminus U$ jest zbiorem otwartym.

Definicja 1.8. Domknięciem zbioru $U \subset X$ nazywamy zbiór $U \cup U^d$ co oznaczamy jako \bar{U} .

Twierdzenie 1.2. Jeżeli $U \subset X$ to

1° Zbiór \bar{U} jest zbiorem domkniętym

2° Zbiór U jest domkniętym wtedy i tylko wtedy gdy $\bar{U} = U$.

Przykład 1.5.

Każdy przedział (a, b) jest zbiorem otwartym w \mathbb{R} , natomiast nie jest otwartym w \mathbb{R}^2

Przykład 1.6.

W p.m. dla metryk z przykładu 1.1

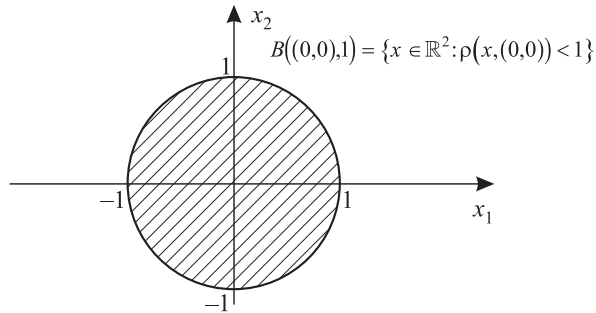
a) (\mathbb{R}^2, ϱ)

b) $(\mathbb{R}^2, \varrho_1)$,

c) $(\mathbb{R}^2, \varrho_2)$, narysować kulę o środku w punkcie $(1, 2)$ i promieniu 1.

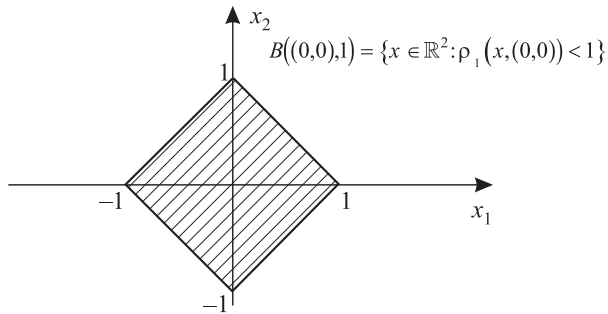
Rozwiązanie:

a)



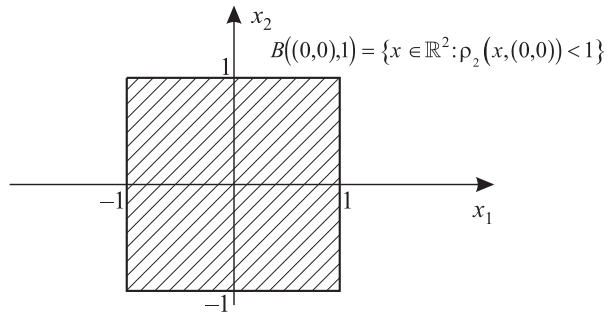
Rys. 1.2a

b)



Rys. 1.2b

c)



Rys. 1.2c

Przykład 1.7.

W przestrzeni (\mathbb{R}^1, ϱ) rozważmy zbiór \mathbb{A} postaci:

$$\mathbb{A} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

- 1° Zbiór \mathbb{A} nie jest otwarty, gdyż $\text{Int}\mathbb{A} = \emptyset$.
- 2° Brzegiem zbioru \mathbb{A} jest zbiór postaci $\partial A = A \cup \{0\}$.
- 3° Zbiór punktów skupienia zbioru \mathbb{A} ma postać $A^d = \{0\}$.
- 4° Domknięcie zbioru \mathbb{A} ma postać $\bar{\mathbb{A}} = A \cup \{0\}$.
- 5° Zbiór \mathbb{A} nie jest domknięty.
- 6° $\mathbb{A} \setminus \mathbb{A}^d = \mathbb{A}$ — czyli wszystkie punkty zbioru A są izolowane.

Przykład 1.8.

W przestrzeni (\mathbb{R}, ρ) rozważmy zbiór Q — zbiór liczb wymiernych

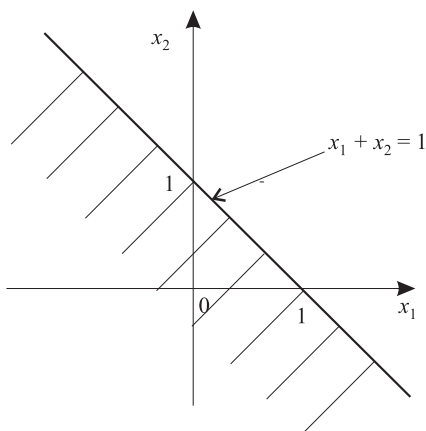
- 1° Mamy $\bar{Q} = \mathbb{R}$
- 2° $\text{Int}Q = \emptyset$
- 3° $\partial Q = \mathbb{R}$
- 4° $Q - Q^d = Q - \mathbb{R} = \emptyset$

Przykład 1.9.

W przestrzeni (\mathbb{R}^2, ρ) rozważamy zbiór \mathbb{A} postaci

$$\mathbb{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$$

(patrz rys. 1.3)



Rys. 1.3

Mamy

- 1° $A^d = A$
- 2° $\bar{A} = A \cup A^d = A$ — czyli zbiór A jest domknięty
- 3° $\text{Int}A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 < 1\}$
- 4° $\partial A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$

Przykład 1.10.

W przestrzeni (\mathbb{R}^2, ρ) rozważmy zbiór

$$\mathbb{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = t, x_2 = t + 1, t \in (0, 1)\}$$

Mamy

$$1^\circ A^d = A \cup \{(0, 1), (1, 2)\}$$

$$2^\circ \bar{A} = A^d$$

$$3^\circ \text{Int}A = \emptyset$$

$$4^\circ \partial A = \bar{A}$$

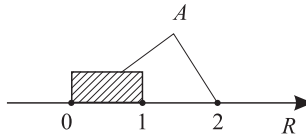
Wniosek 1.1. Zbiór A nie jest ani otwarty ani domknięty.

Przykład 1.11.

Znaleźć punkt skupienia zbioru $A = [0, 1) \cup [2] \subset \mathbb{R}$

Rozwiązanie:

Z rysunku (patrz rys. 1.4) wynika, że $A^d = [0, 1]$



Rys. 1.4

Odpowiedź.

$$A^d = [0, 1]$$

Wniosek 1.2. Zbiór A nie jest ani otwarty ani domknięty.

Definicja 1.9. Otoczeniem punktu $a \in X$ nazywamy dowolny zbiór otwarty $U \subset X$, taki że a jest punktem wewnętrznym w zbiorze U .

Prawdziwe jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.3. Dla $\forall r > 0$ i $\forall a \in X$

1° kula $B(a, r)$ jest zbiorem otwartym

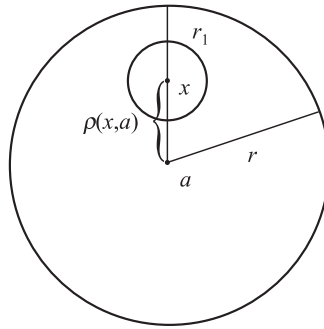
2° kula domknięta $B(a, r)$ jest zbiorem domkniętym

Dowód.

1° Dla $\forall x \in B(a, r)$ istnieje r_1 postaci

$$r_1 = \frac{r - \rho(x, a)}{2},$$

taki że $B(x, r_1) \subset B(a, r)$. Wobec tego $x \in X$ jest punktem wewnętrznym zbioru X (patrz rys. 1.6)



Rys. 1.5

2° Dowód pomijamy

Można wykazać prawdziwość następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.4. *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią metryczną $\tau = \{U \subset X : \text{Int}U = U\}$ oraz $I \subset \mathbb{R}$ oznacza zbiór indeksów, to wówczas prawdziwe są następujące warunki*

1° $\emptyset \in \tau$

2° $X \in \tau$

3° Jeżeli $U_\alpha \in \tau$, $\alpha \in I$, to $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$

4° Jeśli $U_\alpha \in \tau$, $\alpha \in A \subset I$, gdzie A jest skończone to $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.

Dowód.

1° $\text{Int}\emptyset = \emptyset$, a więc $\emptyset \in \tau$

2° Dla każdego $x \in X$ oraz dla każdego $r > 0$ kula $B(x, r) \subset X$.

3° Niech $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, wtedy $\exists \alpha_0 \in I$, że $x \in U_{\alpha_0}$.

Ponieważ U_{α_0} jest zbiorem otwartym zatem $\exists r > 0$, takie że $B(x, r) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

4° Dowód pomijamy

Możemy teraz sformułować następującą definicję.

Definicja 1.10. (Przestrzeni topologicznej)

Parę (X, τ) złożoną ze zbioru $X \neq \emptyset$ oraz rodziny podzbiorów τ zbioru X spełniającej warunki 1, 2, 3 twierdzenia 1.4 nazywamy **przestrzenią topologiczną**, rodzinę τ topologią, zaś elementy rodziny τ zbiorami otwartymi.

1.2. Ciągi w przestrzeni metrycznej

Definicja 1.11. Odwzorowanie postaci

$$\mathbb{N} \ni n \rightarrow x_n \in X \quad (1.9)$$

nazywamy ciągiem i oznaczamy symbolem $\{x_n\}$ ((x_n)).

Definicja 1.12. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $\{x_n\} \subset X$ jest zbieżny do elementu $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$ co zapisujemy jako $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Uwaga 1.2. Z definicji 1.12 wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 (\forall n > n_0 \Rightarrow \rho(x_n, x_0) < \varepsilon) \quad (1.10)$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.5. Ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej (X, ρ) ma dokładnie jedną granicę.

Dowód.

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_0$, wówczas mamy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \rho(x_n, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ i } \quad \rho(x_n, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Zatem $\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) < \varepsilon$ dla $n > n_0$.

Ponieważ $\varepsilon > 0$ jest dowolnie małą liczbą zatem $x_0 = y_0$.

Definicja 1.13. Niech będzie dany ciąg $\{x_n\} \subset X$ oraz ściśle rosnący ciąg liczb naturalnych (patrz def. 1.24 str. 215) $\mathbb{N} \ni k \rightarrow n_k \in \mathbb{N}$.

Wówczas ciąg $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \subset X$ nazywamy podciągiem ciągu $\{x_n\}$. Prawdziwe są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.6. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, to dla każdego podciągu $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$.

Dowód. Pomijamy.

Twierdzenie 1.7. Jeżeli dla $\forall \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Dowód. Pomijamy.

Twierdzenie 1.8. *Jeżeli $a \in U^d$, to $\exists \{x_n\} \subset U$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.*

Dowód.

Niech $a \in U^d$. Wtedy dla $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right) \cap U \setminus \{a\}$ zatem $\exists \{x_n\} \subset U$, taki że $\forall n \in \mathbb{N} \varrho(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$ czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Definicja 1.14. Zbiór $U \subset X$ nazywamy zwartym, jeśli dla $\forall \{x_n\} \subset U \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, taki że $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in U$.

Definicja 1.15. Zbiór $U \subset X$ jest ograniczony, jeśli $\exists x_0 \in X$ oraz liczba $r > 0$, taka że $U \subset B(x_0, r)$.

Twierdzenie 1.9. *Jeżeli zbiór $U \subset X$ jest zwarty, to zbiór U jest ograniczony i domknięty.*

Dowód.

Wykażemy domkniętość: z twierdzenia 1.2 wynika, że zbiór U jest domknięty, gdy $U = \bar{U} = U \cup U^d$. Załóżmy, że zbiór U nie jest domknięty. Wówczas istnieje $a \in U^d \setminus U$. Na podstawie twierdzenia 1.8 istnieje ciąg $\{x_n\} \subset U$, taki że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, natomiast na podstawie twierdzenia 1.6 mamy, że dla każdego ciągu $\{x_{n_k}\} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$. Zatem z ciągu $\{x_n\} \subset U$ nie można wybrać podciągu zbieżnego w U . Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.10. *Jeżeli zbiór $U \subset \mathbb{R}^m$ jest ograniczony i domknięty, to zbiór U jest zwarty.*

Dowód. Pomijamy.

Definicja 1.16. Zbiór $U \subset X$ nazywamy spójnym, gdy nie istnieją dwa otwarte zbiory $A, B \subset X$, takie że

$$1^\circ A \cap B = \emptyset$$

$$2^\circ A \cap U \neq \emptyset \text{ i } B \cap U \neq \emptyset$$

$$3^\circ U \subset A \cup B$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.11. *Zbiór $U \subset \mathbb{R}$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy dla $\forall x, y \in U$, takich że $x < y$; jeśli $x < z < y$, to $z \in U$.*

Dowód. Pomijamy

Definicja 1.17. Niech $\{x_n\} \subset X$. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, gdy dla

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0 \Rightarrow \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (1.11)$$

Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego nazywamy ciągiem Cauchy'ego.

Twierdzenie 1.12. *Jeżeli ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, to ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.*

Dowód.

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in X$. Wówczas $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n > n_0$ mamy $\varrho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $\varrho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Stąd

$$\varrho(x_m, x_n) \leq \varrho(x_m, x_0) + \varrho(x_n, x_0) \leq \varepsilon$$

Uwaga 1.3. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. nie dla każdej przestrzeni metrycznej X warunek Cauchy'ego jest wystarczający dla istnienia granicy ciągu o wartościach w X .

Przyjmując np. $\mathbb{X} = (0, \infty)$ $\varrho(x, y) = |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{X}$ oraz $x_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest ciągiem Cauchy'ego, ale nie istnieje takie $a \in \mathbb{X}$, że $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (bo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \notin X$).

Definicja 1.18. (Przestrzeni metrycznej zupełnej) Przestrzeń metryczną (X, ϱ) nazywamy zupełną, gdy każdy ciąg $(x_n) \subset X$ spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny do elementu $x \in X$

Twierdzenie 1.13. *Jeżeli A jest podzbiorem domkniętym w przestrzeni metrycznej zupełnej (p.m.z) (Y, ϱ) , to przestrzeń metryczna $(A, \varrho|_{A \times A})$ jest zupełna.*

Przykład 1.12.

Przestrzeń $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest przestrzenią metryczną zupełną

Definicja 1.19. (Odwzorowania zwężającego) Odwzorowanie f p.m. X na siebie nazywamy **zwężającym**, gdy

$$\exists \alpha \in (0, 1), \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2) \quad (1.12)$$

Twierdzenie 1.14. (Zasada odwzorowań zwężających — twierdzenie o punkcie stałym S. Banacha) *Jeżeli (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną zupełną, to każde odwzorowanie zwężające:*

$$f : X \rightarrow X \quad (1.13)$$

ma dokładnie jeden punkt stały tzn. $\exists! x \in X$, że $f(x) = x$, który wyznaczamy za pomocą metody kolejnych przybliżeń

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) \\ x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \end{aligned} \quad (1.14)$$

Dowód.

1° **Jednoznaczność.** Załóżmy, że $x = f(x)$, $x' = f(x')$. Mamy wówczas:

$$\varrho(x, x') = \varrho(f(x), f(x')) \leq \alpha \varrho(x, x')$$

Zatem:

$$\varrho(x, x') \leq \alpha \varrho(x, x')$$

Gdyby $x \neq x'$, to byłoby

$$\varrho(x, x') > 0$$

Wówczas dla $\alpha \in (0, 1)$ nierówność (1.1) jest sprzeczna, co przeczy założeniu.

2° **Istnienie.** Definiujemy ciąg o wyrazach w X następująco: wyraz $x_1 \in X$ ustalamy dowolnie, zaś $x_{m+1} = f(x_m)$ dla $n \in \mathbb{N}$. O ile wykażemy, że ciąg (x_n) jest zbieżny w X to dowód będzie zaliczony.

Istotnie, oznaczając granicę tego ciągu przez x , mamy:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

gdyż na mocy definicji 1.17 funkcja f jest ciągła.

Ponieważ przestrzeń X jest z założenia zupełna, więc dla dowodu zbieżności ciągu (x_n) wystarczy stwierdzić, że spełnia on warunek Cauchy'ego. Mamy

$$\begin{aligned} \varrho(x_3, x_2) &= \varrho(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha \varrho(x_2, x_1) \\ \varrho(x_4, x_3) &= \varrho(f(x_3), f(x_2)) \leq \alpha \varrho(x_3, x_2) \leq \alpha^2 \varrho(x_2, x_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Widać więc, że indukcyjnie można udowodnić zbieżność

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} \varrho(x_2, x_1) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

Na mocy nierówności trójkąta mamy dla $m > n$, $m, n \in \mathbb{N}$ Ponieważ

$$\begin{aligned} \varrho(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \varrho(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^{k-1} \varrho(x_2, x_1) \leq \varrho(x_2, x_1) \sum_{k=n}^{m-1} \alpha^{k-1} = \\ &= \varrho(x_2, x_1) \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0 \quad \text{zatem dla } \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$$

takie, że

$$\varrho(x_2, x_1) (1 - \alpha)^{-1} \alpha^{n-1} < \varepsilon \quad \text{dla } n > k$$

a zatem

$$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{dla } n, m > k$$

c.n.d.

Ciąg (x_n) występujący w drugiej części dowodu nosi nazwę **ciągu kolejnych przybliżeń** rozwiązania równania $x = f(x)$, a metoda tego rozwiązanie w postaci granicy tak zdefiniowanego ciągu (x_n) nazywa się **metodą kolejnych przybliżeń**.

Uwaga 1.4. Twierdzenie 1.14 stosowane jest do dowodu istnienia i jednoznaczności rozwiązania równań: algebraicznych, różniczkowych i całkowych itp. Pokażemy to na przykładach.

Przykład 1.13.

Stosując twierdzenie Banacha, wykaż że poniższe równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x^n - (n+1)(1-x) = 0 \quad : \quad 0 < x < 1 \quad \wedge \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.15)$$

Rozwiązanie:

Określamy odwzorowanie f . Korzystając z równania mamy

$$x = 1 - \frac{x^n}{n+1} \quad (1.16)$$

Zatem

$$f(x) = 1 - \frac{x^n}{n+1} \quad (1.17)$$

Mamy wykazać, że równanie $x = f(x)$, gdzie f dana jest wzorem (1.17) ma dokładnie jeden punkt stały. Weźmy $a < x_1 \leq x_2 < 1$ i rozważmy $|f(x_1) - f(x_2)|$. Mamy

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \frac{1}{n+1} |x_1^n - x_2^n| = \\ &= \frac{1}{n+1} |x_1 - x_2| \cdot |x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \cdot x_2 + \dots + x_2^{n-1}| \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1} |x_1 - x_2| \cdot n = \frac{n}{n+1} |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

czyli mamy

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{n}{n+1} |x_1 - x_2| \quad (1.18)$$

zatem $\alpha = \frac{n}{n+1} < 1$, a więc na mocy twierdzenia Banacha 1.14 odwzorowanie określone wzorem (1.17) jest zwięzające czyli $\exists x!$ takie, że $x = f(x)$, gdzie $f(x)$ dane jest wzorem (1.17).

Przykład 1.14.

Wykażemy, że układ liniowy równań algebraicznych

$$x_i = \sum_{j=1}^a a_{ij} x_j + b_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k \quad (1.19)$$

ma przy dowolnych b_i dokładnie jedno rozwiązanie, o ile tylko wyrazy macierzy $\mathbb{A} = (a_{ij})_{k \times k}$ są co do modułu dostatecznie małe. Układ ten możemy zapisać w postaci równania

$$x = f(x)$$

gdzie $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ oznacza funkcję, która każdemu punktowi $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ przyporządkowuje punkt $y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, którego współrzędne wyrażają się wzorem

$$y_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, k$$

oznaczając $M = \max\{|a_{ij}| \mid i, j = 1, \dots, k\}$ $y = f(x)$, $y' = f(x')$ mamy

$$|y_i - y'_i| \leq \sum_{j=1}^k |a_{ij}|(x_j - x'_j) \leq M \sum_{j=1}^k |x_j - x'_j|$$

zatem na mocy nierówności Schwartza (patrz (1.5)) mamy

$$|y_i - y'_i| \leq M\sqrt{k}\|x - x'\|$$

Stąd

$$\|y - y'\| = \left(\sum_{i=1}^k (y_i - y'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Mk\|x - x'\|$$

zatem jeśli $\alpha = kM < 1$ to na mocy twierdzenia 1.14 (zastosowanego do przestrzeni $X = \mathbb{R}^k$) rozważany układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Definicja 1.20.

1° Przestrzeń metryczną (X, ρ) nazywamy zwartą (sekwencyjnie, ciągowo), gdy

$$\forall (x_n) \subset X \exists (x_{n_k}) \subset (x_n) : \lim x_{n_k} = x \in X$$

(tzn. gdy z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny)

2° Zbiór $A \subset X$ nazywamy zwartym, gdy jako przestrzeń metryczna z metryką indukowaną z X jest przestrzenią zwartą.

Przykład 1.15.

Odcinek $[0, 1]$ jest zbiorem zwartym.

Twierdzenie 1.15.

- 1° Każda przestrzeń zwarta jest przestrzenią zupełną
 2° Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Twierdzenie 1.16. (Twierdzenie Weierstrassa) Funkcja rzeczywista ciągła w (ciągowo) zwartej przestrzeni metrycznej jest ograniczona i osiąga swoje kresy.

Przykład 1.16.

W przestrzeni $(X, |\cdot|)$ gdzie $X = \mathbb{W}$ zbiór liczb niewymiernych nie jest zwarty.

Dowód.

Weźmy ciąg $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ciąg ten nie zawiera w sobie żadnego podciągu zbieżnego.

Przykład 1.17.

Skończony odcinek $[a, b]$ osi liczbowej jest zbiorem zwartym

Dowód.

Niech (x_n) będzie dowolnym nieskończonym ciągiem liczbowym takim, że $a \leq x_n \leq b$. Podzielmy odcinek $[a, b]$ na połowy. Co najmniej jedna z nich zawiera nieskończoną ilość elementów ciągu (x_n) . Wybieramy z niej dowolny element x_{n_1} ciągu (x_n) i podzielimy ją ponownie na połowy. Z tej połowy, która ma nieskończoną ilość elementów, wybieramy następny element x_{n_2} ciągu (x_n) itd. W ten sposób wszystkie wyrazy podciągu (x_{n_k}) począwszy od numeru k leżą w przedziale o długości $(b-a)/2^k$. Podciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego i wobec domkniętości odcinka $[a, b]$ ma w nim granicę. Dowodzi to zwartości odcinka $[a, b]$.

1.3. Ciągi liczbowe

Definicja 1.21. Odwzorowanie postaci

$$\mathbb{N} \ni n \rightarrow a_n \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

nazywamy ciągiem liczbowym i oznaczamy symbolem $\{a_n\}$ lub (a_n) .

Definicja 1.22. (Granica ciągu liczbowego) Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ ma granicę g co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall n > \delta \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon \quad (1.21)$$

Przykład 1.18.

Udowodnić na podstawie definicji, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad (1.22)$$

Dowód.

Występująca w definicji granicy nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ przybiera w tym przypadku postać:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad (1.23)$$

Należy wykazać, że dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba δ , taka że dla $n > \delta$ zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. Mamy:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \quad (1.24)$$

zatem:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad (1.25)$$

Rozwiązując ostatnią nierówność względem n otrzymujemy:

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \quad (1.26)$$

Teraz możemy określić liczbę δ . Przyjmujemy $\delta = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ i stwierdzamy, że dla $n > \delta$ zachodzi nierówność

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad (1.27)$$

Definicja 1.23. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ ma granicę niewłaściwą $\pm\infty$ (jest rozbieżny do $\pm\infty$), gdy

1° $\forall M > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 a_n > M$ co oznaczamy symbolem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

2° $\forall m < 0 \exists n_0 \forall n > n_0 a_n < m$ co oznaczamy symbolem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.17.

1° Jeżeli $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, to ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

2° Jeżeli $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony, to istnieje podciąg $\{a_{n_k}\}$ ciągu $\{a_n\}$, taki że $\{a_{n_k}\}$ jest zbieżny.

Dowód.

1° Ponieważ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow$ dla $\varepsilon = 1 \exists n_0 \forall n > n_0 a - 1 < a_n < a + 1$.
Oznaczamy

$$m = \min\{a - 1, a_1, \dots, a_{n_0}\}$$

$$M = \max\{a + 1, a_1, \dots, a_{n_0}\}$$

Wówczas mamy:

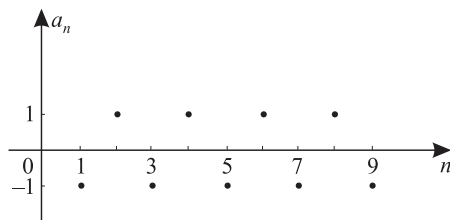
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq a_n \leq M$$

Uwaga 1.5. Ciąg ograniczony nie musi być zbieżny.

Przykład 1.19.

Ciąg $\{(-1)^n\}$ jest ograniczony ale nie jest zbieżny. Mamy (patrz rys. 1.6)

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n & \text{dla } n &= 2k & a_{2k} &= (-1)^{2k} = 1 \\ & & \text{dla } n &= 2k + 1 & a_{2k+1} &= (-1)^{2k+1} = -1 \end{aligned}$$



Rys. 1.6

Definicja 1.24. Ciąg $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ nazywamy

1° rosnącym (ściśle rosnącym), gdy dla $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$

2° niemalejącym, gdy dla $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} \geq a_n$

3° malejącym (ściśle malejącym), gdy $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} < a_n$

4° nierosnącym, gdy $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} \leq a_n$

Ciągi niemalejące i nierosnące nazywamy ciągami monotonicznymi. Ciągi rosnące i malejące nazywamy ciągami ściśle monotonicznymi. Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.18. Jeżeli $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ jest ciągiem monotonicznym to wówczas:

1° jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem ograniczonym, to $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ i wtedy

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_n \{a_n\}$ gdy ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_n \{a_n\}$ gdy ciąg $\{a_n\}$ jest ciągiem malejącym

2° jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Dowód.

1° Niech np. ciąg $\{a_n\}$ będzie ciągiem rosnącym. Niech $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$ wtedy dla $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0$, taki, że $M - \varepsilon < a_{n_0}$.

Ponieważ $\{a_n\}$ jest ciągiem rosnącym więc dla $\forall n > n_0$ $a_{n_0} < a_n$. Zatem mamy:

$$\forall n > n_0 \quad M - \varepsilon < a_{n_0} < a_n < M + \varepsilon \Leftrightarrow \forall n > n_0 \quad |M - a_n| < \varepsilon$$

tzn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$ c.n.d.

Twierdzenie 1.19. *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to wtedy*

- 1° *jeżeli $a < b$, to $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 a_n < b_n$*
 2° *jeżeli $\forall n > n_0 a_n \leq b_n$, to $a \leq b$.*

Dowód. Pomijamy.

Twierdzenie 1.20. *(o trzech ciągach) Niech $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \subset \mathbb{R}$ oraz niech $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g \in \mathbb{R}$, jeśli*

$$\forall n > n_0, \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \text{to} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g. \quad (1.28)$$

Definicja 1.25. Niech $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$. Jeżeli $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ (właściwa lub niewłaściwa), to tę granicę nazywamy granicą częściową lub punktem skupienia ciągu $\{a_n\}$.

Twierdzenie 1.21. *Z każdego ciągu $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ można wybrać podciąg $\{a_{n_k}\}$ zbieżny do granicy skończonej lub rozbieżny do $\pm\infty$.*

Dowód. Pomijamy.

Definicja 1.26.

- 1° Niech ciąg $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, gdzie \mathbb{R} jest przestrzenią metryczną z naturalną metryką. Liczbę $x \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem skupienia tego ciągu, gdy istnieje podciąg $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ taki, że $\lim x_{n_k} = x$.
 Symbolem $A(x_n)$ oznaczamy zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu (x_n)
 2° Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem ograniczonym, wtedy kres górny zbioru $A(x_n)$ nazywamy górną granicą ciągu (x_n) i oznaczamy symbolem

$$\limsup x_n = \sup A\{x_n\} \quad (1.29)$$

- 3° Kres dolny zbioru $A(x_n)$ nazywamy dolną granicą ciągu (x_n) , co oznaczamy

$$\liminf x_n = \inf A(x_n) \quad (1.30)$$

Przykład 1.20.

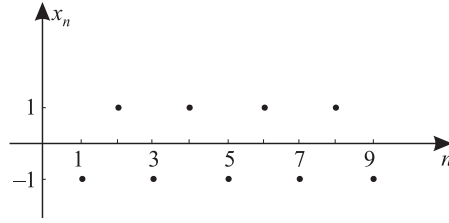
Obliczyć górną i dolną granicę ciągu $x_n = (-1)^n$

Rozwiązanie:

1. Wyznaczamy $A(x_n)$:

$$\begin{aligned} x_{n_k} &= (-1)^{2k} \rightarrow 1 \\ x_{n_k} &= (-1)^{2k-1} \rightarrow -1 \end{aligned}$$

Zatem $A(x_n) = \{-1, 1\}$.



Rys. 1.7

2. Obliczamy granicę górną i dolną:

$$\begin{aligned}\limsup(-1)^n &= \sup A(x_n) = \sup\{-1, 1\} = 1 \\ \liminf(-1)^n &= \inf A(x_n) = \inf\{-1, 1\} = -1\end{aligned}$$

Odpowiedź.

$\limsup(-1)^n = +1$, $\liminf(-1)^n = -1$ (patrz rys. 1.7)

Przykład 1.21.

Udowodnić, że w przestrzeni \mathbb{R} z metryką naturalną

- $\lim q^n = 0$ dla $|q| < 1$
- $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Rozwiązanie:

a) Skorzystamy z definicji granicy ciągu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} (n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon)$$

Aby to wykazać rozważymy nierówność

$$(x_n = q^n, x = 0)$$

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon$$

czyli

$$\begin{aligned}n \log |q| &< \log \varepsilon \\ &\downarrow \\ n &> \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} = N_\varepsilon (\log |q| < 0)\end{aligned}$$

Zatem mamy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon = \frac{\log \varepsilon}{\log |q|} \forall n > N (n > N \Rightarrow |q^n - 0| < \varepsilon)$$

c.n.d.

b) W tym przypadku mamy: $x_n = \sqrt[n]{n}$, $x = 1$. Należy zatem dokonać oceny wyrażenia $|\sqrt[n]{n} - 1|$. Zauważmy, że

$$n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n$$

Stosując do ostatniego wyrażenia wzór dwumienny Newtona, dostajemy

$$[1 + \sqrt[n]{n} - 1]^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \dots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

Ponieważ $\sqrt[n]{n} > 1 > 0$ dla $n > 1$, zatem mamy:

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

czyli

$$\frac{2}{n} > (\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

Stąd

$$(\sqrt[n]{n} - 1) < \sqrt{\frac{2}{n}} < \varepsilon$$

Zatem $n > \frac{2}{\varepsilon^2} = N_\varepsilon$.

Wobec tego mamy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \frac{2}{\varepsilon^2} \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon)$$

c.n.d.

Twierdzenie 1.22. *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) = y$ to*

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y \\ 2^\circ \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = x - y \\ 3^\circ \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y \\ 4^\circ \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{x}{y} \end{aligned} \tag{1.31}$$

o ile $y_n \neq 0$ oraz $y \neq 0$

Przykład 1.22.

Wykazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$.

Rozwiązanie:

1° Niech $a > 1$, to wówczas $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$. Stosując twierdzenie o trzech ciągach otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

2° Niech $0 < a < 1$. Wówczas mamy:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}},$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1 \quad \text{bo} \quad \frac{1}{a} > 1$$

c.n.d.

Definicja 1.27. Niech A oznacza zbiór wszystkich granic częściowych ciągu $\{a_n\}$. Wtedy granicę górną i dolną ciągu $\{a_n\}$ określamy odpowiednio jako

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } +\infty \in A \\ \sup A & \text{gdy } +\infty \notin A \text{ i } A \neq \emptyset \\ -\infty & \text{gdy } A = \{-\infty\} \end{cases}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -\infty & \text{gdy } -\infty \in A \\ \inf A & \text{gdy } -\infty \notin A \text{ i } A \neq \emptyset \\ +\infty & \text{gdy } A = \{+\infty\} \end{cases}$$

Uwaga 1.6.

- Z określenia górnej i dolnej granicy ciągu $\{a_n\}$ wynika, że \exists podciągi ciągu $\{a_n\}$ zbieżne do granicy górnej i dolnej ciągu $\{a_n\}$.
- Zbiór A jest **domknięty**.

Twierdzenie 1.23. Niech $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ wtedy

- Jeżeli $a > \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$, to $a_n < a$ dla prawie wszystkich* n .
- Jeżeli $a < \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n$, to $a_n > a$ dla prawie wszystkich n .

Twierdzenie 1.24. Niech $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a \quad (1.32)$$

tzn. $A = \{a\}$.

Wniosek 1.3. Ciąg $\{a_n\}$ jest rozbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy \exists podciągi $\{a_{n_k}\}, \{a_{n_l}\} \subset \{a_n\}$, takie że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \neq \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l}$$

* Zwrot „prawie wszystkie” n oznacza wszystkie z wyjątkiem ich skończonej liczby.

1.4. Pewne ciągi specjalne

$$1^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

2° Jeżeli $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < m \leq a_n \leq M$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. W szczególności, gdy $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ oraz $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

3°

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |q| < 1 \\ 1 & \text{gdy } q = 1 \\ +\infty & \text{gdy } q > 1 \\ \sim \exists & \text{gdy } q \leq -1 \end{cases} \quad (1.33)$$

4° $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ gdzie $e = 2,71828\dots$ — liczba niewymierna zwana stałą Eulera.

$$5^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

$$6^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Twierdzenie 1.26. (Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu liczbowego) *Na to, aby ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ był zbieżny potrzeba i wystarcza, aby ciąg ten spełniał warunek Cauchy'ego*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0 \forall n, m \in \mathbb{N} (n > N_\varepsilon \wedge m > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon)$$

Dowód. Pomijamy.

Przykład 1.23.

Zbadać zbieżność ciągu

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \quad (1.34)$$

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, czy zachodzi warunek Cauchy'ego. Dla $m > n$ weźmy $m = n + p$ i oszacujemy

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)^3} \right| = \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)^3} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)^2} < \\ &< \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \end{aligned}$$

więc $|x_{n+p} - x_n| \rightarrow 0$ gdy $n, p \rightarrow \infty$

Zatem ciąg jest zbieżny