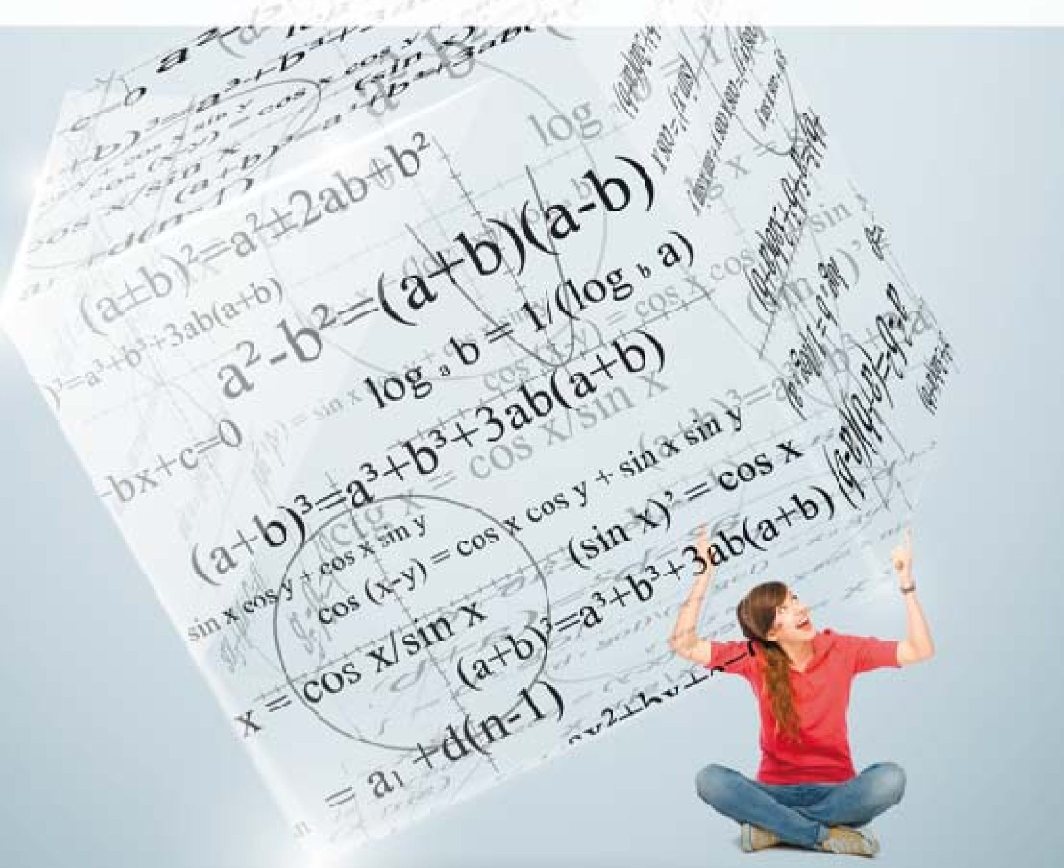
MATEMATYCZNE SZKIEŁKO I OKO

Mniej i bardziej poważne zastosowania matmy

Nie ma litości, jest matematyka!



Dariusz Laskowski

Helion
EDUKACJA

Redaktor prowadzący: Tomasz Waryszak
Projekt okładki: ULABUKA
Skład: Marcin Chłąd

Materiały graficzne na okładce zostały wykorzystane za zgodą Shutterstock.com

Wydawnictwo HELION
ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE
tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63
e-mail: *helion@helion.pl*
WWW: *http://helion.pl* (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!
Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres
http://helion.pl/user/opinie?matszk
Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Kody źródłowe wybranych przykładów dostępne są pod adresem:
ftp://ftp.helion.pl/przyklady/matszk.zip

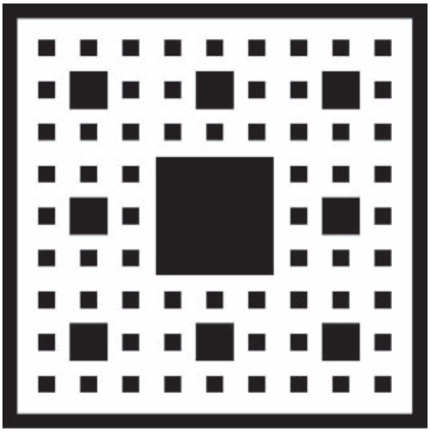
ISBN: 978-83-246-4770-5

Printed in Poland.

Spis treści

19.

Zbiory Julii



— Zabieram cię na wystawę obrazów generowanych komputerowo, której tytuł brzmi *Zbiory Julii* — oznajmił uroczyście Jachu zdziwionemu niecodziennym pomysłem przyjacielowi.

— Dziś na wystawę jest wstęp wolny, a poza tym co jakiś czas trzeba mieć kontakt ze sztuką, choćby i tworzoną przez komputer.

Krzychu poddał się milcząco rozporządzeniu Jacha i po krótkim marszu, dla zdrowia i zaoszczędzenia pieniędzy za przejazd, byli już na wystawie. Po obejrzeniu pierwszych obrazów Krzychu nie krył swojego rozczarowania.

— Sądząc po nazwie, spodziewałem się tu zobaczyć obrazy kobiety, jakieś portrety, surrealistyczne pejzaże, a tymczasem plamy jakieś widzę. Może to i ładne jest, ale co ma do tego Julia?

— Julia [wym. Żulia] był francuskim matematykiem, który odkrył te plamy i pokazał, jak je otrzymywać jeszcze w erze przedkomputerowej. Ich powtórne odkrycie zawdzięczamy nieżyjącemu już matematykowi. Benoit Mandelbrot był twórcą pojęcia fraktala — wymądrzał się Jachu, korzystając z treści wcześniej przeczytanej ulotki, którą dostał przy wejściu na wystawę.

— Jak komputery mogą tworzyć te obrazy? — zastanawiał się Krzychu już w nieco lepszym humorze, bo choć to nie były obrazy, których się spodziewał, to wśród licznie przybyłych na wystawę znalazł obiekty pięknie wyrzeźbione przez naturę, którym mógł się długo przyglądać, tak były pochłonięte podziwianiem rozwieszonych wszędzie czarno-białych eksponatów.

— Patrz na tę w rogu po przeciwnej stronie sali — szepnął do Jacha, który zastanawiał się, czy jego przyjaciel ma na myśli obraz przypominający delikatną koronkę, czy blondynkę o zamyślonej twarzy wpatrującą się w ten obraz. — Niezła figura.

Jachu jednak powoli przestawiał się na odbiór generowanych przez komputer obrazów i próbował sobie wyobrazić proces ich tworzenia. Przypominały mu chmury, bajkowe stwory, wzory tworzone na szybach przez mróz.

Komentarz

Spróbujemy wyjaśnić, jak komputer może generować obrazy, które bezsprzecznie mają walory artystyczne. Ponieważ mówimy tu o obrazach tworzonych na płaszczyźnie, więc zajmijmy się na początek płaszczyzną. Zacznijmy od tego, że po umieszczeniu na płaszczyźnie dwóch osi współrzędnych położenie każdego punktu możemy określić za pomocą dwóch liczb, podobnie jak na osi liczbowej za pomocą jednej — jego odległości od punktu 0 wziętej ze znakiem plus albo minus w zależności od położenia punktu względem zera. Podobnie też jak na liczbach możemy rachować na parach liczb — możemy je dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Żeby wszystkie te działania były podobne do działań na liczbach rzeczywistych, wyrażone są one za pomocą poniższych wzorów:

$$(a, \quad b)+(c, \quad d)=(a+c, \quad b+d)$$
$$(a, \quad b)-(c, \quad d)=(a-c, \quad b-d)$$

$$(a,\quad b)\cdot(c,\quad d)=(a\cdot c-b\cdot d,\quad a\cdot d+b\cdot c)$$

$$(a,\quad b)/(c,\quad d)=\left(\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2},\quad \frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}\right)$$, oprócz przypadku, gdy $(c,\quad d)=(0,\quad 0)$.

Wyjaśnijmy krótko, co oznacza to podobieństwo. Wiemy ze szkoły, że cztery podstawowe działania na liczbach rzeczywistych mają pewne własności. Dodawanie i mnożenie są łączne. Istnieją dla nich tak zwane elementy neutralne, dla dodawania 0, dla mnożenia 1, takie że $a+0=0+a=a$ oraz $a\cdot 1=1\cdot a=a$ dla każdej liczby rzeczywistej a. Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje też element przeciwny $-a$, taki, że $a+(-a)=0$, a dla każdej liczby $a\neq 0$ element odwrotny $\frac{1}{a}$ taki, że $a\cdot\frac{1}{a}=1$. Ponadto mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Czytelnik może sprawdzić, że wszystkie określone przez nas działania na parach liczbowych mają te własności.

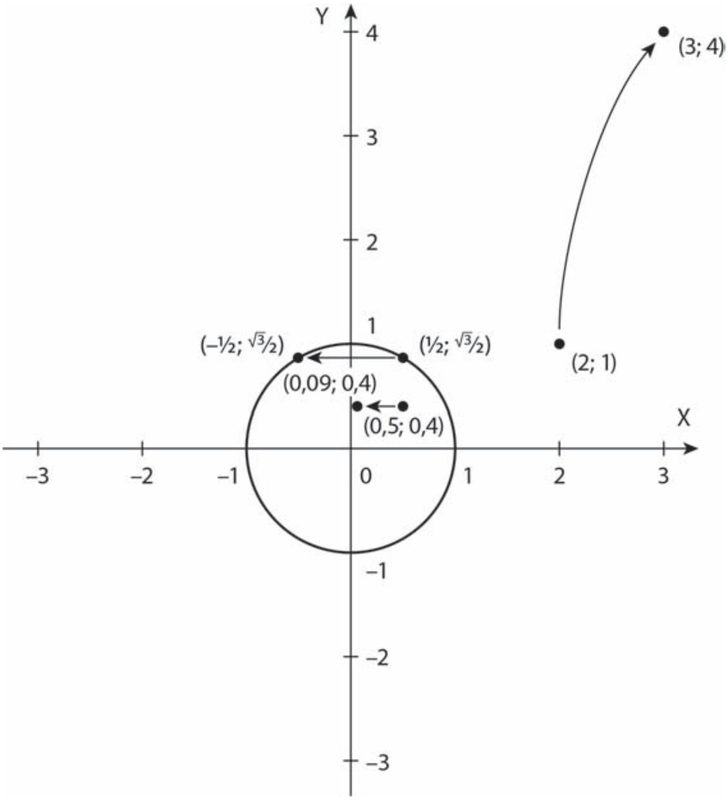
Możemy zatem stwierdzić, że daje się rachować na punktach płaszczyzny jak na liczbach, a wynikiem tych działań jest również punkt na płaszczyźnie, zawsze jeśli tylko nie będziemy dzielić przez $(0,\quad 0)$. Możemy zatem również podnosić punkty do drugiej potęgi, jak w poniższych przykładach, i przyglądać się ruchowi, jaki wykonał punkt w wyniku tego działania (zob. rysunek 19.1).

$$(2,\quad 1)\cdot(2,\quad 1)=(2\cdot 2-1\cdot 1;\quad 2\cdot 1+1\cdot 2)=(3;\quad 4)$$

$$(0,5;\quad 0,4)\cdot(0,5;\quad 0,4)=(0,5\cdot 0,5-0,4\cdot 0,4;\quad 0,5\cdot 0,4+0,4\cdot 0,5)=$$

$$=(0,09;\quad 0,4)$$

$$\left(\frac{1}{2};\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2};\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2};\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



Rysunek 19.1. *Jak zmieniły swoje położenie punkty podniesione do kwadratu*

Zauważmy, że pierwszy punkt po podniesieniu do kwadratu zwiększył swoją odległość od początku układu, drugi zmniejszył, a trzeci zmienił położenie, ale odległość od początku układu nie zmieniła się. Można zadać pytanie, co by się działo, gdybyśmy wielokrotnie powtarzali podnoszenie do kwadratu, wykonując je znów na otrzymanym punkcie. Zauważmy, że wszystkie punkty będące w większej niż 1 odległości od początku układu „uciekną" w wyniku takiego działania do nieskończoności. Funkcja wyraża zmiany, jakie zachodzą dla punktów z chwili na chwilę, kiedy dokonujemy kolejnych iteracji, czyli podstawiamy do funkcji wartość otrzymaną z poprzedniego obliczenia i dokonujemy obliczenia wartości jeszcze raz. Wybierając dowolny punkt płaszczyzny, możemy śledzić, co będzie się z nim działo w wyniku działania funkcji. Taką dwójkę $(C, \quad f)$, gdzie C oznacza u nas zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, a f pewną funkcję określoną na tym zbiorze i mającą w nim swoje wartości, nazywamy *układem dynamicznym*. Po wybraniu dowolnego punktu $z_0 \in C$, czyli punktu należącego do płaszczyzny, i po dokonaniu na nim nieskończenie wielu iteracji z użyciem funkcji $f\,(z_{n+1} = f\left(z_n\right))$ otrzymamy nieskończony ciąg punktów płaszczyzny, niekoniecznie różnych, który nazywamy trajektorią punktu z_0 i który możemy symbolicznie zapisać tak:

$$z_0; \quad z_1 = f\left(z_0\right); \quad z_2 = f\left(f\left(z_0\right)\right); \quad z_3 = f\left(f\left(f\left(z_0\right)\right)\right); \quad \ldots .$$

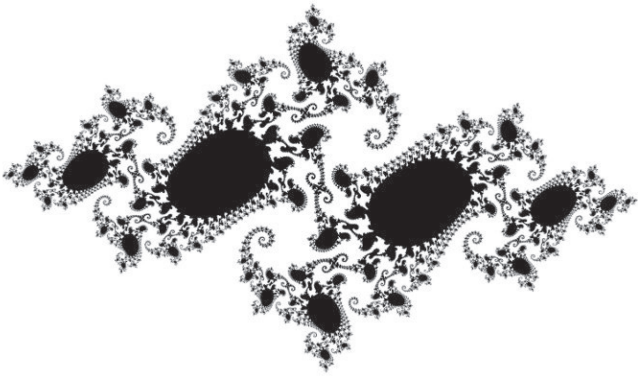
W przypadku funkcji $f\left(z\right) = z^2$ zauważyliśmy trzy różne zachowania się punktów w wyniku nieskończonej iteracji funkcji: punkty wnętrza koła o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych zbiegają do punktu $(0; \quad 0)$, punkty znajdujące się poza kołem uciekają do nieskończoności, a punkty leżące na brzegu koła pozostają na nim. Okrąg jednostkowy jest właśnie zbiorem Julii dla funkcji $f\left(z\right) = z^2$ i stanowi granicę rozdzielającą punkty zbiegające do początku układu od tych uciekających do nieskończoności. Można przypuszczać, że różne funkcje mają różne zbiory Julii i właśnie to dało twórcom wystawy, którą odwiedzili Jachu i Krzychu, możliwość tworzenia piękna przy użyciu komputera. Tu opiszemy sposób, w jaki możemy odróżnić od siebie punkty uciekające do nieskończoności (nazwijmy je „uciekinierami”) od tych, które nie uciekają (nazwijmy je „więźniami”).

Zrobimy to na przykładzie funkcji nieco bardziej skomplikowanych od naszej funkcji kwadratowej użytej do wyjaśnienia pojęcia zbioru Julii, a mianowicie funkcji $f\left(z\right) = z^2 + c$, gdzie $c \in C$ będzie pewnym ustalonym dla danej funkcji punktem płaszczyzny $c = \left(x_c, y_c\right)$. Biorąc dowolny punkt $z = \left(x, y\right)$ i chcąc obliczyć $f\left(z\right) = \left(x_f, y_f\right)$, możemy posłużyć się wzorami:

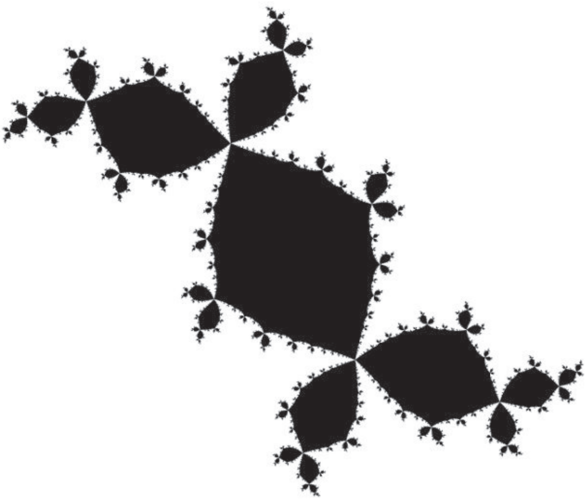
$$x_f = x \cdot x - y \cdot y + x_c$$
$$y_f = 2 \cdot x \cdot y + y_c.$$

Obliczamy w ten sposób kolejne położenia punktu i jeśli ucieka on do nieskończoności, zaznaczamy punkt, od którego zaczęliśmy obliczenia, na biało na tworzonym obrazku, jeśli zaś nie ucieka, zaznaczamy go na czarno. W ten sposób powstaje wygenerowany komputerowo obraz. Ponieważ jednak trajektoria punktu ma nieskończenie wiele elementów, powstaje pytanie, jak stwierdzić, czy dany punkt ucieknie do nieskończoności, czy nie. Otóż stwierdzono, że jeśli w pewnym momencie wartość $\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$ przekroczy wartość $R = \max\left(\left|c\right|, \quad 2\right)$, wtedy punkt ucieka do nieskończoności. Trzeba zatem wykonać pewną liczbę iteracji, aby się o tym przekonać. Im jest ona większa, tym większą mamy pewność, że punkt ucieka.

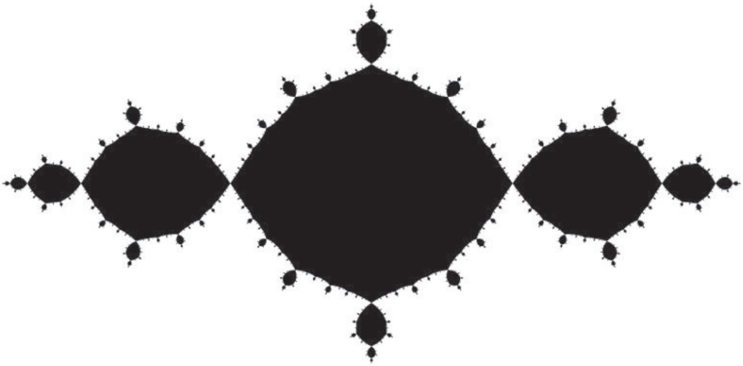
Na rysunkach 19.2, 19.3 i 19.4 Czytelnik znajdzie kilka wygenerowanych przez komputer obrazków. Pod nimi umieszczono informację, dla jakiej wartości *c* zostały wykonane obliczenia.



Rysunek 19.2. *Zbiór więźniów dla* c= (-0,745429; 0,113008)

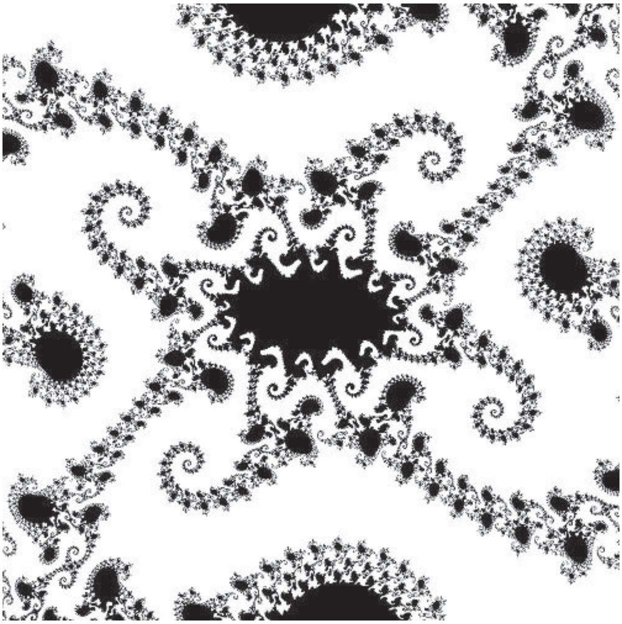


Rysunek 19.3. *Zbiór więźniów dla* c= (-0,12256117; 0,74486177)



Rysunek 19.4. *Zbiór więźniów dla* c= (-1; 0)

Jeśli zaś zechcemy przyjrzeć się z bliska wybranym fragmentom naszych rysunków, to też jest to możliwe i może przynieść nam wiele niespodziewanych doznań estetycznych. Spójrzcie tylko na rysunek 19.5.



Rysunek 19.5. *Powiększony fragment rysunku 19.2*

Skorowidz

R

S

T

U

W

Z


PROGRAM
PARTNERSKI
GRUPY WYDAWNICZEJ HELION
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
3. ZBIERAJ PROWIZJĘ
Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!
Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!
http://program-partnerski.helion.pl
GRUPA WYDAWNICZA
Helion SA

MATEMATYKA TO POTĘGA DO POTĘGI

Czy wiesz, że matematyka to nie czarna magia, tylko dowcip, inteligencja i odrobina tajemniczości w czystej formie? Tak, tak. To nie żadna ściema czy inna niewiadoma.

Zamiast włączać telewizor albo odpalać kolejną gierkę w sieci, otwórz tę książkę. Dzięki odkryciom matematyki przekonasz się, jak można odpowiedzieć na niezwykle frapujące pytania z codziennego życia — także Twojego.

— Ile liczb mieści się na końcu szpilki?

— Na czym polega geometria bazgrołów?

— Co język C++ ma wspólnego z ponętną Moniką?

— Ile kompotu można wypić, gdy pan Czesław ma kolonoskopię?

— I wreszcie wyższa szkoła jazdy: jak za pomocą algorytmu spigot odkodować PIN do lodówki?

Okazuje się, że nieznana kraina faktów, teorii, hipotez, przełomowych eksperymentów i odkryć, dowodów, pojęć i idei matematycznych to nic innego jak nasze życie. A w życiu jak w matematyce — jeden błąd może popsuć wszystko. Lepiej więc wiedzieć więcej i spojrzeć w zagadkowe oczy matmy.

Nie taki X straszny, jak go malują…

Helion SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: helion@helion.pl
http://helion.pl

ISBN 978-83-246-4770-5

9 788324 647705

Cena: 27,90 zł