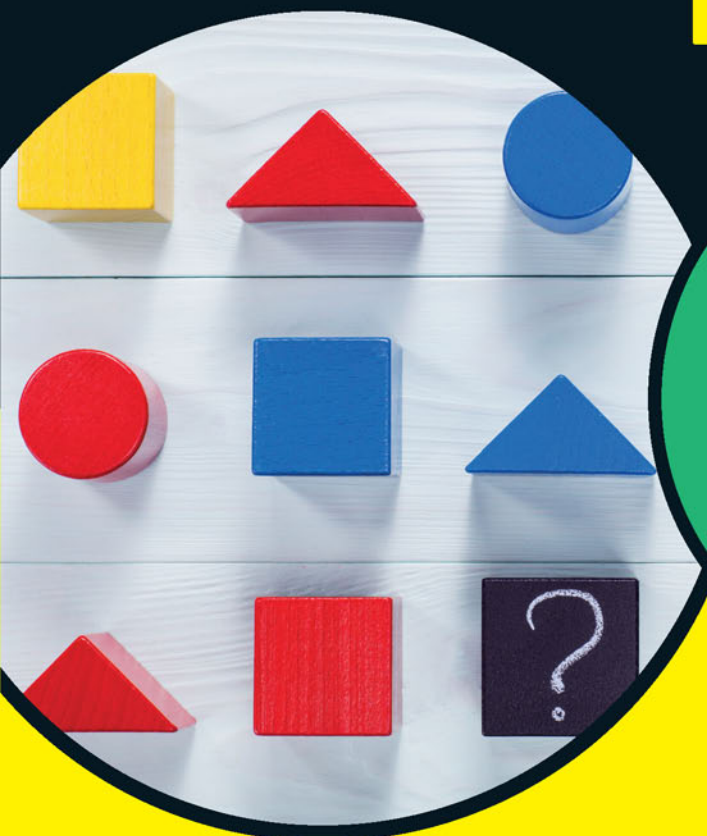


W PROSTOCIE TKWI SIĘ



Logika

dla
bystrzaków



Wprowadzenie
do logiki

Rachunek zdań

Rachunek
kwantyfikatorów

Tytuł oryginału: Logic For Dummies

Tłumaczenie: Maksymilian Gutowski

ISBN: 978-83-283-3381-9

Original English language edition Copyright © 2007 by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey

All rights reserved including the right of reproduction in whole or in part in any form. This translation published by arrangement with John Wiley & Sons, Inc.

Oryginalne angielskie wydanie Copyright © 2007 by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey
Wszelkie prawa, włączając prawo do reprodukcji całości lub części w jakiegokolwiek formie, zarezerwowane. Tłumaczenie opublikowane na mocy porozumienia z John Wiley & Sons, Inc.

Translation copyright © 2017 by Helion S.A.

Wiley, the Wiley Publishing logo, For Dummies, Dla Bystrzaków, the Dummies Man logo, A Reference for the Rest of Us!, The Dummies Way, Dummies Daily, The Fun and Easy Way, Dummies.com, and related trade dress are trademarks or registered trademarks of John Wiley and Sons, Inc. and/or its affiliates in the United States and/or other countries. Used by permission.

Wiley, the Wiley Publishing logo, For Dummies, Dla Bystrzaków, the Dummies Man logo, A Reference for the Rest of Us!, The Dummies Way, Dummies Daily, The Fun and Easy Way, Dummies.com, i związana z tym szata graficzna są markami handlowymi John Wiley and Sons, Inc. i/lub firm stowarzyszonych w Stanach Zjednoczonych i/lub innych krajach. Wykorzystywane na podstawie licencji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://septem.pl/user/opinie/logiby>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Wydawnictwo HELION

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: septem@septem.pl

WWW: <http://septem.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Printed in Poland.

- Kup książkę
- Poleć książkę
- Oceń książkę

- Księgarnia internetowa
- Lubię to! » Nasza społeczność

Spis treści

O autorze	15
Podziękowania od autora	17
Wstęp	19
O książce	19
Konwencje zastosowane w książce	20
Czego nie czytać	21
Naiwne założenia	21
Jak podzielona jest książka	21
Część I: Wprowadzenie do logiki	22
Część II: Rachunek zdań	22
Część III: Dowody, składnia i semantyka w rachunku zdań	22
Część IV: Rachunek kwantyfikatorów	23
Część V: Nowe kierunki w logice	23
Część VI: Dekalogi	23
Ikony użyte w książce	23
Co dalej	24

CZĘŚĆ I: WPROWADZENIE DO LOGIKI

25

ROZDZIAŁ 1: Czym właściwie jest logika?	27
Z perspektywy logiki	28
W poszukiwaniu odpowiedzi	28
Przyczyna i skutek	29
Wszystko i jeszcze trochę	30
Istnienie jako takie	31
Logiczne słowa	31
Prowadzenie wnioskowania	31
Formułowanie przesłanek	32
Wypełnianie luk krokami pośrednimi	32
Formułowanie wniosku	33

	Orzekanie o poprawności wnioskowania	33
	Wskazywanie przesłanek entymematycznych	33
	Proste dochodzenie do wniosków dzięki pierwszym zasadom myślenia	34
	Zasada tożsamości	34
	Zasada wyłączonego środka	34
	Zasada niesprzeczności	35
	Łączenie logiki z matematyką	35
	Matematyka pomaga w zrozumieniu logiki	35
	Logika pomaga w zrozumieniu matematyki	36
ROZDZIAŁ 2:	Od Arystotelesa do komputera	37
	Logika klasyczna — od Arystotelesa do oświecenia	38
	Arystoteles wynajduje sylogistykę	38
	Aksjomaty i twierdzenia Euklidesa	41
	Chryzyp i stoicy	42
	Czas letargu	42
	Logika nowożytna — XVII, XVIII i XIX wiek	43
	Leibniz i renesans	43
	Rozwój logiki formalnej	44
	Logika w XX wieku i współcześnie	47
	Logika nieklasyczna	48
	Twierdzenie Gödla	48
	Epoka komputerów	49
	Co nas jeszcze czeka?	49
ROZDZIAŁ 3:	Jak działa wnioskowanie?	51
	Definicja logiki	52
	Analiza struktury wnioskowania	52
	Określanie poprawności formalnej	54
	Przykłady wnioskowań	55
	Niedzielny wypad na lody	55
	Biedny Fifi	56
	Gdzie wiosna spaliną oddycha	56
	Przypadek niezadowolonego pracownika	57
	Czym logika nie jest	57
	Myślenie a logika	58
	Rzeczywistość — co to takiego?	59
	Adekwatność	60
	Dedukcja i indukcja	61
	Pytania retoryczne	62

Na co to komu?	64
Liczby i relacje (matematyka)	64
Wyprawa na księżyc (nauki przyrodnicze)	65
I/O (informatyka)	65
Powtórz to w sądzie (prawo)	65
Odnaleźć sens życia (filozofia)	66

CZĘŚĆ II: RACHUNEK ZDAŃ 67

ROZDZIAŁ 4: Kwestie formalne 69

Formalne aspekty logiki zdań	70
Stałe zdaniowe	70
Zmienne zdaniowe	71
Wartość logiczna	71
Pięć operatorów logiki zdań	71
Negacja	72
Koniunkcja	74
Alternatywa	75
Implikacja	77
Równoważność	79
Rachunek zdań a prosta arytmetyka	80
Wartości wejściowe i wyjściowe	80
Podstawianie	82
Nawiasy	82
Tłumaczenie zdań	83
Tłumaczenie z rachunku zdań na polski	83
Tłumaczenie z polskiego na rachunek zdań	85

ROZDZIAŁ 5: Znaczenie ewaluacji 89

Wartość logiczna	90
Wprowadzenie do ewaluacji w logice zdań	90
Inna metoda	92
Praca z wyrażeniami	93
Wskazywanie wyrażen podrzędnych	93
Zakresy wyrażen	94
Wskazywanie operatorów głównych	95
Osiem form wyrażen w logice zdań	97
Powtórka z ewaluacji	98

ROZDZIAŁ 6:	Tablice prawdy w ewaluacji wyrażeń	101
	Tablica: metoda siłowa	102
	Twoja pierwsza tablica prawdy	103
	Przygotowanie tablicy prawdy	103
	Wypełnianie tablicy prawdy	105
	Odczytywanie tablicy prawdy	107
	Praca z tablicami prawdy	108
	Tautologie i kontrtautologie	108
	Ocena ekwiwalencji semantycznej	109
	Spójność	110
	Sprawdzanie poprawności	111
	Składanie elementów w całość	113
	Łączenie tautologii z kontrtautologią	113
	Łączenie ekwiwalencji semantycznej z tautologią	115
	Łączenie niespójności z kontrtautologią	115
	Łączenie poprawności z kontrtautologią	116
ROZDZIAŁ 7:	Tablice błyskawiczne	119
	Tablica prawdy jest passé — nadszedł czas tablicy błyskawicznej	120
	Proces stosowania tablicy błyskawicznej	121
	Przyjmowanie założeń strategicznych	121
	Wypełnianie tablicy błyskawicznej	122
	Odczytywanie tablicy błyskawicznej	123
	Obalenie założenia	123
	Planowanie strategii	124
	Tautologia	125
	Kontrtautologia	125
	Wyrażenie przygodne	125
	Ekwiwalencja i nieekwiwalencja semantyczna	126
	Spójność i niespójność	126
	Poprawność i niepoprawność	126
	Jak pracować z tablicami błyskawicznymi, żeby się nie przemęczyć	127
	Rozpoznawanie sześciu najprostszych typów wyrażeń	128
	Praca z czterema nieco bardziej złożonymi typami wyrażeń	129
	Radzenie sobie z sześcioma trudnymi typami wyrażeń	132
ROZDZIAŁ 8:	Drzewa semantyczne	135
	Jak działa drzewo semantyczne?	136
	Rozkład wyrażeń logiki zdań	136
	Rozwiązywanie problemów przy użyciu drzew semantycznych	138

Sprawdzanie spójności lub niespójności	139
Sprawdzanie poprawności lub niepoprawności	141
Odróżnianie tautologii, kontrtautologii i wyrażen przygodnych	143
Tautologie	144
Kontrtautologie	147
Wyrażenia przygodne	149
Sprawdzanie ekwiwalencji semantycznej lub jej braku	149

CZĘŚĆ III: DOWODY, SKŁADNIA I SEMANTYKA W RACHUNKU ZDAŃ 153

ROZDZIAŁ 9: Konstrukcja dowodów 155

Koniec z segregacją przesłanek i wniosków	156
Osiem reguł implikacji w logice zdań	157
Reguły implikacji: modus ponens i modus tollens	158
Reguły koniunkcji: dołączanie i opuszczanie	160
Reguły alternatywy: dołączanie i opuszczanie	162
Reguły podwójnej implikacji: sylogizm hipotetyczny i dylemat konstrukcyjny	165

ROZDZIAŁ 10: Reguły ekwiwalencji 169

Odróżnianie implikacji od ekwiwalencji	170
Ekwiwalencje działają w obie strony	170
Odnoszenie ekwiwalencji do części	170
Dziesięć reguł ekwiwalencji	170
Opuszczanie negacji (ON)	171
Transpozycja (Trans)	172
Reguła zastępowania implikacji (ZI)	172
Eksportacja (Eks)	174
Przemienność (Przem)	175
Łączność (Łącz)	175
Reguła rozdzielności koniunkcji względem alternatywy (Roz)	176
Prawo de Morgana (DeM)	178
Tautologia (Taut)	179
Reguła zastępowania równoważności (ZR)	180

ROZDZIAŁ 11: Założenia w dowodzeniu warunkowym i nie wprost 183

Dowód warunkowy	184
Jak działa dowód warunkowy	185
Wykorzystanie wniosku	186
Więcej niż jedno założenie	188

	Dowodzenie nie wprost	189
	Jak działa dowód nie wprost	189
	Udawnianie krótkich wniosków	191
	Łączenie dowodu warunkowego z dowodem nie wprost	192
ROZDZIAŁ 12:	Strategia konstruowania dowodów	193
	Proste dowody: metoda na wycucie	194
	Przyjrzyj się problemowi	194
	Zapisz podstawowe spostrzeżenia	195
	Wiedz, kiedy skończyć	197
	Umiarkowanie trudne wnioskowania:	
	kiedy używać dowodzenia warunkowego	197
	Trzy przyjazne formy: $x \rightarrow y$, $x \vee y$ i $\sim(x \wedge y)$	198
	Dwie mniej przyjazne formy: $x \leftrightarrow y$ i $\sim(x \leftrightarrow y)$	199
	Trzy nieprzyjazne formy: $x \wedge y$, $\sim(x \vee y)$ i $\sim(x \rightarrow y)$	200
	Trudne wnioskowania: jak wyjść z potrzasku	201
	Wybór rodzaju dowodu wymaga rozwagi	201
	Zacznij budować dowód od wniosku	202
	Zgłębienie form wyrażeń	204
	Rozkładanie długich przesłanek	208
	Przyjmij sprytne założenie	209
ROZDZIAŁ 13:	Wszystkie operatory w cenie jednego	211
	Radzenie sobie z pięcioma operatorami logiki zdań	212
	Redukcja zatrudnienia — historia z życia wzięta	213
	Triumf chciwości	214
	Bunt robotników	214
	Konflikt interesów	215
	Genialny plan	215
	Jaki z tego morał?	217
ROZDZIAŁ 14:	Składnia i semantyka	219
	Poprawnie skonstruowane wyrażenia	220
	Jak działają wyrażenia	221
	Luźniejsze zasady	222
	Odróżnianie wyrażeń sformułowanych poprawnie	
	od wyrażeń niepoprawnych	222
	Porównanie logiki zdań z algebrą Boole'a	223
	Odczytywanie symboli	223
	Rozwiązywanie zadań	226
	Półpierścienie	226
	Składnia i semantyka w algebrze Boole'a	227

CZĘŚĆ IV: RACHUNEK KWANTYFIKATORÓW229

ROZDZIAŁ 15:	Wprowadzenie do logiki kwantyfikatorów231
	Rzut okiem na logikę kwantyfikatorów232
	Nazwy i predykaty233
	Wykorzystanie operatorów z logiki zdań235
	Zmienne nazwowe236
	Wyrażanie ilości przy użyciu dwóch nowych operatorów236
	Kwantyfikator ogólny236
	Kwantyfikator egzystencjalny237
	Dziedzina dyskursu238
	Wyrażenia i formy wyrażeń240
	Określenie zakresu kwantyfikatora240
	Zmienne wolne i związane241
	Wyrażenia i formy wyrażeń241
ROZDZIAŁ 16:	Tłumaczenie wyrażeń rachunku kwantyfikatorów243
	Tłumaczenie podstawowych czterech rodzajów zdań kategoriycznych244
	„Każde” i „niektóre”244
	„Nie wszystkie” i „żadne”246
	Inne tłumaczenia podstawowych form247
	Wyrażanie słowa „każde” kwantyfikatorem \exists248
	Wyrażanie słowa „niektóre” kwantyfikatorem \forall248
	Wyrażanie określenia „nie wszystkie” kwantyfikatorem \exists249
	Wyrażanie określenia „żadne” kwantyfikatorem \forall249
	Zdania z innym słownictwem250
	Rozpoznawanie słowa „każde”250
	Rozpoznawanie słowa „niektóre”251
	Rozpoznawanie określenia „nie wszystkie”251
	Rozpoznawanie słowa „żadne”251
ROZDZIAŁ 17:	Dowodzenie w rachunku kwantyfikatorów253
	Wykorzystanie reguł rachunku zdań w rachunku kwantyfikatorów254
	Porównywanie podobnych wyrażeń w rachunku zdań i rachunku kwantyfikatorów254
	Zastosowanie ośmiu reguł implikacji255
	Zastosowanie dziesięciu reguł ekwiwalencji257
	Przekształcanie zdań regułą zaprzeczenia kwantyfikatora (ZK)258
	Reguła zaprzeczenia kwantyfikatora (ZK)258
	Zastosowanie ZK w dowodzie259

Cztery reguły kwantyfikatorów	260
Prosta reguła #1: instancjacja uniwersalna (IU)	261
Prosta reguła #2: generalizacja egzystencjalna (GE)	264
Trudna reguła #1: instancjacja egzystencjalna (IE)	266
Trudna reguła #2: generalizacja uniwersalna (GU)	270
ROZDZIAŁ 18: Relacje i tożsamości	275
Relacje	276
Definiowanie relacji i ich wykorzystywanie	276
Łączenie wyrażeń relacyjnych	277
Wykorzystanie kwantyfikatorów z relacjami	277
Praca z wieloma kwantyfikatorami	278
Relacje w dowodach	280
Tożsamości	282
Jak działa tożsamość	283
Tożsamości w dowodach	284
ROZDZIAŁ 19: Kwantyfikatory i drzewa semantyczne	287
Drzewa semantyczne w rachunku zdań	288
Zasady rozkładu wyrażeń	288
Wykorzystanie IU, IE i ZK	289
Stosowanie IU więcej niż raz	291
Nieskończone drzewa	294
CZĘŚĆ V: NOWE KIERUNKI W LOGICE	297
ROZDZIAŁ 20: Logika i komputery	299
Wczesne komputery	300
Babbage projektuje pierwsze komputery	300
Turing i UTM	301
Komputery współcześnie	303
Sprzęt i bramki logiczne	303
Oprogramowanie i języki komputerowe	305
ROZDZIAŁ 21: Logika nieklasyczna	307
Możliwość	308
Logika trójwartościowa	308
Logika wielowartościowa	309
Logika rozmyta	311
Logika modalna	313
Logika wyższego rzędu	315
Poza niesprzecznością	316

	Kwantowy przeskok	317
	Logika kwantowa	317
	Dwa kubki	318
ROZDZIAŁ 22:	Paradoksy i systemy aksjomatyczne	321
	Ugruntowanie logiki w teorii zbiorów	322
	Zbiory zebrane ze zbiorów	322
	Paradoks: problem z teorią zbiorów	323
	Opracowanie rozwiązania w Principia mathematica	324
	System aksjomatyczny rachunku zdań	325
	Udowadnianie niesprzeczności i zupełności	326
	Niesprzeczność i zupełność logiki zdań i kwantyfikatorów	327
	Formalizacja logiki i matematyki w ramach programu Hilberta	327
	Twierdzenie Gödla o niezupełności	329
	Znaczenie twierdzenia Gödla	329
	Jak tego dokonał	329
	Co to wszystko znaczy	331
CZĘŚĆ VI: DEKALOGI		333
ROZDZIAŁ 23:	Dziesięć cytatów o logice	335
ROZDZIAŁ 24:	Dziesięciu wielkich logików	337
	Arystoteles (384 – 322 p.n.e.)	337
	Gottfried Leibniz (1646 – 1716)	338
	George Boole (1815 – 1864)	338
	Lewis Carroll (1832 – 1898)	338
	Georg Cantor (1845 – 1918)	339
	Gottlob Frege (1848 – 1925)	339
	Bertrand Russell (1872 – 1970)	339
	David Hilbert (1862 – 1943)	339
	Kurt Gödel (1906 – 1978)	340
	Alan Turing (1912 – 1954)	340
ROZDZIAŁ 25:	Dziesięć sposobów	
	na ułatwienie sobie zaliczenia egzaminu	341
	Oddychaj	341
	Przejrzyj cały arkusz	342
	Zrób rozgrzewkę	342
	Wypełniaj tablice prawdy kolumna po kolumnie	342
	Jeśli gdzieś się zatniesz, spisz wszystko, co możesz	342

Jeśli naprawdę poważnie się zapłaczesz, przejdź dalej	343
Jeśli masz mało czasu, dokończ czarną robotę	343
Sprawdź swoje odpowiedzi	343
Przyznaj się do błędu	344
Siedź do samego końca	344
Skorowidz	345

- ▶▶ wprowadzenie do logiki formalnej;
- ▶▶ pięć operatorów logicznych;
- ▶▶ tłumaczenie zdań.

Rozdział 4

Kwestie formalne

Wystarczy przejrzeć kilka wnioskowań logicznych, choćby takich jak w rozdziale 3., aby zacząć podejrzewać, że wszystkie takie stwierdzenia mają ze sobą wiele wspólnego. Podejrzenie to byłoby zresztą słuszne. Logicy przez wieki zdołali przeanalizować multum wnioskowań i dojść do wniosku, że pewne wzorce stale się powtarzają. Wzorce te można zapisać w formie kilku symboli, a następnie analizować pod kątem ich wspólnych cech.

W tym rozdziale wprowadzę pojęcie **logiki formalnej**, zbioru niezawodnych metod, pozwalających na określenie poprawności lub niepoprawności wnioskowania. Pokażę Ci, jak zapisywać zdania przy użyciu znaków zastępczych zwanych **stałymi** i **zmiennymi**, a także omówię pięć **operatorów logicznych**, służących do łączenia prostych sądów w bardziej rozbudowane zdania.

Operatory logiczne działają podobnie do znanych Ci symboli używanych w arytmetyce (takich jak dodawanie, odejmowanie itp.), więc zwrócę uwagę na te podobieństwa, aby łatwiej było Ci oswoić się z nowymi symbolami logicznymi. Na koniec pokażę Ci, jak tłumaczyć zdania z języka naturalnego na wyrażenia logiczne i z powrotem.

Formalne aspekty logiki zdań



ZAPAMIĘTAJ

Jak wspomniałem w rozdziale 2., **logika zdań** (zwana też **rachunkiem zdań**) jest jednym z dwóch rodzajów klasycznej logiki formalnej. (Drugi rodzaj to **logika kwantyfikatorów**, zwana też **logiką predykatów**. W tym rozdziale zapoznasz się z logiką zdań, którą omawiam szerzej w części II i III. Logiką predykatów zajmę się dopiero w części IV).

Wnioskowania logiczne mają formę językową, ale języki naturalne takie jak polski czy angielski są zazwyczaj mało dokładne. Poszczególne wyrazy miewają różne znaczenia, a całe zdania można też różnie interpretować.

Aby pomóc w rozwiązaniu tego problemu, matematycy i filozofowie opracowali logikę zdań — język przeznaczony konkretnie do precyzyjnego i przejrzystego przekazywania wnioskowań logicznych. Ponieważ logika zdań jest językiem symbolicznym, ma dodatkową zaletę, jaką jest umożliwienie wykonywania obliczeń zgodnie z precyzyjnie zdefiniowanymi zasadami i wzorami. Podobnie jak w matematyce, wystarczy przestrzegać reguł, aby otrzymać poprawną odpowiedź.

W poniższych punktach omówię kilka symboli, których używa się w logice zdań.

Stałe zdaniowe

Jeśli kiedykolwiek uczyłeś się algebry, to pewnie zetknąłeś się z tajemniczym x . Twój nauczyciel pewnie powiedział Ci, że x jest pseudonimem tajemniczej liczby i że Twoim zadaniem jest zmuszenie go, aby wyjawiał swoją tożsamość. Nauczyciel zapewne pokazał Ci także przeróżne, sadystyczne sposoby torturowania biednego x , aby się wreszcie złamał i ujawnił, jaką jest liczbą. A ile w tym było radości!

Z czym jak z czym, ale z podstawianiem liter pod liczby matematycy radzą sobie znakomicie. Trudno się wobec tego dziwić, że w logice formalnej, która jest dziełem matematyków, również używa się liter jako zamienników. We wprowadzeniu do tego rozdziału wspomniałem, że w logice używa się *zdań oznajmujących* zamiast liczb, więc pewnie domyślasz się, że w logice formalnej to właśnie zdania zastępowane są literami. Oto przykład:

Niech k = Kasia karmi swoje rybki.

Niech r = Rybki radośnie łopoczą płetwami.



SPRAWY
TECHNICZNE

Z jakiegoś powodu logicy najbardziej lubią oznaczać stałe literami p i q . Według niektórych wynika to z tego, że p jest pierwszą literą angielskiego wyrazu *proposition*, oznaczającego po prostu *stwierdzenie*, a q dorzucono do tego zupełnym przypadkiem. Sam mam podejrzenie, że po długich latach męczenia algebry w szkolnej ławie logicy zwyczajnie mieli dość patrzenia na x i y .

Zmienne zdaniowe

Gdy logikom przyszło do głowy, że można zastępować zdania literami, zaczęli stosować to rozwiązanie wszędzie. Uświadomili sobie, że literą można oznaczyć *każde* zdanie, nawet wyrażenie w logice zdań. Używane w ten sposób litery nazywamy **zmiennymi zdaniowymi**.

W tej książce posługuję się zmiennymi do prezentowania ogólnych wzorców w logice zdań, a stałych używam przy omawianiu konkretnych przykładów.



ZAPAMIĘTAJ

Kiedy litera zastępuje zdanie w logice zdań, nazywamy ją **zmienną zdaniową**. Zgodnie z konwencją zmienne oznacza się małymi literami. W tej książce używam niemal wyłącznie liter x i y , a w razie potrzeby — dodatkowo w i z .

Wartość logiczna

Jak wspomniałem w rozdziale 3., każde wyrażenie w logice ma **wartość logiczną**: prawdę lub fałsz. W logice formalnej *prawdę* zapisujemy jako **P**, a *fałsz* jako **F**.

Spróbujmy w ramach przykładu określić wartość logiczną dwóch poniższych stałych zdaniowych:

Niech n = Nil jest najdłuższą rzeką w Afryce.

Niech l = Leonardo DiCaprio jest królem świata.

Tak się akurat składa, że Nil rzeczywiście jest najdłuższą rzeką w Afryce, więc wartość logiczna n to **P**. Akurat składa się też tak, że Leonardo DiCaprio *nie jest* królem świata, więc wartość logiczna l to **F**.



SPRAWY
TECHNICZNE

W **algebrze boolowskiej**, prekursorce logiki formalnej, wartością **1** określa się **P**, a wartością **0** określa się **F**. Te dwie wartości stosowane są dziś w informatyce. (Algebrę Boole'a omówię szerzej w rozdziale 14., a zastosowanie logiki w informatyce — w rozdziale 20.).

Pięć operatorów logiki zdań

W rachunku zdań występuje pięć podstawowych operatorów, które widnieją w tabeli 4.1. Te **operatory logiczne** przypominają operatory arytmetyczne o tyle, że przetwarzają podane im wartości i podają nową wartość jako wynik. Operatory logiczne obsługują jednak tylko dwie wartości: **P** i **F**. W kolejnych punktach omówię wszystkie operatory pokazane w tabeli 4.1.

TABELA 4.1. Pięć operatorów logicznych

Operator	Nazwa techniczna	Co oznacza	Przykład
\sim	Negacja	Nie	$\sim x$
\wedge	Koniunkcja	I	$x \wedge y$
\vee	Alternatywa	Lub	$x \vee y$
\rightarrow	Implikacja	Jeśli... to	$x \rightarrow y$
\leftrightarrow	Równoważność	Wtedy i tylko wtedy, kiedy...	$x \leftrightarrow y$

Negacja



ZAPAMIĘTAJ

Każde zdanie można przekształcić w jego przeciwieństwo poprzez dodanie lub zastąpienie kilku słów. Tę czynność nazywamy **negacją** zdania. Oczywiście zanegowanie prawdziwego zdania prowadzi do przekształcenia go w zdanie fałszywe, a zanegowanie zdania fałszywego daje zdanie prawdziwe. Ogólnie można zatem powiedzieć, że każde zdanie ma przeciwną wartość logiczną do zdania, które jest jego negacją.

Zdanie n możemy wobec tego zmienić, dodając do niego jedno proste słowo:

n = Nil jest najdłuższą rzeką w Afryce.

$\sim n$ = Nil *nie* jest najdłuższą rzeką w Afryce.

W wyniku dodania wyrazu *nie* pierwotne zdanie zostało przekształcone w swoje przeciwieństwo, czyli negację tego zdania. Po ustaleniu, że wartość n to **P** (we wcześniejszym punkcie „Wartość logiczna”), możemy stwierdzić, że wartością negacji n jest **F**.

W rachunku zdań operatorem negacji jest *tylda* (\sim). Rozważmy inny przykład negacji:

l = Leonardo DiCaprio jest królem świata.

$\sim l$ = Leonardo DiCaprio *nie* jest królem świata.

W tym przypadku po określeniu, że wartość l to **F** (we wcześniejszym punkcie „Wartość logiczna”), możemy też stwierdzić, że wartość $\sim l$ to **P**.

Powyższe informacje można z łatwością streścić w tablicy:

x	$\sim x$
P	F
F	P



ZAPAMIĘTAJ

Zapamiętaj informacje z powyższej tablicy. Będziesz z nich często korzystał w kolejnych rozdziałach.

Jak widać, w powyższej tablicy użyłem zmiennej x jako zamiennika dowolnego zdania. Kiedy zdanie oznaczone jako x jest prawdziwe, to $\sim x$ jest fałszywe. Z kolei kiedy zdanie x jest fałszywe, $\sim x$ jest prawdziwe.



WSKAZÓWKA

W różnych książkach o logice operator negacji przedstawiany jest jako półpauza (\sim) lub znak przypominający obróconą o 90 stopni literę L . Sam wolę używać tyldy, ale znak ten ma takie samo znaczenie niezależnie od tego, jaki konkretnie symbol zastosowano.

Negacja negacji

Choć negacja to zaledwie wierzchołek góry lodowej, mały system symboli rachunku zdań ma więcej zastosowań, niż wydaje się na pierwszy rzut oka. Przy założeniu, że wartość nowego zdania r to **P**, a jego negacji $\sim r$ to **F**, co można powiedzieć o zdaniu $\sim\sim r$?

Jeśli odgadłeś, że wartość $\sim\sim r$ to **P**, możesz sobie pogratulować. Zauważ też, że domyśliłeś się tego, pomimo że nawet nie podałem znaczenia zdania r .

Oto właśnie moc i magia logiki. Wystarczy kilka prostych zasad, aby od razu było wiadomo, że *każde* sformułowane w ten sposób stwierdzenie *musi* być prawdziwe, nawet jeśli nie znasz właściwej treści stwierdzenia. Ta pewność przypomina sytuację, w której wiesz, że skoro $2 \text{ jabłka} + 3 \text{ jabłka} = 5 \text{ jabłek}$, to taki wynik działania będzie prawdziwy bez względu na to, czy dodajesz do siebie jabłka, dinozaury czy krasnoludki.

Tablice prawdy

Ponieważ r może mieć tylko jedną z dwóch wartości logicznych — **P** lub **F** — informacje o $\sim r$, $\sim\sim r$ i kolejnych takich negacjach możesz zapisać w tablicy następująco:

r	$\sim r$	$\sim\sim r$	$\sim\sim\sim r$
P	F	P	F
F	P	F	P



ZAPAMIĘTAJ

Takie tablice nazywamy **tablicami prawdy**. W pierwszej kolumnie widnieją dwie wartości logiczne, jakie może mieć zdanie r : **P** i **F**. W pozostałych kolumnach podane są wartości różnych pokrewnych zdań: $\sim r$, $\sim\sim r$ itd.

Odczytywanie tablic prawdy jest dość proste. Spójrz na przykładową tablicę powyżej. Jeśli wiesz, że wartość logiczna r to **F** i chcesz się dowiedzieć, jaka jest wartość $\sim\sim\sim r$, musisz znaleźć miejsce, w którym dolny rząd krzyżuje się z ostatnią kolumną. Wartość logiczna podana w tym miejscu wskazuje, że gdy wartość r to **F**, wartość $\sim\sim\sim r$ to **P**.

W rozdziale 6. dowiesz się więcej o efektywności tablic prawdy, ale póki co będą ich używał jedynie do przejrzystego ukazywania informacji.

Koniunkcja

Symbol \wedge jest **operatorem koniunkcji**, czyli ma znaczenie takie jak spójnik *i*. Możesz go traktować po prostu jako wyraz *i* umieszczony między dwoma zdaniami, który łączy je w nowe stwierdzenie.

Spójrz na poniższe stwierdzenie:

Ateny są stolicą Grecji *i* Jerzy Dudek był bramkarzem Liverpoolu.

Czy jest ono prawdziwe, czy fałszywe? Aby to określić, musisz uznać, że w rzeczywistości składa się z dwóch mniejszych zdań: jednego o Atenach, a drugiego — o Jerzym Dudku. Jego wartość logiczna uzależniona jest od wartości obydwu jego członów.

Ponieważ obydwa człony są prawdziwe, stwierdzenie w całości też jest prawdziwe. Wyobraźmy sobie jednak, że któreś ze zdań składowych jest fałszywe. Wyobraźmy sobie równoległy wszechświat, w którym Ateny nie są stolicą Grecji albo w którym Jerzy Dudek nigdy nie był bramkarzem Liverpoolu. W takim przypadku całe stwierdzenie byłoby fałszywe.

W logice stwierdzenia wykorzystujące słowo *i* traktuje się w szczególny sposób. Po pierwsze, każde zdanie składowe ma przypisaną stałą:

Niech a = Ateny są stolicą Grecji.

Niech j = Jerzy Dudek był bramkarzem Liverpoolu.

Obydwa zdania łączysz ze sobą następująco:

$$a \wedge j$$

Wartość logiczna tego nowego zdania uzależniona jest od wartości logicznych dwóch połączonych zdań składowych. Jeśli *obydwa* człony są prawdziwe, całe zdanie też jest prawdziwe. Jeśli *co najmniej jedno* z tych zdań jest fałszywe, to całe zdanie też jest fałszywe.

Wartości logiczne zdania z operatorem \wedge i członami x oraz y można przedstawić w tablicy następująco:

x	y	$x \wedge y$
P	P	P
P	F	F
F	P	F
F	F	F



WSKAZÓWKA

Zapamiętaj informacje z powyższej tablicy. Najprościej ująć je tak: zdanie z operatorem koniunkcji jest prawdziwe tylko wtedy, kiedy obydwa jego człony są prawdziwe. W innym razie jest ono fałszywe.

Zauważ, że w powyższej tablicy operatora \wedge znajdują się cztery rzędy zamiast dwóch, które wystarczyły do scharakteryzowania operatora \sim (podpunkt „Tablice prawdy”). Tablice te różnią się od siebie, ponieważ operator koniunkcji zawsze uwzględnia dwie zmienne, więc jego tablica musi uwzględniać wszystkie cztery pary wartości x i y .



WSKAZÓWKA

W różnych książkach o tematyce logicznej zamiast znaku koniunkcji używa się znaku mnożenia (\cdot) lub znaku $\&$. Czasami zdarza się też, że $x \wedge y$ zapisywane jest jako xy . Konwencje są różne, ale takie oznaczenia są tożsame.

Alternatywa

Podobnie jak w przypadku koniunkcji, stwierdzenie może składać się z dwóch mniejszych zdań, połączonych wyrazem *lub*. W rachunku zdań słowo *lub* zastępuje **operator alternatywy** \vee .

Przyjrzyjmy się poniższemu stwierdzeniu:

Ateny są stolicą Grecji *lub* Jerzy Dudek był bramkarzem Liverpoolu.

Jeśli oznaczymy pierwsze zdanie jako a , a drugie jako b , to będziemy je mogli ze sobą połączyć następująco:

$$a \vee b$$

Czy powyższe zdanie jest prawdziwe? Podobnie jak w koniunkcji, kiedy obydwa człony zdania są prawdziwe, prawdziwe jest też całe zdanie. Zdanie $a \vee b$ ma zatem wartość logiczną **P**. W przypadku alternatywy jednak zdanie w całości jest prawdziwe, nawet jeśli prawdziwy jest tylko jeden z jego członów. Oto przykład:

Niech a = Ateny są stolicą Grecji.

Niech n = Jerzy Dudek był napastnikiem Manchesteru United.

Zdanie $a \vee n$ oznacza:

Ateny są stolicą Grecji *lub* Jerzy Dudek był napastnikiem Manchesteru United.

Choć drugi człon tego zdania jest fałszywy, jest ono w całości prawdziwe, ponieważ prawdziwy jest jeden z jego członów. Zdanie $a \vee n$ ma zatem wartość **P**.

Kiedy jednak *obydwa* człony alternatywy są fałszywe, fałszywe jest też całe zdanie. Oto przykład:

Niech w = Ateny są stolicą Włoch.

Niech n = Jerzy Dudek był napastnikiem Manchesteru United.

Zdanie $w \vee n$ oznacza:

Ateny są stolicą Włoch *lub* Jerzy Dudek był napastnikiem Manchesteru United.

Powyższe zdanie jest fałszywe, ponieważ obydwa jego człony są fałszywe. A zatem $w \vee n$ ma wartość **F**.

Dla operatora \vee możesz utworzyć tablicę z czterema rzędami, która obejmuje wszystkie możliwe kombinacje wartości logicznych dla zdań x i y :

x	y	$x \vee y$
P	P	P
P	F	P
F	P	P
F	F	F



WSKAZÓWKA

Zapamiętaj informacje z powyższej tablicy. Najprościej ująć je tak: zdanie z operatorem alternatywy jest fałszywe tylko wtedy, kiedy obydwa jego człony są fałszywe. W innym przypadku jest ono prawdziwe.

W języku polskim spójników *lub* i *albo* używa się wymiennie, ale w logice przyjęło się odróżniać je od siebie jako oznaczenia alternatywy **nierozłącznej** i alternatywy **rozłącznej**:

►► **Alternatywa nierozłączna (*lub*)** oznacza „jedna możliwość lub druga, lub *obie*”, czyli jest prawdziwa *także wtedy*, kiedy obydwa człony są prawdziwe. Przykładem alternatywy nierozłącznej jest następujące zdanie, które matka może skierować do dziecka: „Przed wyjściem z domu musisz posprzątać swój pokój *lub* odrobić lekcje”. Rzecz jasna matka chce, żeby dziecko wykonało jedno z tych zadań albo *i obydwa*.

►► **Alternatywa rozłączna (*albo*)** oznacza „albo jedna możliwość, albo druga, ale *nie obie*”, czyli *nie jest* prawdziwa wtedy, kiedy obydwa człony są prawdziwe. Przykładem alternatywy rozłącznej jest następujące zdanie: „Dam ci pieniądze, żebyś kupił sobie *albo* lody, *albo* lizaka”. Matka chce przez to powiedzieć, że dziecko dostanie pieniądze na jeden z tych smakołyków, ale *nie na obydwa*.



ZAPAMIĘTAJ

Język polski jest wieloznaczny, ale logika taka nie jest. Przyjęło się, że operator \vee zawsze oznacza alternatywę **nierozłączną**. Jeśli obydwa człony takiej alternatywy są prawdziwe, całe zdanie też jest prawdziwe.



SPRAWY
TECHNICZNE

Obydwa rodzaje alternatyw stosowane są przy tworzeniu bramek logicznych, które są integralnymi elementami sprzętu komputerowego. W rozdziale 20. przeczytasz więcej na temat zastosowania logiki w komputerach.

Implikacja

Symbol \rightarrow nazywamy **operatorem implikacji**. Aby zrozumieć jego działanie, przyjrzyj się poniższemu stwierdzeniu:

Jeśli na słupku łóżka w pokoju gościnnym wisi peruka, to ciocia Genowefa przyjechała z wizytą.

Widać, że składa się ono z dwóch sądów, które można wyrazić osobno stałymi zdaniowymi:

Niech p = Na słupku łóżka w pokoju gościnnym wisi peruka.

Niech g = Ciocia Genowefa przyjechała z wizytą.

Następnie łączymy je nowym operatorem:

$$p \rightarrow g$$

Podobnie jak w przypadku innych, omówionych w tym rozdziale operatorów, dla operatora \rightarrow można utworzyć czterorzędową tablicę, obejmującą wszystkie możliwe kombinacje wartości logicznych zdań x i y :

x	y	$x \rightarrow y$
P	P	P
P	F	F
F	P	P
F	F	P



WSKAZÓWKA

Zapamiętaj informacje z powyższej tablicy. Najprościej ująć je tak: implikacja jest fałszywa tylko wtedy, kiedy jej pierwszy człon jest prawdziwy, a drugi — fałszywy; w każdym innym przypadku implikacja jest prawdziwa.

W innych książkach o logice implikacja może być oznaczona symbolem \supset zamiast strzałką. Jest to taka sama implikacja, mimo że symbol się różni.



ZAPAMIĘTAJ

Wygląd operatora \rightarrow jest nieprzypadkowy. Istnieje ważny powód, dla którego strzałka wskazuje od lewej do prawej: jeśli implikacja jest prawdziwa, a poprzednik operatora też jest prawdziwy, to następnik *również musi być prawdziwy*.

Posłużę się nowymi stałymi, żeby to lepiej wyjaśnić:

Niech b = Jesteś w Berlinie.

Niech n = Jesteś w Niemczech.

Rozważ teraz poniższe zdanie:

$$b \rightarrow n$$

Oznacza ono: „Jeśli jesteś w Berlinie, to jesteś w Niemczech”. Stwierdzenie to jest oczywiście prawdziwe, ale dlaczego? Dlatego, że Berlin znajduje się w Niemczech.

Konwersja zdania

Po odwróceniu implikacji uzyskujesz zdanie będące jej **konwersją**. Poniżej widzisz implikację i jej konwersję:

Implikacja: Jeśli jesteś w Berlinie, to jesteś w Niemczech.

Konwersja: Jeśli jesteś w Niemczech, to jesteś w Berlinie.



OSTRZEŻENIE

Jeśli implikacja jest prawdziwa, to wcale nie wynika z tego, że jej *konwersja* też jest prawdziwa. Choć powyższa implikacja jest prawdziwa, jej konwersja jest fałszywa. Równie dobrze mógłbyś być w Hamburgu, Frankfurtcie bądź jakimkolwiek innym mieście w Niemczech.

Inwersja zdania

Kiedy negujesz obydwa człony implikacji, uzyskujesz zdanie będące jej **inwersją**. Porównaj poniższe stwierdzenia:

Implikacja: Jeśli jesteś w Berlinie, to jesteś w Niemczech.

Inwersja: Jeśli nie jesteś w Berlinie, to nie jesteś w Niemczech.



OSTRZEŻENIE

Jeśli implikacja jest prawdziwa, to wcale nie wynika z tego, że jej *inwersja* też jest prawdziwa. Nawet gdybyś nie był w Berlinie, to mógłbyś być w jakimkolwiek innym mieście w Niemczech.

Kontrapozycja zdania

Kiedy zarówno zamienisz kolejność obydwu członów implikacji, jak i zanegujesz je, uzyskasz kontrapozycję pierwotnego zdania. Wiem, wiem — zaczyna się robić mętnie. Ale mam przykład:

Implikacja: Jeśli jesteś w Berlinie, to jesteś w Niemczech.

Kontrapozycja: Jeśli nie jesteś w Niemczech, to nie jesteś w Berlinie.



ZAPAMIĘTAJ

Implikacja i kontrapozycja zdania zawsze mają jednakową wartość logiczną. Zgodnie z powyższym przykładem: przy założeniu, że poprzednik jest prawdziwy i rzeczywiście nie ma Cię w Niemczech, to siłą rzeczy nie możesz być w Berlinie.



SPRAWY
TECHNICZNE

Choć zdanie i jego kontrapozycja zawsze mają taką samą wartość logiczną, w praktyce udowodnienie kontrapozycji zdania jest czasami łatwiejsze od udowodnienia jego pierwowzoru. (Więcej o dowodach w logice zdań znajdziesz w części III). Konwersja zdania zawsze ma tę samą wartość logiczną, co inwersja zdania. Jest tak, ponieważ konwersja i inwersja są kontrapozycjami *dla siebie nawzajem*.

Równoważność

W logice zdań operator równoważności (\leftrightarrow) przypomina operator implikacji (omówiony w punkcie „Implikacja”), ale jest nieco dokładniejszy. Najlepszym sposobem na objaśnienie jego działania jest sformułowanie implikacji i jej przeanalizowanie.

Rozważ poniższą implikację:

Jeśli na słupku łóżka w pokoju gościnnym wisi peruka, to ciocia Genowefa przyjechała z wizytą.

Z tego stwierdzenia wynikają następujące rzeczy:

1. Jeśli na słupku łóżka wisi peruka, to możesz mieć *pewność*, że ciocia Genowefa przyjechała, ale...
2. Jeśli widzisz ciocię Genowefę, to *nie możesz* mieć pewności, że na słupku łóżka wisi peruka.

Powyższą implikację można przedstawić w rachunku zdań jako $p \rightarrow g$ ze strzałką skierowaną w kierunku, w którym przebiega implikacja: peruka *implikuje* ciocię Genowefę.

Rozważ teraz kolejne stwierdzenie:

Na słupku łóżka w pokoju gościnnym wisi peruka wtedy i tylko wtedy, gdy ciocia Genowefa przyjechała z wizytą.

Przypomina ono poprzednie stwierdzenie, ale wynikają z niego inne rzeczy:

1. Jeśli na słupku łóżka wisi peruka, to możesz mieć *pewność*, że ciocia Genowefa przyjechała i...
2. Jeśli widzisz ciocię Genowefę, to możesz mieć *pewność*, że na słupku łóżka wisi peruka.

Powyższe stwierdzenie można przedstawić w rachunku zdań jako $p \leftrightarrow g$, przy czym podwójna strzałka podpowiada jego znaczenie: *zarówno* peruka implikuje ciocię Genowefę, *jak i* ciocia Genowefa implikuje perukę.

Nie myl operatora równoważności (\leftrightarrow) z operatorem implikacji (\rightarrow).

Podobnie jak z innymi operatorami, dla operatora równoważności można utworzyć czterorzędową tablicę, obejmującą wszystkie możliwe kombinacje wartości logicznych dla wyrażeń x i y :

x	y	$x \leftrightarrow y$
P	P	P
P	F	F
F	P	F
F	F	P



OSTRZEŻENIE



WSKAZÓWKA

Zapamiętaj informacje z powyższej tablicy. Najprościej ująć je tak: równoważność jest prawdziwa tylko wtedy, kiedy obydwa jej człony mają jednakową wartość logiczną; w każdym innym przypadku równoważność jest fałszywa.

Istotnym aspektem równoważności jest to, że obydwa człony równoważności są **ekwiwalentne logicznie**, czyli jeśli jeden jest prawdziwy, to drugi też musi taki być.

Oto kolejne dwa przykłady równoważności:

Jesteś w Warszawie wtedy i tylko wtedy, kiedy jesteś w stolicy Polski.

Liczba jest parzysta wtedy i tylko wtedy, kiedy po jej podzieleniu przez dwa nie zostaje reszta.

Z pierwszego zdania wynika, że Warszawa *jest* stolicą Polski. Drugie zdanie wskazuje na równoważność obydwu członów — parzystość jest tożsama z podzielnością przez dwa.



WSKAZÓWKA

W innych książkach o logice równoważność zapisuje się znakiem \equiv zamiast \leftrightarrow . Niezależnie od konkretnego symbolu znaczenie jest jednakowe.

Rachunek zdań a prosta arytmetyka

Jak wspominałem w podrozdziale „Pięć operatorów logiki zdań”, logika zdań przypomina matematykę o tyle, że w obydwu tych dyscyplinach operatory przetwarzają podane im wartości i określają nową wartość wyjściową. Podobieństwa jednak na tym się nie kończą, a po dostrzeżeniu kolejnych o wiele łatwiej będzie Ci zrozumieć logikę zdań.

Wartości wejściowe i wyjściowe

Każdy z czterech podstawowych operatorów arytmetycznych przekształca dwie liczby w jedną. Oto przykłady:

$$6 + 2 = 8$$

$$6 - 2 = 4$$

$$6 \cdot 2 = 12$$

$$6 : 2 = 3$$



ZAPAMIĘTAJ

Dwie liczby po lewej stronie znaku równości to **wartości wejściowe**, a liczba po prawej stronie znaku równości to **wartość wyjściowa**.

W każdym przypadku umieszczenie operatora między dwiema wartościami wejściowymi (6 i 2) tworzy wartość wyjściową (tutaj pogrubioną). Operatory te nazywamy **operatorami dwuargumentowymi**, ponieważ przetwarzają dwie wartości wyjściowe.

Znak odejmowania ma w matematyce także inne zastosowanie. Taki znak umieszczony przed liczbą dodatnią przekształca ją w ujemną, a przed ujemną — w dodatnią. Oto przykład:

$$-(-4) = 4$$

W tym przypadku pierwszy znak minusa odnosi się do wartości wejściowej (-4), którą przekształca w wartość wyjściową (4). Zastosowany w ten sposób znak odejmowania jest **operatorem jednoargumentowym**, ponieważ działa na jednej wartości wejściowej.

W arytmetyce musisz liczyć się z nieskończoną liczbą wartości, ale w rachunku zdań posługujesz się jedynie dwiema: **P** i **F**. (Więcej na temat wartości logicznych napisałem w punkcie „Wartość logiczna”).

Podobnie jak w arytmetyce, w logice posługujemy się czterema operatorami dwuargumentowymi i jednym jednoargumentowym. W rachunku zdań operatory binarne to \wedge , \vee , \rightarrow i \leftrightarrow , a unarny to \sim . (Każdy z nich omówiłem w podrozdziale „Pięć operatorów logiki zdań”).



ZAPAMIĘTAJ

Obydwa rodzaje operatorów obowiązują te same postawowe zasady, co w arytmetyce:

- ▶▶ Umieszczenie operatora dwuargumentowego między dwiema dowolnymi wartościami wejściowymi tworzy wartość wyjściową.
- ▶▶ Umieszczenie operatora jednoargumentowego przed wartością wejściową tworzy wartość wyjściową.

Możemy na przykład połączyć dwie wartości wejściowe, **F** i **P** (w tej dokładnie kolejności), czterema operatorami binarnymi:

$$\mathbf{F} \wedge \mathbf{P} = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} \vee \mathbf{P} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{P} = \mathbf{F}$$

W każdym przypadku operator tworzy wartość wyjściową, czyli **P** lub **F**. Umieszczenie operatora unarnego przed wartością **P** lub **F** również tworzy wartość wyjściową:

$$\sim \mathbf{F} = \mathbf{P}$$

$$\sim \mathbf{P} = \mathbf{F}$$

Podstawianie

Jeśli liźnąłeś chociaż odrobinę algebry, to powinieneś wiedzieć, że litery mogą reprezentować liczby. Jeśli na przykład powiem Ci, że

$$a = 9 \text{ i } b = 3$$

to będziesz mógł z łatwością obliczyć, że

$$a + b = 12$$

$$a - b = 6$$

$$a \cdot b = 27$$

$$a : b = 3$$

Te same zasady dotyczą pracy ze stałymi zdaniowymi w rachunku zdań. Wystarczy jedynie podstawić właściwe wartości (**P** lub **F**) pod stałe. Przyjrzyj się poniższemu przykładowi:

Zakładając, że p jest prawdziwe, q jest fałszywe, a r jest prawdziwe, określ wartości poniższych wyrażeń:

1. $p \vee q$

2. $p \rightarrow r$

3. $q \leftrightarrow r$

W przypadku 1. **P** podstawiasz pod p , a **F** pod q . Daje to $\mathbf{P} \vee \mathbf{F}$, czyli **P**.

W przypadku 2. **P** podstawiasz pod p i **P** pod r . Daje to $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$, czyli **P**.

W przypadku 3. **F** podstawiasz pod q , a **P** pod r . Daje to $\mathbf{F} \leftrightarrow \mathbf{P}$, czyli **F**.

Nawiasy

W arytmetyce nawiasy służą do grupowania liczb i działań. Oto przykład:

$$-((4 + 8) : 3)$$

W tym wyrażeniu nawiasy wskazują, że należy najpierw obliczyć $4 + 8$, co daje wynik 12. Następnie należy przejść do kolejnego nawiasu, czyli $12 : 3 = 4$. Na koniec unarny operator negacji ($-$) zmienia tę wartość na -4 .

Należy zatem zaczynać rozwiązywanie od najgłębiej osadzonego nawiasu. W logice zdań nawiasy działają tak samo. Zakładając, że p jest prawdą, q jest fałszem, a r jest prawdą, znajdź wartość poniższego wyrażenia:

$$\sim((p \vee q) \rightarrow \sim r)$$

Zaczynając od najgłębiej osadzonego nawiasu, pod $p \vee q$ podstawiamy $\mathbf{P} \vee \mathbf{F}$, które wynosi \mathbf{P} . Przechodzimy do kolejnego nawiasu, gdzie pod $p \rightarrow \sim r$ podstawiamy $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{F}$, czyli \mathbf{F} . Wreszcie \sim , poprzedzająca wszystkie nawiasy, zmienia \mathbf{F} w \mathbf{P} .



ZAPAMIĘTAJ

Proces skracania stwierdzenia składającego się z więcej niż jednej wartości do wartości pojedynczej nazywa się **ewaluacją wyrażenia** bądź oceną jego wartości logicznej. Jest to bardzo ważna czynność, o której przeczytasz więcej w rozdziale 5.

Tłumaczenie zdań

Logika zdań jest językiem, więc wystarczy znać reguły, jakie nim rządzą, aby móc tłumaczyć zdania z języka logicznego na polski, hiszpański czy chiński — na razie jednak zostaniemy przy polskim! (Jeżeli natomiast interesuje Cię któryś z tych języków, to sięgnij po *Hiszpański dla bystrzaków* lub *Chiński dla bystrzaków*).



ZAPAMIĘTAJ

Główną zaletą logiki zdań jest jej przejrzystość i jednoznaczność. To właśnie dzięki tym cechom można z łatwością przetłumaczyć zdanie z języka logicznego na polski, dlatego uznaję ten kierunek tłumaczenia za *łatwy*. Polski nie jest jednak przejrzysty i jednoznaczny. (W punkcie „Alternatywa” zwróciłem uwagę na to, że w języku naturalnym słowa takie jak *lub* i *albo* stosowane są wymiennie, choć mogą oznaczać zupełnie różne rodzaje alternatyw). Przy tłumaczeniu zdań z polskiego na język logiczny trzeba być bardzo uważnym, dlatego ten kierunek tłumaczenia uznaję za *nie-taki-łatwy*.



WSKAZÓWKA

Tłumaczenie zdań w obydwu kierunkach rozwine Twoje rozumienie logiki zdań, ponieważ będziesz miał wiele okazji, by zgłębić właściwe znaczenie tych wszystkich symboli, które dotąd przedstawiłem. Jeśli podczas lektury kolejnych rozdziałów pogubisz się, w razie czego przypomnij sobie, że każde zdanie w rachunku zdań, choćby najbardziej złożone, można przełożyć na polski.

Tłumaczenie z rachunku zdań na polski

Czasami najlepiej posłużyć się przykładem. Poniżej pokazano różne możliwości tłumaczenia każdego operatora. Zwroty te są dość proste, więc możesz wybrać ten, który podoba Ci się najbardziej, i stosować go regularnie. W tym punkcie będę używać następujących stałych zdaniowych:

Niech a = Antek kocha Ankę.

Niech b = Bakłażan leży na blacie.

Niech c = Celina przyszywa cekiny.

Tłumaczenie wyrażeń z \sim

Wyrażenie $\sim a$ można przetłumaczyć na polski następująco:

Nie jest prawdą, że Antek kocha Ankę.

Nie jest tak, że Antek kocha Ankę.

Antek nie kocha Anki.

Tłumaczenie wyrażeń z \wedge

Wyrażenie $a \wedge b$ można przetłumaczyć następująco:

Antek kocha Ankę i bakłażan leży na blacie.

Zarówno Antek kocha Ankę, jak i bakłażan leży na blacie.

Tłumaczenie wyrażeń z \vee

Wyrażenie $a \vee c$ można przetłumaczyć następująco:

Antek kocha Ankę lub Celina przyszywa cekiny.

Antek kocha Ankę albo Celina przyszywa cekiny.

Tłumaczenie wyrażeń z \rightarrow

Wyrażenie $b \rightarrow c$ można przetłumaczyć następująco:

Jeśli bakłażan leży na blacie, to Celina przyszywa cekiny.

Bakłażan leży na blacie, więc Celina przyszywa cekiny.

Bakłażan leży na blacie, zatem Celina przyszywa cekiny.

Bakłażan leży na blacie, tylko jeśli Celina przyszywa cekiny.

Tłumaczenie wyrażeń z \leftrightarrow

Wyrażenie $c \leftrightarrow a$ można przetłumaczyć praktycznie tylko w jeden sposób:

Celina przyszywa cekiny wtedy i tylko wtedy, kiedy bakłażan leży na blacie.

Tłumaczenie bardziej złożonych wyrażeń

W przypadku bardziej złożonych wyrażeń możesz sięgnąć po wskazówki, które podałem w podrozdziale „Rachunek zdań a prosta arytmetyka”. Wystarczy krok po kroku tłumaczyć kolejne człony wyrażenia, zaczynając od nawiasów:

$$(\sim a \wedge b) \vee \sim c$$

Wyrażenie zawarte w nawiasie to $(\sim a \wedge b)$, czyli:

Antek nie kocha Anki i bakłażan leży na blacie.

Po dodaniu ostatniej części wyrażenia otrzymujemy następujące zdanie:

Antek nie kocha Anki i bakłażan leży na blacie *lub* Celina nie przyszywa cekinów.

Zauważ, że choć powyższe zdanie jest poprawne, to trudno zrozumieć jego sens, ponieważ nawiasy zniknęły i wszystko zlepiło się tak, że powstał długi ciąg tekstu. Wystarczy jednak to zdanie odrobinę przekształcić, aby je uporządkować:

Albo Antek nie kocha Anki i bakłażan leży na blacie, *albo* Celina nie przyszywa cekinów.

Słowa *albo* oddzielają od siebie te człony, które objęte są alternatywą. Dla porównania wyrażenie:

$$\sim a \wedge (b \vee \sim c)$$

można przetłumaczyć jako

Antek nie kocha Anki i *albo* bakłażan leży na blacie, *albo* Celina nie przyszywa cekinów.

Spójrzmy teraz na inny przykład:

$$\sim(a \rightarrow (\sim b \wedge c))$$

Zaczynając od zagnieżdżonego nawiasu ($\sim b \wedge c$) tłumaczymy jako

Bakłażan nie leży na blacie i Celina przyszywa cekiny.

Po uwzględnieniu zewnętrznego nawiasu zdanie wygląda tak:

Jeśli Antek kocha Ankę, *to zarówno* bakłażan nie leży na blacie, *jak i* Celina przyszywa cekiny.

Zauważ, że dodanie członu *zarówno... jak i* pozwala na wyróżnienie koniunkcji z pierwszego nawiasu. Na koniec musimy jeszcze uwzględnić negację:

Nie jest tak, że jeżeli Antek kocha Ankę, *to zarówno* bakłażan nie leży na blacie, *jak i* Celina przyszywa cekiny.

Nie twierdę, że powyższe zdanie jest stylistycznym arcydziełem, ale przynajmniej zachowuje sens. Prawdopodobnie nigdy nie będziesz musiał tłumaczyć wyrażań bardziej skomplikowanych od powyższego, ale powinieneś docenić teraz to, że logika zdań pozwala na radzenie sobie z wyrażeniami o dowolnej długości w sposób całkowicie przejrzysty i zrozumiały.

Tłumaczenie z polskiego na rachunek zdań

Każdy z czterech operatorów binarnych w logice zdań (\wedge , \vee , \rightarrow i \leftrightarrow) łączy ze sobą parę zdań. W języku polskim takie elementy nazywamy **spójnikami**. Oto kilka przykładowych spójników:

choć	jeśli... to	lub
i	albo... albo	więc
ale	ani... ani	zatem
jednak	aczkolwiek	choć
bo	natomiast	zatem

Na początek zdefiniujmy jednak parę stałych zdaniowych:

Niech k = Kasia mieszka w Krakowie.

Niech l = Kasia mieszka przy Librowszczyźnie.

Niech m = Lubię Manię.

Niech n = Lubię Ninę.

Niech o = Kasia lubi Olę.

Ale, chociaż, jednak, pomimo że...

Wiele polskich spójników pod względem logicznym łączy zdania tak samo jak wyraz *i*. Oto kilka przykładów:

Lubię Manię, *ale* lubię też Ninę.

Choć lubię Manię, lubię też Ninę.

Pomimo że lubię Manię, lubię też Ninę.

Lubię Manię, *jednak* lubię też Ninę.

Lubię Manię, *aczkolwiek* lubię też Ninę.

Każdy z tych wyrazów ma nieco inne znaczenie, ale w sensie logicznym wszystkie powyższe zdania tłumaczymy jako

$$m \wedge n$$



ZAPAMIĘTAJ

Po przetłumaczeniu zdania z polskiego na język logiczny obowiązują już tylko zasady rachunku zdań. W tym przypadku, tak jak przy każdej koniunkcji, jeśli m lub n jest fałszywe, to wyrażenie $m \wedge n$ jest fałszywe. W przeciwnym razie jest prawdziwe.

Ani... ani

Struktura *ani... ani* neguje obydwa argumenty stwierdzenia. Oto przykład:

Ani nie lubię Mani, *ani* nie lubię Niny.

Oznacza to, że nie lubię zarówno Mani, jak i Niny. To stwierdzenie w rachunku zdań wygląda następująco:

$$\sim m \wedge \sim n$$

Nie... zarówno

Struktura *nie... zarówno* polega na tym, że choć całe stwierdzenie jest zanegowane, żaden z argumentów nie jest zanegowany pojedynczo. Oto przykład:

Nie lubię zarówno Mani, jak i Niny.

Z tego zdania wynika, że choć nie lubię ich łącznie, mogę lubić którąś z nich osobno. To stwierdzenie wygląda następująco w rachunku zdań:

$$\sim(m \wedge n)$$

...jeśli

Wiesz już, jak przetłumaczyć stwierdzenie, które zaczyna się od wyrazu *jeśli*. Może to być jednak mylące, gdy wyraz ten znajduje się w środku zdania:

Lubię Manię, *jeśli* Kasia lubi Olę.

To stwierdzenie należy rozplątać, żeby stało się jasne:

Jeśli Kasia lubi Olę, to lubię Manię.

Tak uporządkowane stwierdzenie można przetłumaczyć następująco:

$$o \rightarrow m$$

...tylko jeśli...

To sformułowanie jest na pierwszy rzut oka mylące, ale wystarczy się przez moment zastanowić. Przede wszystkim zauważ, że poniższe stwierdzenie jest prawdziwe:

Kasia mieszka przy Librowszczyźnie, *tylko jeśli* mieszka w Krakowie.

Ma to sens, bo jedynym sposobem na mieszkanie przy Librowszczyźnie jest mieszkanie w Krakowie. Zauważ teraz, że poniższe stwierdzenie też jest prawdziwe:

Jeśli Kasia mieszka przy Librowszczyźnie, to mieszka w Krakowie.

Powyższe dwa zdania są ekwiwalentne logicznie. Jeśli więc trafisz na zdanie, którego dwie części składowe oddzielone są od siebie sformułowaniem *...tylko jeśli...*, to pamiętaj, że jest to po prostu implikacja, której argumenty są już ułożone we właściwej kolejności. Przetłumacz je wtedy jako:

$$l \rightarrow k$$

...lub...

Jak wspomniałem w punkcie „Alternatywa”, te wyrazy są źródłem wielu problemów. Rozważmy poniższy przykład:

Kasia mieszka w Krakowie *lub* Kasia lubi Olę.

W zależności od intencji stwierdzenie to może mieć dwa różne znaczenia:

Kasia mieszka w Krakowie *lub* Kasia lubi Olę, *lub jedno i drugie*.

Kasia mieszka w Krakowie *lub* Kasia lubi Olę, *ale nie jedno i drugie*.

Zważywszy na to rozdzielenie znaczenia słowa *lub*, mogę Ci zaoferować następującą poradę: kiedy widzisz takie *lub* w stwierdzeniu, które masz przetłumaczyć, prawdopodobnie oznacza to, że ktoś (najpewniej Twój nauczyciel) chce się upewnić, czy wiesz, że w języku logicznym *lub* zawsze oznacza *lub... lub jedno i drugie*. Powyższe zdanie należy zatem przetłumaczyć tak:

$$k \vee o$$

...lub... lub jedno i drugie

Ta struktura jest prosta i zrozumiała — oznacza to, co widać na pierwszy rzut oka. Oto przykład:

Kasia mieszka w Krakowie *lub* Kasia lubi Olę, *lub jedno i drugie*.

Powyższe zdanie należy przetłumaczyć tak:

$$k \vee o$$

...lub... ale nie jedno i drugie

Znaczenie tej struktury jest zrozumiałe, ale trudno je przełożyć na język logiczny. Oto przykład:

Kasia mieszka w Krakowie *lub* Kasia lubi Olę, *ale nie jedno i drugie*.

Aby przetłumaczyć sformułowanie *ale nie jedno i drugie* na język logiki, trzeba się przez chwilę zastanowić nad jego strukturą. Jak wspomniałem w podpunkcie „Ale, chociaż, jednak, pomimo że...”, słowo *ale* oznacza koniunkcję, a sformułowanie *nie jedno i drugie* powinno przyjąć formę $\sim(k \wedge o)$. Wyrażenie w całości powinno mieć następującą postać:

$$(k \vee o) \wedge \sim(k \wedge o)$$

Skorowidz

A

abstrakcja, 65
Ackerman William, 327
adekwatność, *Patrz:* wnioskowanie
adekwatne
aksjomat, 36, 41, 48, 307, 324, 339
indukcji, 328
logiczny, 328
Principia mathematica, 324, 325, 328
teorii liczb, 328
Zermela-Fraenkla, 325
algebra
Boole'a, 44, 71, 223, 226, 227, 338
semantyka, 227
składnia, 227
symbol, 223, 225
boolowska, *Patrz:* algebra Boole'a
algorytm, 301
alternatywa, 72, 75, 97, 195, 310
nierozłączna, 76, 211
przekształcanie w implikację, 187
rozłączna, 76, 211, 212
argument, 29
Arystoteles, 34, 38, 40, 337
autoreferencja, 323, 325, 329
Awicenna, 42

B

Babbage Charles, 300, 305
Bierce Ambrose, 335
biologia, 65
błąd logiczny, 43
Boole George, 44, 338
bramka logiczna, 49, 303
AND, 49, 303, 304
NAND, 303, 304
NOR, 303, 304

NOT, 49, 303, 304
OR, 49, 303, 304
XOR, 303, 304
Butler Samuel, 336

C

Cantor Georg, 44, 45, 322, 339
Carroll Lewis, 338
chemia, 65
Chesterton G.K., 336
Chryzyp, 42
ciąg, 221
sylogizmów, 29
cząsteczka subatomowa, 317, 318

D

de Morgana prawo, *Patrz:* reguła DeM
de Saint-Exupéry Antoine, 336
dedukcja, 61
Dodgson Charles, 338
dowodzenie, 41
nie wprost, 41, 42, 184, 189, 190, 192, 201, 202, 209
przez zaprzeczenie, *Patrz:* dowodzenie nie wprost
warunkowe, 184, 185, 186, 192, 197, 198, 199, 200, 203
dowód, 38, *Patrz też:* dowodzenie
budowanie, 155, 193, 194, 195, 196, 197, 201, 208, 209
od wniosku, 202
matematyczny, 328
drzewo semantyczne, 133, 135, 136, 141, 143, 147, 343
nieskończone, 294
tworzenie, 138, 139, 140, 288
w rachunku kwantyfikatorów, 288

dysjunkcja Sheffera, 216, *Patrz też:*
operator NAN
dziedzina dyskursu, 238, 239
nieograniczona, 240, 245
ograniczona, 239, 240, 244

E

Einstein Albert, 336
ekonomia, 65
eksportacja, 174
ekwiwalencja, 169, 170, 171, 204, 257
ENIAC, 303
Euklides, 41
ewaluacja
operatora, *Patrz:* operator ewaluacja
wyrażenia, *Patrz:* wyrażenie ewaluacja

F

fałsz, 71
filozofia, 66
fizjologia, 65
fizyka, 65
formuła zdaniowa, 241, 242, 257, 258
Frege Gottlob, 44, 46, 47, 322, 339
funkcja logiczna, 303

G

generalizacja, 260
egzystencjalna, 261, 264
uniwersalna, 270
geometria euklidesowa, 41
Gödel Kurt, 48, 327, 328, 329, 340
gramatyka, 220

H

Hilbert David, 327, 328, 339

I

implikacja, 72, 77, 78, 97, 158, 170, 186, 246,
255, 256
inwersja, 78
konwersja, 78
następnik, 97
poprzednik, 97
symbol, 77
indukcja, 61, 62, 63

informatyka, 65
instancjacja, 260
egzystencjalna, 261, 266, 289
uniwersalna, 261, 289
inżynieria, 65

J

język programowania, 49, 305

K

Kartezjusz, 43
kategoria, 39
klasa, 325
komputer, 49, 65, 299, 340
historia, 300, 301, 303
oprogramowanie, *Patrz:* oprogramowanie
sprzęt, 303, 305
koniunkcja, 72, 74, 75, 86, 97, 160, 195, 224,
234, 246, 310
rozdzielność względem alternatywy, 176
symbol, 75
kontrapozycja, 78
kontrtautologia, 101, 108, 115, 116, 117, 125,
143, 147, 149, 190
Krutch Joseph Wood, 336
kwadrat logiczny, 40
kwantyfikatory, 244
 \forall , 246, 248, 249, 250, 251, 266, 277, 291
egzystencjalny, 237
kolejność, 279
ogólny, 236, *Patrz też:* kwantyfikatory \forall
zakres, 240

L

Leibniz Gottfried, 43, 338
Locke John, 335
logika, 43, 58, 59, 61, 302, 322
Boole'a, 37
definicja, 52
deontyczna, 314
drugiego rzędu, 315
epistemiczna, 314
formalna, 37, 44, 69
Fregego, 46, 47, 339
informatyka, *Patrz też:* informatyka
klasyczna, 34, 37, 38
kwantowa, 37, 317, 318

kwantyfikatorów, 37, 46, 47, 70, 136, 231, 232, 327, 339
dziedzina dyskursu, *Patrz*: dziedzina dyskursu
mowa zależna, 283
nazwa, *Patrz*: nazwa
operator, 235
predykat, *Patrz*: predykat
relacja, *Patrz*: relacja
stała, 233, 234
symbol, 233
tożsamość, *Patrz*: tożsamość
wyrażenie, *Patrz*: wyrażenie w logice kwantyfikatorów, zdanie wartość
zmienna nazwowa, *Patrz*: zmienna nazwowa
matematyka, 35, 36, 64
modalna, 313, 314
nieformalna, 37
nieklasyczna, 37, 38, 48, 283, 307, 308
nowożytna, 38, 43
parakonsystentna, 316
porządkowanie abstrakcji, 65
prawo, 65
predykatów, *Patrz*: logika kwantyfikatorów
propozycjonalna, 37
rodzaj, 37
rozmyta, 37, 311
słowa, 31
sylogistyczna, 37
symboliczna, 37, 43, 44
trójwartościowa, 309
wielowartościowa, 37, 309, 311
wnioskowanie, *Patrz*: wnioskowanie
współczesna, 37
zdań, 37, 46, 49, 70, 80, 90, 93, 212, 223, 326, 339
nawiasy, 82, 84, 95, 96, 220, 222
niesprzeczność, 327
semantyka, *Patrz*: semantyka
składnia, *Patrz*: składnia
tłumaczenie, 83
zupełność, 327
Lovelace Ada, 300

Ł

łączność, 175, 205
Łukasiewicz Jan, 48, 308

M

maszyna
analityczna, 300, 305
różnicowa, 300
Turinga, 301, 340
matematyka, 64
medycyna, 65
metawyrażenie, 330
model, 65
modus ponendo ponens, *Patrz*: reguła implikacji MP
modus tollendo tollens, *Patrz*: reguła implikacji MT
Mulgrew Kate, 336

N

nauka, 65
nazwa, 234
negacja, 72, 310
Newton Isaac, 43
nieskończoność, 339
niewspółzachodzenie, 216, *Patrz też*:
operator NAN
Nimoy Leonard, 335
numer Gödla, 329

O

operator, 220
binarny, *Patrz*: operator dwuargumentowy
dwuargumentowy, 80, 85
ewaluacja, 94, 95
główny, 95, 96, 116, 144
jednoargumentowy, 81
konieczności, 313
logiczny, 69, 71, 74, 85, 212, 303, *Patrz też*:
symbol
alternatywy, 72
implikacji, 72
koniunkcji, 72
negacji, 72
równoważności, 72
zastępowanie, 212, 214, 215, 216
możliwości, 313
NAND, 216
unarny, *Patrz*: operator jednoargumentowy
zakres, 94
oprogramowanie, 49, 65, 155, 303, 305

P

paradoks, 47
 autoreferencyjny, 325
 kłamcy, 321, 329
 Russella, 47, 322, 323, 324, 329, 339
Pean Giuseppe, 328
Pitagoras, 38
Platon, 38
podzbiór, 30, 322
pojęcie, 38
polisyllogizm, *Patrz:* ciąg syllogizmów
Popper Karl, 63
 formuła, *Patrz:* WFF
Post Emil, 327
postulat, 41
półpierzścień, 226, 227
prawda, 71
prawo, 65
 de Morgana, *Patrz:* reguła DeM
predykat zwyczajny, 282
problem nierozstrzygalny, 48
procesor, 305
program, 49, 65, 301
 Hilberta, 327, 339
 warunek wejściowy, 301
przemienność, 175, 205
przesłanka, 32, 39, 52, 156
 długa, 191, 195, 201, 208, 210
 entymematyczna, 33
psychologia, 65
pytanie retoryczne, 62

R

rachunek
 predykatów
 drugiego rzędu, 236, 315
 pierwszego rzędu, 232, *Patrz też:* logika kwantyfikatorów
 zdań, *Patrz:* logika zdań
reductio ad absurdum, 42
redukcja do absurdu, 42
reguła
 alternatywy, 162
 DA, 162, 163, 260
 DeM, 178, 184, 196, 203, 215
 DK, 160, 260
 DKon, 165, 166

dołączanie
 alternatywy, *Patrz:* reguła DA
 koniunkcji, *Patrz:* reguła DK
dylemat konstrukcyjny, *Patrz:* reguła DKon
Eks, 174, 188, 204, 205
Eksportacja, *Patrz:* reguła EKS
ekwiwalencji, 169, 170, 204, 257
GE, 261, 264, 265, 270, 281
generalizacja, 260
 egzystencjalna, *Patrz:* reguła GE
 uniwersalna, *Patrz:* reguła GU
GU, 261, 270, 271, 273, 281
IE, 261, 266, 267, 269, 281, 289
implikacji, 157, 170, 255, 256
 MP, 158
 MT, 158, 159
inferencyjna, 155, 169
instancjacja
 egzystencjalna, *Patrz:* reguła IE
 uniwersalna, *Patrz:* reguła IU
instancjacji, 260
IU, 261, 263, 281, 289, 291
koniunkcji, 160
kwantifikatora, 254, 280, 281
 Łącz, 175, 204, 205, 207
 Łączności, *Patrz:* reguła Łącz
 MP, 170, 196, 326
 MT, 196
 OA, 162, 164, 195, 260
 OK, 160, 162, 170, 195, 260
 ON, 171
opuszczanie
 alternatywy, *Patrz:* reguła OA
 koniunkcji, *Patrz:* reguła OK
 negacji, *Patrz:* reguła ON
podstawiania, 326
podwójnej implikacji, 165
Przem, 175, 206, 207
Przemienności, *Patrz:* reguła Przem
Roz, 176, 204, 205, 206, 207
rozdzielności koniunkcji, *Patrz:* reguła Roz
rozluźniająca, 222
RT, 284
SH, 165
syllogizm hipotetyczny, *Patrz:* reguła SH
Taut, 179
tożsamości, *Patrz:* reguła RT
Trans, 172, 184, 185, 187, 196

Transpozycja, *Patrz:* reguła Trans
 zastępowania
 implikacji, *Patrz:* reguła ZI
 równoważności, *Patrz:* reguła ZR
 ZD, 192
 ZI, 172, 184, 185, 187, 196, 214, 216, 310
 ZK, 258, 280, 289
 ZR, 180, 196, 203, 214, 310
 ZT, 284
 zwrotność tożsamości, *Patrz:* reguła ZT

relacja, 275, 276, 315

retoryka, 33, 62

rozdzielność, 206

rozumowanie, 58

równoważność, 72, 79, 97, 115, 171
 ekwiwalentność logiczna, 80
 symbol, 80
 zastępowanie, 180

Russell Bertrand, 34, 47, 323, 324, 339

S

semantyka, 219, 227

Sheffer Henry, 216

składnia, 219, 227

socjologia, 65

Sokrates, 38

sorites, *Patrz:* ciąg sylogizmów

stała, 69, 71, 220, 221, 261
 nazwowa, 236
 podstawienie, 82
 predykatorowa, 236
 zdaniowa, 70

Steinem Gloria, 336

sylogizm, 38, 39, 55, 338
 ciąg, *Patrz:* ciąg sylogizmów

symbol, 43
 \wedge , 46, 47, 72, 74, 75, 77, 84, 158, 160, 236,
 237, 240, 246
 \downarrow , 216
 \sim , 46, 72, 84
 $=$, 225
 \equiv , 80
 \square , 313
 \diamond , 313
 \rightarrow , 46, 72, 77, 84, 246
 \leftrightarrow , 72, 79, 84, 171
 \cdot , 224

syntaktyka, 221

system
 aksjomatyczny, 324, 325, 329
 niesprzeczny, 327, 329
 skuteczność w modelowaniu matematyki,
 329
 wymagania, 325
 zupełny, 327, 329
 matematyczny, 340

T

tablica
 błyskawiczna, 120, 121, 127, 132, 136
 odczytywanie, 123
 wypełnianie, 122
 założenie strategiczne, 121, 123, 124, 125,
 126
 prawdy, 73, 101, 114, 132, 136, 343
 algebra Boole'a, 225
 alternatywa, 76
 implikacja, 77
 koniunkcja, 74
 metoda siłowa, 102
 negacja, 73
 tworzenie, 103, 105

Tales, 38

tautologia, 60, 101, 108, 115, 117, 125, 143,
 144, 179, 326, 327
 przekształcanie w kontrtautologię, 113

teoria
 dowodu, 328
 liczb aksjomat, *Patrz:* aksjomat teorii liczb
 mnogości, 45
 naiwna, 325
 prawdopodobieństwa, 311
 zbiorów, 322, 323, 324, 325, 339, *Patrz też:*
 teoria mnogości

test falsyfikujący, 63

tożsamość, 275, 276, 282, 283
 zwrotność, 284

Turing Alan, 301, 305, 340

twierdzenie, 36, 41, 324, 326, 327, 339
 dowód, 41
 Gödla, 48, 329, 331
 o niezupełności, *Patrz:* twierdzenie Gödla

U

universal Turing machine, *Patrz:* UTM
 UTM, 301, 340

W

wartość
 logiczna, 53, 71
 wyrażenia, *Patrz:* wyrażenie wartość logiczna
 wejściowa, 80, 81
 wyjściowa, 80, 81
well-formed formula, *Patrz:* WFF
WFF, 221, *Patrz też:* wyrażenie nawiasy, 222
Whitehead Alfred North, 47, 324, 339
wiedza, 38
Wittgenstein Ludwig, 336
wniosek, 32, 33, 52, 65, 156
 formalnie
 niepoprawny, 33
 poprawny, 33
 krótszy od przesłanek, 191, 195, 201
 zanegowany, 202
wnioskowanie, 32, 51, 52, 55, 194
 adekwatne, 60
 dedukcyjne, 61
 forma, 63
 indukcyjne, *Patrz:* indukcja
 krok
 ostatni, 32
 pośredni, 32, 52
 niepoprawne, 55, 111, 141
 poprawne, 52, 54, 111, 116, 126, 141
 formalnie, 59, 60, 62, 63
 materialnie, 62
 niezaprzeczalnie, 39
 prawnicze, 65
 struktura, 337
 treść, 63
wyrażenie, 52, 53, 93, 221, 337, *Patrz też:* WFF
 autoreferencyjne, 282
 dwugłęziowe, 137
 ekwiwalentne semantycznie, 102, 109, 110, 115, 126, 149, 151, 213
 ewaluacja, 83, 89, 90, 91, 92, 98, 101
 forma, 97, 128, 129, 132, 204
 mniej przyjazna, 197, 199
 nieprzyjazna, 197, 200
 przyjazna, 197, 198
 interpretacja, 91
 jednogałęziowe, 137

obliczanie wartości logicznej, *Patrz:*
 wyrażenie ewaluacja
podrzędne, 93, 137
przygodne, 108, 117, 125, 143, 149
relacyjne, 276, 280, *Patrz też:* relacja kolejność zmiennych, 277
 łączenie, 277, 278
rozkład, 136
w logice kwantyfikatorów, 240, *Patrz też:* zdanie
wartość logiczna, 89, 90, 91, 92, 98, 101
z
 \wedge , 84
 \sim , 84
 \rightarrow , 84
 \leftrightarrow , 84
zawsze
 fałszywe, *Patrz:* kontrtautologia
 prawdziwe, *Patrz:* tautologia

Z

założenie, 32, 184, *Patrz też:* przesłanka
 dodatkowe, 185, 188
 odrzuć, 186
zasada
 alternatywy, 310
 koniunkcji, 310
 negacji, 310
 niesprzeczności, 35
 tożsamości, 34
 wyłączonego środka, 34, 39, 308
 wyłączenie, 48
zbiór, 30, 45, 322
 część wspólna, 31
 element, 322
 wyrażeń spójny, 102, 110, 117, 126, 139, 141
 zawiera się, 30
zdanie, 38, 241, 242, *Patrz też:* wyrażenie w logice kwantyfikatorów
 implikacja, 78
 inwersja, 78
 kategoryczne, 39, 40, 243, 246, 247
 kontrapozycja, 78
 konwersja, 78
 monadyczne, 276
 możliwe, 48
 przeczące, 40
 sprzeczność, 41

twierdzące, 40
wartość logiczna, *Patrz: wartość logiczna*
warunkowe, 29, 42
zmienna, 69, 71
boolowska, 303
nazwowa, 236
predykatowa, 236

wolna, 241, 242, 261
zdaniowa, 71
związana, 241, 261
znak, *Patrz też: symbol*
=, 225
mnożenia, 224

PROGRAM PARTNERSKI

GRUPY WYDAWNICZEJ HELION



- 1. ZAREJESTRUJ SIĘ**
- 2. PREZENTUJ KSIĄŻKI**
- 3. ZBIERAJ PROWIZJĘ**

Zmień swoją stronę WWW
w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

Uporządkuj swoje myśli!

Ten napisany przystępnym językiem samouczek pomoże Ci zrozumieć różnorakie zagadnienia logiczne, od dowodów, rachunku kwantyfikatorów i paradoksów po logikę symboliczną, struktury semantyczne i sylogizmy. Omówione krok po kroku przykłady pokażą Ci, jak przeprowadzić wnioskowanie, udowodnić jego poprawność i wykorzystać prawa równoważności.

W książce:

- Jak spojrzeć na świat logicznie
- Jak dowodzić i obalać wnioskowanie
- Jak wywodzić logiczne wnioski
- Jak zrozumieć logikę rozmytą i kwantową

Mark Zegarelli ukończył studia matematyczne i angijskie na Uniwersytecie Rutgersa. Do tej pory napisał cztery książki i mnóstwo artykułów prasowych o łamigłówkach logicznych.

dla
bystrzaków

Zamówienia telefoniczne:

 0 801 339900  0 601 339900

septem
septem.pl

Sprawdź najnowsze promocje:
● <http://dlabystrzakow.pl/promocje>
Książki najczęściej czytane:
● <http://dlabystrzakow.pl/bestsellery>
Zamów informacje o nowościach:
● <http://dlabystrzakow.pl/nowosci>

Hefton SA
ul. Kościuszki 1c, 44-100 Gliwice
tel.: 32 230 98 63
e-mail: rady@dlabystrzakow.pl
<http://dlabystrzakow.pl>

Cena 39,90 zł

ISBN 978-83-283-3381-9



9 788328 333819