Stanisław Jaśkowski

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych

$K\Pi xax\Pi xbx$

Πxax

Πxbx

ax

bx

$Kaxbx$

$\Pi xKaxbx$

$\forall xax \wedge \forall xbx$

$\forall xax$

$\forall xbx$

ax

bx

$ax \wedge bx$

$\forall x(ax \wedge bx)$

Wstęp i opracowanie naukowe
Andrzej Indrzejczak

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Stanisław Jaśkowski

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych

Wstęp i opracowanie naukowe
Andrzej Indrzejczak

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO
Łódź 2018

Andrzej Indrzejczak – Uniwersytet Łódzki, Wydział Filozoficzno-Historyczny
Katedra Logiki i Metodologii Nauk, 90-131 Łódź, ul. Lindleya 3/5

RECENZENT
Andrzej Pietruszczak

REDAKTOR INICJUJĄCY
Magdalena Skoneczna

KOREKTA
Anna Sońta

SKŁAD I ŁAMANIE
Michał Zawidzki

PROJEKT OKŁADKI
Katarzyna Turkowska

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.08718.18.0.M

Ark. druk. 8,375

ISBN 978-83-8142-299-4
e-ISBN 978-83-8142-300-7

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

Spis treści

Wprowadzenie

Prezentowany tom zawiera reedycję skryptu wykładów z logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych autorstwa Stanisława Jaśkowskiego, wybitnego polskiego logika i matematyka, reprezentanta Szkoły Lwowsko-Warszawskiej, ucznia Stanisława Leśniewskiego i Jana Łukasiewicza. Sylwetka autora skryptu i Jego dokonania zostaną szerzej przedstawione w następnym paragrafie. Zaczniemy natomiast od udzielenia odpowiedzi na pytanie, dlaczego warto wznowić tę publikację?

Skrypt został wydany w 1947 r. na potrzeby studentów matematyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, minęła zatem 70. rocznica jego powstania. Logika w ciągu tylu lat, podobnie jak inne dyscypliny naukowe, uległa gruntownym zmianom, a lista podręczników logiki dostępnych obecnie na polskim rynku jest niemała i nie brakuje wśród nich pozycji wybitnych, prezentujących nowoczesne ujęcie przedmiotu. Jest jednak kilka ważnych powodów, aby tę właśnie pozycję, po 70-ciu latach zapomnienia, polecić uwadze wszystkich zainteresowanych logiką i jej historią.

Zacząć należy od tego, że wydanie skryptu Jaśkowskiego jest jednym z możliwych sposobów uratowania tego podręcznika od fizycznego zniszczenia. Skrypt został wydany na prawach rękopisu, w niewielkiej liczbie egzemplarzy (nie udało się ustalić w jakiej) nakładem Akademickiej Księgarni Spółdzielni „SKRYPT". Zawiera 105 stron maszynopisu, z ręcznymi dopiskami. Redakcja dokonana została na podstawie egzemplarza znajdującego się w posiadaniu Biblioteki Instytutu Matematyki UMK, który jest w bardzo złym stanie i prawdopodobnie za 10–20 lat większość stron będzie tak wyblakła, że ich odczytanie stanie się niemożliwe – przynajmniej bez użycia specjalistycznego sprzętu. Wiadomo o istnieniu jeszcze dwóch innych egzemplarzy tej pracy w Polsce i – jak można podejrzewać – ich stan nie jest lepszy. Dlatego wydaje się, że to ostatni moment na „reanimację" skryptu Jaśkowskiego.

Jednak obawa przed fizycznym unicestwieniem książki sama w sobie nie stanowi racji do podjęcia wysiłku jej reedycji. Takiej racji dostarcza wysoka wartość ratowanej pracy. Skrypt Jaśkowskiego jest oryginalnym, autorskim, niezwykle nowoczesnym – jak na czas powstania – ujęciem przedmiotu, w znaczący sposób różniącym się od innych podręczników logiki dostępnych zarówno w chwili jego ukazania, jak i później. Tę oryginalność, o której więcej informacji znajdzie się w paragrafie poświęconym dedukcji naturalnej, z pewnością docenią logicy i historycy logiki.

Na koniec. Nie od rzeczy jest też fakt, że skrypt Jaśkowskiego ma wybitne walory dydaktyczne i również dzisiaj w pełni nadaje się do wykorzystania jako pozycja dydaktyczna. Dlatego publikacja ta może zainteresować nie tylko specjalistów, ale być nadal przydatna jako podręcznik logiki, pomimo siedemdziesięciu lat, które upłynęły od jej wydania.

I Sylwetka Stanisława Jaśkowskiego

Stanisław Jaśkowski urodził się 22 kwietnia 1906 r. w Warszawie jako syn ziemianina Feliksa Jaśkowskiego i Kazimiery Dzierżbickiej. Wychował się w rodzinie, która reprezentowała wysokie standardy wykształcenia humanistycznego. W szczególności, jego dziadek – Jan Nepomucen Jaśkowski – był poetą i pisarzem, a ojciec muzykiem. Rodzina oczekiwała, że Stanisław będzie kontynuował te humanistyczne tradycje, ale on zdecydował się w 1924 r. na studia na wydziale matematycznym w Uniwersytecie Warszawskim. Nauczycielami Jaśkowskiego byli m.in. Stanisław Leśniewski, Alfred Tarski i Jan Łukasiewicz, który wywarł na niego największy wpływ. To Łukasiewicz w 1925 r. postawił na swoim seminarium problem sformułowania formalnego ujęcia metod dowodzenia stosowanego w praktyce matematycznej. Rok później Jaśkowski zaprezentował na seminarium swoje rozwiązanie tego problemu, a następnie przedstawił je w 1927 r. na Pierwszym Polskim Kongresie Matematycznym we Lwowie. Była to pierwsza w świecie wersja systemu dedukcji naturalnej opracowana w rozprawie doktorskiej przygotowanej pod opieką Łukasiewicza. Niestety, poważne problemy zdrowotne doprowadziły do znaczącej przerwy w jego edukacji oraz opóźnienia publikacji wyników. W latach 1929–1930 Jaśkowski leczył płuca w Davos w Szwajcarii. Dopiero w 1932 r. obronił pracę doktorską, która została opublikowana w 1934 r. w [13]. To opóźnienie nie wyszło Jaśkowskiemu na dobre, gdyż w tym samym roku Gerhard Gentzen niezależnie opublikował pierwszą część swojego doktoratu [8] zawierającego m.in. inną wersję dedukcji naturalnej. Praca Gentzena była szerzej znana i do dziś jest on często wzmiankowany jako jedyny twórca dedukcji naturalnej, pomimo faktycznego pierwszeństwa Jaśkowskiego w tej dziedzinie.

Po powrocie do zdrowia Jaśkowski uczestniczył w Drugim Polskim Kongresie Matematycznym w Wilnie w 1931 r., podczas którego zaprezentował pierwszą aksjomatyzację geometrii brył. Jest to godny odnotowania fakt, który wskazuje na początek innej pasji naukowej Jaśkowskiego – badań nad podstawami matematyki, a w szczególności nad alternatywnymi ujęciami geometrii, które nie opierają się na pierwotnych pojęciach punktu i prostej. Podobne badania prowadził w tym czasie również Alfred Tarski. W 1935 r. Jaśkowski uczestniczył w Międzynarodowym Kongresie Filozofii Naukowej w Paryżu. Zaprezentował tam ważne rezultaty dotyczące matryc dla logiki intuicjonistycznej. Kolejne jego badania dotyczyły m.in. funkcji modalnych i systemów logicznych opartych na pojęciu zmiennej zależnej.

Ważne zmiany zaszły również w życiu prywatnym młodego uczonego. W 1937 r. Jaśkowski poślubił Anielę Holewińską (1905–1976), studentkę matematyki w Uniwersytecie Warszawskim. Po dwóch latach na świat przyszła córka Anna.

Wybuch II wojny światowej przerwał pracę Jaśkowskiego nad habilitacją. Ze względu na problemy zdrowotne nie został powołany do wojska, ale służył jako ochotnik w obronie Warszawy i oddał swój samochód do dyspozycji 151 Kolumny Zmotoryzowanej. Podczas okupacji mieszkał w swoim majątku w Wólce koło Rawy Mazowieckiej i w Warszawie, gdzie pracował jako księgarz. W 1942 r. przez kilka tygodni przebywał w areszcie. Prawie wszystkie jego prace naukowe z tego okresu spłonęły podczas Powstania Warszawskiego.

Po wojnie Jaśkowski przez pół roku pracował jako wykładowca w nowo założonym Uniwersytecie Łódzkim. Następnie przeniósł się do Torunia, w którym żył i pracował od 1 października 1945 r. aż do swej przedwczesnej śmierci w 1965 r. Nawet kiedy proponowano mu, aby przeniósł się do Krakowa i objął kierownictwo Zakładu Logiki w Uniwersytecie Jagiellońskim, po śmierci profesora Zawirskiego w 1949 r., zdecydował się pozostać w Toruniu. Przez ostatnie 20 lat życia pełnił bardzo ważną rolę w rozwoju Uniwersytetu Mikołaja Kopernika. Między innymi: organizował Katedrę Logiki Matematycznej i był jej pierwszym kierownikiem, w latach 1952–1953 organizował Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii i był jego pierwszym dziekanem w latach 1953–1954. W latach 1956–1959 był Prorektorem do spraw nauki, a w latach 1959–1962 Rektorem Uniwersytetu Toruńskiego. Był także współtwórcą i pierwszym przewodniczącym Toruńskego oddziału Polskiego Towarzystwa Matematycznego, a od 1950 r. członkiem Narodowego Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk.

Był bardzo aktywny jako nauczyciel. Uniwersytet Toruński, w pierwszych latach swej działalności cierpiał na dotkliwe braki kadrowe. W rezultacie Jaśkowski prowadził liczne kursy z rozmaitych działów matematyki, m.in. z logiki matematycznej, analizy, teorii mnogości, teorii prawdopodobieństwa. Na potrzeby kursu z logiki i z analizy przygotował autorskie skrypty dla studentów; pierwszy z nich prezentujemy niżej. W ostatnich latach swojej działalności był Jaśkowski mocno zaangażowany w organizację pracowni komputerowej, a jego ostatnie seminarium dotyczyło badań nad automatycznym dowodzeniem twierdzeń. Warto wspomnieć również o jego pracy nad przygotowaniem nowoczesnego programu nauczania matematyki w szkołach średnich, który został wprowadzony w latach 60.

Liczne obowiązki o charakterze edukacyjnym i organizacyjnym nie przeszkodziły Jaśkowskiemu w kontynuacji jego pracy naukowej. Główne wątki badawcze i najważniejsze osiągnięcia scharakteryzujemy w następnym paragrafie, tutaj odnotowując kolejne, najważniejsze etapy kariery akademickiej. Jeszcze w latach 40. Jaśkowski pod opieką Zygmunta Zawirskiego ukończył habilitację dotyczącą liczb rzeczywistych. Obrona odbyła się 7 kwietnia 1946 r., a zatwierdzona została 24 lipca 1946 r. W 1957 r. otrzymał nominację profesorską.

Zły stan zdrowia przerwał jego aktywność w 1962 roku. Umarł przedwcześnie 16 listopada 1965 r. w wyniku powikłań po przebytej żółtaczce.

II Praca

Dorobek naukowy Stanisława Jaśkowskiego obejmuje 48 pozycji z zakresu logiki i matematyki. Ta stosunkowo niewielka liczba publikacji zawiera dużą ilość nowatorskich wyników, które spotkały się w późniejszych latach (niestety często dopiero po śmierci autora) z dużym zainteresowaniem na świecie. Poniżej scharakteryzujemy krótko najważniejsze wyniki uzyskane na obu polach. Dokładniejszą prezentację jego wyników można znaleźć w [36] i [38], a pełna bibliografia podana jest w [5].

Wynalezienie systemów dedukcji naturalnej, zaprezentowane w [13], jest często uważane za najważniejsze osiągnięcie Jaśkowskiego i poświęcimy mu następnie więcej uwagi ze względu na bezpośredni związek z prezentowanym skryptem. Jeżeli chodzi o inne wyniki, to na szczególną uwagę zasługują jego rezultaty w zakresie badań nad logikami nieklasycznymi. Jaśkowski nie tylko uzyskał poważne wyniki w badaniach nad znanymi logikami, takimi jak logiki modalne czy logika intuicjonistyczna, ale jest również twórcą wielu nowych i ważnych systemów. W szczególności:

W swojej pracy o dedukcji naturalnej [13] przedstawił system reguł dla kwantyfikatorów pierwszego rzędu, który jest w istotny sposób słabszy od systemu Gentzena charakteryzującego logikę klasyczną. Fakt, że zaproponowany przez niego system reguł nie jest formalizacją logiki klasycznej przejawia się w ten sposób, że pewne tezy logiki klasycznej, które są uniwersalnie prawdziwe tylko w modelach z niepustą dziedziną, nie dają się w jego systemie udowodnić. W ten sposób Jaśkowski zbudował pierwszy system tzw. logiki inkluzywnej. Jest to logika pierwszego rzędu słabsza od klasycznej, która w ujęciu semantycznym dopuszcza modele z pustą dziedziną. Jaśkowski scharakteryzował tę logikę tylko syntaktycznie, w postaci systemu dedukcji naturalnej, ale jego rozwiązanie było świadome, oparte na przekonaniu, że logika nie powinna przesądzać o istnieniu jakichkolwiek obiektów. Obecnie logiki, które są inkluzywne i wolne (od założeń egzystencjalnych), w tym sensie, że dopuszczają wyrażenia nazwowe nieposiadające desygnatów, są nazywane uniwersalnie wolnymi (Bencivenga [1]). Takie logiki są często traktowane jako filozoficznie bardziej neutralne od logiki klasycznej i chętnie wykorzystywane jako podstawa do budowy modalnych logik 1-rzędu (zob. np. Garson [7]). Warto podkreślić, że pierwsze systemy logiki uniwersalnie wolnej zostały zaproponowane dopiero w latach 50. XX w. przez Andrzeja Mostowskiego, Huguesa Leblanca, Jaakko Hintikkę i innych. Fakt, że Jaśkowski skonstruował pierwszy system logiki inkluzywnej, a jak podkreśla Bencivenga [2], w zasadzie również logiki wolnej, był niezauważony przez długie lata.

W badaniach nad logiką intuicjonistyczną Jaśkowski nie tylko zaproponował system dedukcji naturalnej dla logiki zdaniowej, ale również adekwatną charakterystykę semantyczną w terminach matryc nieskończonych. Wcześniej Gödel wykazał, że nie ma adekwatnej skończonej matrycy dla logiki intuicjonistycznej. Jaśkowski [14] poszerzył ten rezultat, pokazując, w jaki sposób skonstruować adekwatną matrycę jako nieskończony ciąg matryc skończonych.

W [17] oraz [25] Jaśkowski dostarczył filozoficznego uzasadnienia i formalnej konstrukcji dla tzw. logiki dyskusyjnej, która była pierwszym systemem należącym do obszernej i ważnej klasy logik parakonsystentnych. W systemach tego typu, w przeciwieństwie do logiki klasycznej, ze zdań sprzecznych nie wynika dowolne zdanie, zatem sprzeczność nie prowadzi do trywializacji systemu. Wkrótce po pracach Jaśkowskiego, pogłębione badania nad takimi logikami zostały podjęte przez zespół logików z Ameryki Płd., w szczególności przez Newtona da Costa w Brazylii i Florentio Asenjo w Argentynie. Nieco później, w latach 60-tych podobne badania rozpoczęły się w USA i w Australii (Michael Dunn, Rober Meyer, Richard Routley (Sylvan), Graham Priest i inni), w ścisłym połączeniu z badaniami nad logikami implikacji relewantnej. Obecnie logiki parakonsystentne stanowią jedną z najlepiej rozpoznawalnych klas logik nieklasycznych, o szerokich zastosowaniach.

To tylko niektóre osiągnięcia Jaśkowskiego na gruncie logiki, te mianowicie, które obecnie są najbardziej znane w świecie. Z mniej znanych, choć równie interesujących, można wspomnieć o jego pracach nad implikacją kauzalną [18], [28], [29], logiką klasyczną [19], [34], [35] czy sylogistyką Arystotelesa [27].

Jako matematyk Jaśkowski był zainteresowany przede wszystkim badaniami nad podstawami matematyki i zastosowaniami w niej narzędzi logicznych. W szczególności pracował nad pojęciem liczby, podstawami geometrii i problemami rozstrzygalności, gdzie otrzymał szereg rezultatów zarówno pozytywnych, jak i negatywnych. Te ostatnie badania można zresztą zakwalifikować jako przynależne do prac logicznych, aczkolwiek w wielu przypadkach dotyczące teorii matematycznych. W szczególności, w [26] dowiódł rozstrzygalności elementarnej teorii pierścieni Boolowskich. [34], [35] zawierają wyniki dotyczące rozstrzygalności fragmentów logiki klasycznej, a [17] modalnej logiki S5. Jeżeli chodzi o wyniki negatywne na tym polu, to w [21] dowiódł, że pewne klasy formuł teorii grup i topologii są nierozstrzygalne. W [32] wykazał nierozstrzygalność teorii wolnych grupoidów, a w [26] pewnej klasy równości algebr Boolowskich. Interesujące rezultaty o nierozstrzygalności pewnych problemów egzystencjalnych w systemach równań różniczkowych zawiera [31].

Badania nad pojęciem liczby były podstawą habilitacji Jaśkowskiego i zostały podsumowane w [20]. Wykazał on, że liczby całkowite i rzeczywiste można zdefiniować w terminach pewnych operacji na klasach zbiorów.

Jaśkowski był również zaangażowany w badania nad geometrią brył, w której unika się obiektów abstrakcyjnych, takich jak punkty czy proste. Był przekonany, że takie podejście lepiej sprawdza się w zastosowaniach, np. w fizyce kwantowej. W [23], [24] Jaśkowski zmodyfikował podejście Tarskiego do geometrii brył oraz wprowadził aksjomatykę opartą na pojęciu „semiprzestrzeni” jako terminie pierwotnym w [16], [22]. Przygotowywał książkę o podstawach geometrii, ale przedwczesna śmierć przerwała tę pracę.

Jaśkowski opublikował również dwie popularne książki o geometrii ornamentu [30], [33], które stanowią doskonałe świadectwo jego wielkiego talentu dydaktycznego. W sposób niewymagający od czytelnika żadnej zaawansowanej wiedzy matematycznej zaprezentował w nich rozmaite zagadnienia geometryczne ilustrowane przykładami zaczerpniętymi z nauki, historii i sztuki. Pokazał w nich m.in., jak można zastosować abstrakcyjną algebraiczną teorię grup do konkretnego problemu klasyfikacji ornamentów. Wspomnieliśmy wyżej, że oprócz prezentowanego tu skryptu z logiki przygotował też skrypt z analizy matematycznej (zawierający właściwie rodzaj wstępu do matematyki), który również pokazuje jego talent dydaktyczny. Szereg prac i komunikatów dotyczących reformy nauczania matematyki w Polsce, związanych z jego pracami nad przygotowaniem nowego programu, dopełnia obrazu Jaśkowskiego jako nauczyciela, zaangażowanego w upowszechnianie wiedzy z pomocą nowoczesnych środków.

Ten pobieżny przegląd pokazuje, że mimo przedwczesnej śmierci, Jaśkowski zostawił po sobie poważny dorobek naukowy. Miał znaczące osiągnięcia w logice, matematyce, edukacji i organizacji nauki. Warto zwrócić uwagę na niefortunną okoliczność związaną z upowszechnianiem jego wyników. Prawie wszystkie oryginalne pomysły i rezultaty zostały upowszechnione i rozpoznane w świecie długo po ich wynalezieniu, w większości po jego śmierci. Pierwszeństwo Jaśkowskiego w wynalezieniu dedukcji naturalnej zostało pierwotnie niedocenione ze względu na fatalne opóźnienie publikacji wyniku jego autorstwa. Ale nawet dziś wielu autorów, pisząc o dedukcji naturalnej, wspomina jedynie o Gentzenie jako jedynym twórcy tego typu systemów. Podobnie, jego wynalazek logiki inkluzywnej został odnotowany wiele lat po tym, jak rozwinęły się poważne badania nad tymi systemami. Prace nad logikami parakonsystentnymi również rozwinęły się bez znajomości pionierskich prac Jaśkowskiego; jego wkład odnotowano później. Ten przykry stan rzeczy wiązał się w dużej mierze z faktem, że wiele jego prac, choć napisanych po angielsku lub francusku, ukazało się w czasopismach o lokalnym charakterze i nie miało szans dotrzeć do szerszej publiczności.

III Dedukcja Naturalna

Jak już wyżej zaznaczyliśmy jednym z najważniejszych osiągnięć Jaśkowskiego było skonstruowanie oryginalnego systemu dowodzenia, zwanego obecnie zazwyczaj dedukcją naturalną[1]. Standardowym sposobem prezentacji systemów logicznych i teorii formalnych były, i nadal są, systemy aksjomatyczne. Ich starożytny rodowód („Elementy" Euklidesa III w. p.n.e.) i prosta teoretyczna konstrukcja (w szczególności definicja dowodu) to niewątpliwie zalety. Jednak w praktyce dowody w sformalizowanych systemach aksjomatycznych są zazwyczaj trudne do skonstruowania i nadmiernie długie. Matematycy w praktyce dowodzenia nie tylko odwołują się do aksjomatów i wcześniej dowiedzionych twierdzeń, ale nagminnie stosują dedukcje oparte na dodatkowych założeniach, które w trakcie dowodu zostają wyeliminowane. Właśnie próba formalnego ujęcia tych praktycznych sposobów wnioskowania i uzasadnienia ich poprawności doprowadziła Jaśkowskiego i – niezależnie – Gentzena, do skonstruowania systemów dedukcji naturalnej w latach 30-tych XX w. Praktyczna wygoda ich stosowania doprowadziła wkrótce potem do powstania wielu wariantów tych systemów i upowszechnienia ich w podręcznikach logiki, zwłaszcza w krajach anglosaskich. Ponieważ rozmaite wersje dedukcji naturalnej często (pozornie) bardzo się od siebie różnią, więc warto pokrótce opisać zasadnicze cechy takich systemów, które od konstrukcji Jaśkowskiego się wywodzą[2]. Systemy dedukcji naturalnej opierają się przede wszystkim na użyciu dużej liczby reguł zamiast aksjomatów. Reguły te są różnego typu i rozmaicie formułowane, jednak w każdym systemie dedukcji naturalnej mamy reguły, które pozwalają:

1) dedukować nowe formuły (wnioski) na podstawie wcześniej wprowadzonych (przesłanek);
2) wprowadzać do dowodu nowe (tymczasowe) założenia;
3) eliminować z dowodu wykorzystane założenia.

Zazwyczaj zadanie 1) realizują proste reguły inferencji, natomiast 2) i 3) reguły konstrukcji dowodu, o nieco bardziej złożonym charakterze. Reguły inferencji pozwalają z kilku (czasem jednej) przesłanek wydedukować wniosek. Rozmaite systemy dedukcji naturalnej zazwyczaj nie różnią

[1] Sam Jaśkowski pierwotnie używał nazwy „systemy założeniowe".

[2] Dokładniejszą charakterystykę można znaleźć m.in. w pracach Hazena i Pelletiera [9] lub Indrzejczaka [10], [11].

się bardzo w doborze pierwotnych reguł inferencji w systemie; chodzi o to, by były proste i łatwe w stosowaniu. Często dąży się też (w ślad za Gentzenem), żeby dla każdej stałej logicznej (spójnika, kwantyfikatora) mieć przynajmniej parę takich reguł; jedna pozwala wykorzystać formułę z daną stałą jako przesłankę (reguły eliminacji, odłączania), a druga wprowadzić ją jako wniosek (reguły dołączania).

Reguły konstrukcji dowodu mają bardziej kompleksowy charakter. Zazwyczaj wprowadzenie założenia jest zaznaczane za pomocą jakiegoś środka graficznego lub dodatkowej numeracji, żeby zaznaczyć, że ma ono charakter tymczasowy i wszelkie formuły wydedukowane z tego założenia też mają taki charakter. Osobną kwestią jest eliminacja takich założeń i wydedukowanych z nich formuł, oparta na tradycyjnie stosowanych technikach takich jak dowód nie wprost czy dowód warunkowy. W pierwszym przypadku para formuł sprzecznych wydedukowana z dodatkowego założenia upoważnia do eliminacji z dowodu tegoż założenia i wprowadzenia do dowodu jego zaprzeczenia. W drugim możemy dołączyć do dowodu implikację, jeżeli wydedukowaliśmy następnik z założenia dodatkowego, którym był poprzednik tejże implikacji. Te, przykładowo podane, techniki pokazują, że w przypadku reguł konstrukcji dowodu dedukujemy nowe formuły nie na podstawie przesłanek (jak w przypadku reguł inferencji), ale dodatkowych dowodów zaczętych dodatkowym założeniem. Toteż dowód w systemach tego typu nie jest prostym ciągiem formuł (jak w systemie aksjomatycznym), ale raczej strukturą, w której kolejno można zanurzać poddowody oparte o dodatkowe założenia. Poddowód taki kończy się z chwilą, gdy zastosujemy odpowiednią technikę, np. w przypadku dowodu nie wprost uzyskanie sprzeczności zamyka poddowód, a negacja założenia jest już elementem dowodu pierwotnego, który budowaliśmy zanim dołączyliśmy założenie dodatkowe. Jak widać reguły konstrukcji dowodu narzucają też pewną heurystykę niedostępną w systemach aksjomatycznych[3]. Jeżeli chcemy dowieść pewną formułę – wprowadźmy jej negację jako założenie dodatkowe; jeżeli potrzebujemy implikacji – wprowadźmy jej poprzednik jako założenie. Każdy system dedukcji naturalnej posiada takie reguły konstrukcji dowodu – często jeszcze inne.

Na tym kończą się podobieństwa między różnymi systemami dedukcji naturalnej. Zwłaszcza definicja i kształt dowodu dopuszcza wiele urozma-

[3] Dopóki nie udowodni się w ich ramach odpowiednich twierdzeń o dedukcji, stanowiących formalne odpowiedniki scharakteryzowanych wyżej technik. Wykorzystanie takich dodatkowych technik pozwala zbliżyć praktykę dowodzenia w systemach aksjomatycznych do dedukcji naturalnej.

iceń. Z praktycznego punktu widzenia istotne jest wyraźne zaznaczenie, gdzie kończy się poddowód oparty o dodatkowe założenie, aby uniknąć dalszego korzystania z formuł w nim zawartych, gdyż to prowadzi do błędów. Jaśkowski początkowo zastosował technikę prostokątów otaczających każdy zakończony poddowód, ale w ostatecznej wersji swojej pracy [13] zastąpił prostokąty wprowadzaniem dodatkowej numeracji dla każdego poddowodu. W skrypcie zastosował jeszcze inną technikę graficzną separacji poddowodów – poziome klamrowe nawiasy[4]. W każdym z tych rozwiązań ryzyko błędnych dedukcji jest wyeliminowane poprzez zakaz korzystania z tych formuł, które graficznie są zaznaczone jako należące do zakończonego poddowodu.

Gentzen uniknął tego typu problemów w inny sposób. W jego systemie dowód nie jest linearny, lecz jest strukturą o postaci drzewa, którego korzeń stanowi dowodzona formuła, a liście to założenia. Bez wchodzenia w detale zaznaczmy, że takie rozwiązanie również pozwala na uniknięcie ryzyka wykorzystywania w dalszym dowodzie założeń, które zostały wcześniej wyeliminowane (i wydedukowanych z nich formuł). Rozwiązanie Gentzena bardzo dobrze pokazuje konstrukcję gotowego dowodu, ale nie jest przydatne w praktyce poszukiwania dowodu tak jak rozwiązania Jaśkowskiego. Nic dziwnego, że dedukcja naturalna w stylu Gentzena, tzn. z dowodami w formie drzew, jest wykorzystywana przede wszystkim w pracach teoretycznych z zakresu teorii dowodu. Natomiast dowody linearne w stylu Jaśkowskiego doczekały się ogromnej ilości wariantów w literaturze podręcznikowej, gdzie wykorzystuje się dedukcję naturalną jako praktyczne narzędzie konstrukcji dowodów. Dziwi natomiast fakt, że zazwyczaj autorzy tych podręczników o Jaśkowskim nie wspominają[5].

IV Zawartość i konstrukcja skryptu

Wspomnieliśmy na początku, że skrypt Jaśkowskiego zasługuje na przypomnienie m.in. ze względu na oryginalność wykładu. Najważniejszym wyznacznikiem jego oryginalności jest szerokie wykorzystanie własnego sys-

[4] Jeszcze inne, pokrewne rozwiązania w postaci pionowych linii, nawiasów itp., zostały potem wprowadzone przez autorów popularnych podręczników logiki jak Fitch [6] czy Copi [4].

[5] Wspomnieć można, że istnieją też wersje dedukcji naturalnej, wywodzące się od Gentzena, w których podział na reguły inferencji i konstrukcji dowodu oraz potrzeba stosowania graficznych środków dla wyodrębniania poddowodów nie są potrzebne, gdyż reguły definiowane są nie na formułach, a na tzw. sekwentach.

temu dedukcji naturalnej jako sposobu prezentacji logiki. Krótko omówimy jego zawartość, wskazując na te cechy, które świadczą o jego nowatorstwie.

Skrypt składa się ze wstępu oraz trzech rozdziałów. W pięciostronicowym wstępie podane są wskazówki bibliograficzne oraz krótkie uwagi o charakterze wprowadzającym: terminologicznym i historycznym. Rozdział 2 to obszerna prezentacja klasycznej logiki zdań. Autor używa beznawiasowej symboliki Łukasiewicza, w której prezentuje zarówno standardową logikę zdań, jak i jej wersję z kwantyfikatorami. Po omówieniu kwestii syntaktycznych wprowadza reguły dedukcji naturalnej dla spójników i prezentuje dowody 22 tez. Następnie dołącza reguły dla kwantyfikatorów i dowody kolejnych 11 tez. Ostatnia część rozdziału ma charakter metodologiczny i zawiera charakterystykę semantyczną spójników oraz dowód niesprzeczności, rozstrzygalności i zupełności logiki zdań z kwantyfikatorami wraz z dowodami kolejnych 26 tez. Na uwagę zasługuje fakt, że logika zdań jest konsekwentnie scharakteryzowana w terminach dedukcji naturalnej, bez żadnego odniesienia do ujęcia aksjomatycznego. Nawet semantyczna charakterystyka spójników jest wyprowadzona dedukcyjnie na bazie uogólnionego pojęcia rozstrzygalności wyrażeń. Autor konsekwentnie używa w dowodach rezultatów metalogicznych tej samej metody, zbliżonej do zastosowanej przez László Kalmára w dowodzie pełności rachunku zdań; w przypadku Jaśkowskiego ma ona jednak konsekwentnie syntaktyczny charakter. Wprowadzenie kwantyfikatorów do rachunku zdań jest charakterystyczną cechą polskiej szkoły logiki przedwojennej (por. np. skrypt Łukasiewicza [37]). Zabieg ten umożliwia Jaśkowskiemu dowód zupełności (rachunek zdań bez kwantyfikatorów nie jest zupełny w tym sensie), z którego następnie wyprowadzony jest dowód pełności. Ponadto pozwala na dydaktycznie prostsze wprowadzenie reguł kwantyfikatorowych, które w kolejnym rozdziale są uogólnione na rachunek predykatów.

Rozdział 3 jest bardziej zwięzły i zawiera zasadniczo prezentację rachunku pierwszego rzędu, choć można znaleźć również zarysowane sposoby jego poszerzenia na drugi rząd. Warto podkreślić, że reguły dla kwantyfikatorów podane w skrypcie są odmienne zarówno od reguł podanych w [13], jak i reguł podanych przez Gentzena czy późniejszych autorów systemów dedukcji naturalnej. W [13] Jaśkowski podał jedynie reguły dla kwantyfikatora ogólnego i to reguły słabsze, charakteryzujące logikę inkluzywną. Reguły podane w skrypcie charakteryzują logikę klasyczną, ale w odmienny sposób niż w innych systemach. Uwaga ta dotyczy przede wszystkim reguł dla kwantyfikatora szczegółowego, wprowadzonych wcześniej dla zmiennych zdaniowych. Są one trzy i można im zarzucić pewne niedomogi natury teoretycznej. Zamiast jednej reguły eliminacji kwantyfikatora są dwie reguły, z których jedna eliminuje go jedynie wtedy, gdy w formule kwantyfikowanej nie występuje zmienna przykwantyfikatorowa. Druga dla odmiany wymaga dwóch przesłanek, z których jedna jest ogólnie skwantyfikowaną implikacją, a druga egzystencjalną kwantyfikacją poprzednika. Nie jest to więc rozwiązanie eleganckie, ale za to dydaktycznie łatwiejsze do przyswojenia dla nauczanych. Standardowe zestawy reguł kwantyfikatorowych, w których dąży się do adekwatnego ujęcia z pomocą pojedynczych reguł dołączania i eliminacji sprawiają często sporo kłopotów ze względu na skomplikowane warunki dodatkowe, które ograniczają błędne inferencje. Zestaw reguł podany przez Jaśkowskiego pozwala zgrabnie uniknąć tych problemów. W rozdziale tym można znaleźć również dowody 39 tez, prezentację sylogistyki Arystotelesa, identyczności (scharakteryzowanej w logice drugiego rzędu) oraz wybranych własności relacji oraz zagadnienia (nie)rozstrzygalności.

Ostatni rozdział zawiera zwięzłą prezentację teorii typów, kategorii i antynomii Russella. Ponownie pojawia się teoria identyczności jako ilustracja rozważań o definicji oraz teoriach aksjomatycznych. Autor ponownie konsekwentnie stosuje dedukcję naturalną jako poręczny sposób prezentacji omawianych zagadnień. Rozdział kończą krótkie uwagi o metodologii nauk empirycznych oparte głównie na pracach Carnapa.

Krótka charakterystyka zawartości skryptu wskazuje na wszechstronne użycie dedukcji naturalnej jako głównej metody prezentacji logiki i zagadnień metalogicznych. Wiemy, że Jaśkowski był wynalazcą dedukcji naturalnej (choć fakt ten jest często niedostrzegany), ale przy okazji warto wskazać na jeszcze jeden problem dotyczący pierwszeństwa. Od kwestii wynalezienia dedukcji naturalnej należy odróżnić problem upowszechnienia tego sposobu prezentacji logiki i dowodów w nauczaniu. W powszechnym przekonaniu pierwszym podręcznikiem, który konsekwentnie prezentuje logikę w postaci systemów dedukcji naturalnej jest książka Federica Fitcha “Symbolic Logic” [6] wydana w roku 1952. W podręczniku tym autor konsekwentnie używa systemu, który w sensie doboru reguł zależny jest od ujęcia Gentzena, ale w sensie przyjętego sposobu prezentacji dowodów jest uproszczonym systemem Jaśkowskiego, w którym zamiast czworoboków otaczających poddowody używa się jedynie pionowych linii z lewej strony poddowodu. Ten sposób prezentacji dowodów stał się niezwykle popularny i powszechnie określany jest jako “Fitch-style natural deduction”, chociaż sam Fitch w przedmowie wymienia Jaśkowskiego jako źródło inspiracji. Niektórzy twierdzą, że pionierem w upowszechnianiu naturalnej dedukcji jest Willard Orman Quine, który w "Methods of Logic" [39] wydanym po raz pierwszy w 1950 r. zaprezentował swój własny system dedukcji naturalnej. Jednak w książce Quine'a dedukcja naturalna nie jest systemem jedynym ani nawet podstawowym; jej prezentacja zajmuje zaledwie 20 stron. Sam Quine jako pioniera stosowania dedukcji naturalnej w nauczaniu logiki wymienia Cooleya i jego podręcznik "Primer of Logic" [3] wydany po raz pierwszy w roku 1942. Trudno jednak zgodzić się z opinią Quine'a w tej kwestii. Cooley wprowadza wprawdzie dużą liczbę wtórnych reguł inferencji, które bardzo upraszczają dowody, ale używa systemów aksjomatycznych i nie stosuje żadnych środków w celu zaznaczania zależności dedukowanych formuł od dodatkowych założeń, co – jak wyżej zaznaczyliśmy – jest jednym z definicyjnych kryteriów uznania danego systemu za system dedukcji naturalnej. W skrypcie Jaśkowskiego, podobnie jak w podręczniku Fitcha, dedukcja naturalna jest konsekwentnie stosowanym systemem formalnym. Wypada więc uznać, że prezentowany niżej skrypt z 1947 r. jest pierwszym na świecie podręcznikiem logiki nauczanej za pomocą dedukcji naturalnej. Być może jest to najważniejszy powód wznowienia tej pracy.

V Zasady redakcji

Podstawową zasadą przyjętą przy redagowaniu skryptu była zasada jak najmniejszego ingerowania w tekst oryginalny.

Zachowano strukturę skryptu: podział na rozdziały, podrozdziały, sekcje[6].

Poprawiono ortografię i interpunkcję według współczesnych zasad i reguł pisowni. Sprostowano także drobne błędy merytoryczne. W szczególności, w różnych miejscach w nawiasach kwadratowych umieszczono bądź drobne dodatki ułatwiające zrozumienie tekstu, bądź rekonstrukcję tekstu nieczytelnego lub ewidentnie zepsutego podczas przepisywania, np. „skrystalizowany" zamiast „sformalizowany", „edukacyjny" zamiast „dedukcyjny" itp.

[6] Z tą różnicą, że w oryginale jest stała numeracja podrozdziałów – łącznie 18 – i brak numeracji sekcji, natomiast w obecnym wydaniu podrozdziały i sekcje są numerowane w obrębie rozdziałów.

Wprowadzono zmiany o charakterze typograficznym – Jaśkowski często posługiwał się podkreśleniami i wersalikami, które zostały konsekwentnie zastąpione czcionką pogrubioną lub kursywą.

Zachowana została oryginalna notacja beznawiasowa (tzw. Łukasiewiczowska), ale dla wygody czytelnika obznajomionego ze współcześnie dominującą notacją dodano przypisy zawierające translację przykładów. W przypadku wzorów zwartych i krótkich transkrypcja jest podana obok w nawiasie kwadratowym, a w przypadku dowodów w przypisie na dole strony. W paru miejscach przypisy podają też drobne uzupełnienia do tekstu (a nie uzupełnienia w tekście – te są, jak wyżej wspominaliśmy, umieszczane w nawiasach kwadratowych).

W podawanych dalej transkrypcjach wzorów zachowujemy te same symbole, które stosował Jaśkowski dla zmiennych, tj. p, q, r dla zmiennych zdaniowych x, y, z dla zmiennych nazwowych, $a, b, \ldots, f, g, h$ dla zmiennych predykatowych. Podobnie używamy tych samych liter greckich co autor dla zapisu zmiennych metajęzykowych, natomiast dla spójników zamiast liter N, K, A, I, E stosujemy symbole $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, a dla kwantyfikatorów zamiast liter Π, Σ używamy $\forall, \exists$. W dodanych translacjach wzorów stosujemy nawiasy w sposób oszczędny, zgodny z konwencjami stosowanymi w wielu podręcznikach: 1) pomijamy nawiasy zewnętrzne, 2) stałe są uporządkowane ze względu na „siłę wiązania” swoich argumentów: $\neg$ oraz kwantyfikatory wiążą najmocniej, natomiast dwuargumentowe spójniki wiążą słabiej wg kolejności: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Dla przykładu:

$$p \wedge \neg q \rightarrow r \vee (s \rightarrow \neg(t \leftrightarrow q \rightarrow p))$$

jest uproszczonym, zgodnie z powyższymi konwencjami, zapisem formuły:

$$((p \wedge \neg(q)) \rightarrow (r \vee (s \rightarrow \neg(t \leftrightarrow (q \rightarrow p))))).$$

* *
*

Pragnę na koniec złożyć podziękowania kilku osobom, bez których pomocy nie udałoby się dokonać wydania tej książki. Przede wszystkim jestem bardzo wdzięczny spadkobiercom Profesora Stanisława Jaśkowskiego, Jego

córce Pani Annie Dziembowskiej oraz synowi Panu Kazimierzowi Jaśkowskiemu za wyrażenie zgody na wydanie skryptu i życzliwe słowa zachęty. Wdzięczność winienem również profesorowi Maxowi Urchsowi, który jako pierwszy zwrócił moją uwagę na skrypt Jaśkowskiego oraz Pani profesor Urszuli Wybraniec-Skardowskiej. Jej zaproszenie do złożenia artykułu o Stanisławie Jaśkowskim w przygotowanym przez Nią tomie poświęconym Szkole Lwowsko-Warszawskiej, stało się bezpośrednim impulsem do podjęcia przeze mnie pracy redakcyjnej. Chciałbym podziękować za pomoc na różnych etapach przygotowania edycji profesorowi Andrzejowi Pietruszczakowi oraz profesorom UMK Tomaszowi Jarmużkowi i Markowi Nasieniewskiemu, a przede wszystkim magistrowi Mateuszowi Klonowskiemu za Jego bezinteresowną pomoc przy sporządzeniu fotokopii skryptu. Na koniec wielkie podziękowania mojemu współpracownikowi doktorowi Michałowi Zawidzkiemu za czas i wysiłek poświęcony na dokonanie ostatecznej redakcji technicznej tekstu.

Andrzej Indrzejczak
Łódź 2018

Bibliografia

[1] BENCIVENGA, E., „Free Logics", [in:] D. Gabbay, F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. III, pp. 373–426, Reidel Publishing Company, Dordrecht 1986.

[2] BENCIVENGA, E., Jaśkowski's Universally Free Logic, *Studia Logica*, 2014, 102/6:1095–1102.

[3] COOLEY, J. C., *A Primer of Formal Logic*, Macmillan 1942.

[4] COPI, I. M., *Symbolic Logic*, The Macmillan Company, New York 1954.

[5] DUBIKAJTIS, L., The life and works of Stanisław Jaśkowski, *Studia Logica*, 1975, 34/2:109–116.

[6] FITCH, F., *Symbolic Logic*, Ronald Press Co, New York 1952.

[7] GARSON, J. W., *Modal Logic for Philosophers*, Cambridge University Press, Cambridge 2006.

[8] GENTZEN, G., Untersuchungen über das Logische Schliessen, *Mathematische Zeitschrift*, 1934, 39:176–210 oraz 39:405–431.

[9] HAZEN, A. P. i F. J. PELLETIER, Gentzen and Jaśkowski Natural Deduction: Fundamentally Similar but Importantly Different, *Studia Logica*, 2014, 102/6:1103–1142.

[10] INDRZEJCZAK, A., *Natural Deduction, Hybrid Systems and Modal Logics*, Springer, Berlin 2010.

[11] INDRZEJCZAK, A., *Natural Deduction*, [in:] *Internet Encyclopedia of Philosophy*, www.iep.utm.edu/nat-ded/.

[12] JAŚKOWSKI, S., „Teoria dedukcji oparta na dyrektywach założeniowych", [w:] S. Banach, K. Kuratowski, S. Kaczmarz (red.), *Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego*, Uniwersytet Jagielloński, Kraków 1929.

[13] JAŚKOWSKI, S., On the Rules of Suppositions in Formal Logic, *Studia Logica*, 1934, 1:5–32.

[14] JAŚKOWSKI, S., „Recherches sur le systéme de la logique intuitioniste", [in:] *Actes du Congrés International de Philosophie Scientifique*, Sorbonne, ss. 58–61, Paris 1936.

[15] JAŚKOWSKI, S., *Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych*, skrypt z wykładów, Toruń 1947.

[16] JAŚKOWSKI, S., „O aksjomatyce geometrii brył", *The Report of the VI-th Congress of the Polish Mathematicians*, 1948.

[17] JAŚKOWSKI, S., Rachunek zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:57–77.

[18] JAŚKOWSKI, S., Sur les variables propositionnelles dépendantes, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:17–22.

[19] JAŚKOWSKI, S., Trois contributions au calcul des propositions bivalent, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:3–15.

[20] JAŚKOWSKI, S., Sur certains groupes formés de classes d'ensambles et leur applications aux définitions des nombres, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1948, vol. 1:23–35.

[21] JAŚKOWSKI, S., Sur le probléme de deision de la topologie et de la theorie des groups, *Colloquiun Mathematicum*, 1948, vol. 1:176–178.

[22] JAŚKOWSKI, S., Sur certains axiomes de la géométrie élémentaire, *Annals of the Polish Mathematical Society*, 1948, vol. 21, fasc. 2:349–350.

[23] JAŚKOWSKI, S., Une modification des définitions fondamentales de la géométrie des corps de A. Tarski, *Annals of the Polish Mathematical Society*, 1948, vol. 21, fasc. 2:298–301.

[24] JAŚKOWSKI, S., Geometria brył, *Matematyka*, 1949, 1:1–7.

[25] JAŚKOWSKI, S., O koniunkcji dyskusyjnej w rachunku zdań dla systemów dedukcyjnych sprzecznych, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, 1949, vol. 1:171–172.

[26] JAŚKOWSKI, S., Z badań nad rozstrzygalnością rozszerzonej algebry Boole'a, *Casopis pro pestovani matematiky a fizyky*, 1949, Roc. 74: 136–137.

[27] JAŚKOWSKI, S., O interpretacji zdań kategorycznych Arystotelesa w rachunku predykatów, *Studia Societatis Scientiarum Torunensis*, Sec. A, 1950, vol. 2:77–90.

[28] JAŚKOWSKI, S., Interpretacja funkcji przyczynowych w rachunku zmiennej zdaniowej zależnej, *Sprawozdania Toruńskiego Towarzystwa Naukowego*, 1950, no. 1–4:123–124.

[29] JAŚKOWSKI, S., On the modal and causal functions in symbolic logic, *Studia Philosophica*, 1951, vol. 4:71–92.

[30] JAŚKOWSKI, S., *O symetrii w zdobnictwie i przyrodzie*, Warszawa, 1952.

[31] JAŚKOWSKI, S., Example of class of systems of ordinary differentila equations having no decision method for existence problems, *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, 1954, vol. 2/4:153–155.

[32] JAŚKOWSKI, S., Undecidability of first order sentences in the theory of free groupoids, *Fundamenta Mathematica*, 1956, vol. 43:36–45.

[33] JAŚKOWSKI, S., *Matematyka ornamentu*, Warszawa, 1957.

[34] JAŚKOWSKI, S., Über Tautologien, in welchen keine Variable mehr als zweimal vorkommt, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1963, Bd. 9:219–228.

[35] JAŚKOWSKI, S., On formulas in which no individual variable occurs more than twice, *Journal of Symbolic Logic*, 1966, vol. 31/1:1–6.

[36] KOTAS, J., A. PIECZKOWSKI, Scientific works of Stanisław Jaśkowski, *Studia Logica*, 1967, 21:7–16.

[37] ŁUKASIEWICZ, J., *Elementy Logiki matematycznej*, PWN 1962 (II wydanie).

[38] PIETKA, D., Stanisław Jaśkowski's logical investigations, *Organon*, 2008, 37(40):39–69.

[39] QUINE, W. Van O., *Methods of Logic*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1950.

Stanisław Jaśkowski

Elementy logiki matematycznej i metodologii nauk ścisłych (skrypt z wykładów)

wydano na prawach rękopisu

Akad. Księgarnia Spółdz. „SKRYPT”
Toruń 1947

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Literatura

Dziedzina wiedzy, którą będziemy się tu zajmowali, rozwijała się w szybkim tempie w ostatnich dziesięcioleciach. W rozwoju tym znaczny jest wkład uczonych polskich, których badania zjednały sobie uznanie za granicą i wywarły wyraźny wpływ. Wyniki badań znajdują się przeważnie w pracach specjalnych, w czasopismach logicznych, matematycznych lub filozoficznych, często są opublikowane w postaci streszczeń. W języku polskim brakuje drukowanego podręcznika, który by ujmował najważniejsze wyniki z tego zakresu. Podam tylko szereg książek, z których czytelnik może uzupełnić swe wiadomości. Z książek polskich polecam dla początkujących przede wszystkim niewielką książeczkę, przeznaczoną na lekturę dodatkową dla młodzieży licealnej:

- Tarski Alfred, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*. Biblioteczka matematyczna N 3-4-5, Książnica–Atlas, Lwów–Warszawa.

Książka ta nie zawiera systematycznego wykładu, lecz może służyć jako cenne uzupełnienie i zbiór zadań. Wobec braku podręcznika studenci uniwersytetów korzystali przeważnie ze skryptów. Wymienię tu:

- Ajdukiewicz Kazimierz, *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej*. Skrypt autoryzowany zredagował M. Presburger. Koło Matematyczno--Fizyczne Słuch. Un. Warsz., Warszawa 1928 (Litografia).

- Łukasiewicz Jan, *Elementy logiki matematycznej*. Skrypt autoryzowany opracował M. Presburger. Koło Matematyczno- -Fizyczne Słuch. Un. Warsz., Warszawa 1929 (Litografia).

Podręcznikiem przeznaczonym w zasadzie dla studentów wydziału humanistycznego jest:

- Kotarbiński Tadeusz, *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*. Ossolineum, Lwów 1926.

Podręcznik ten zawiera m.in. streszczenie niektórych poglądów Stanisława Leśniewskiego (profesor Uniwersytetu Warszawskiego, zmarł w 1939 r. przed wojną), który niestety nie pozostawił dzieła drukowanego o przystępniejszym charakterze.

Oryginalne a odmienne od „szkoły warszawskiej" poglądy zawierają książki:

- Chwistek Leon, *Granice nauki. Zarys logiki i metodologii nauk ścisłych*. Książnica–Atlas, Lwów–Warszawa 1935.

- Śleszyński Jan, *Teoria dowodu*. Podług wykładów uniwersyteckich opracował S. K. Zaremba, Koło Matematyczno-Fizyczne Ucz. Un. Jagiellońskiego, Kraków, Tom I – 1925, Tom II – 1929.

Literatura w językach obcych również nie jest obszerna, spośród przystępniejszych podręczników wymienię:

- Hilbert David und Ackermann W[ilhelm], *Grundzuge der Theoretischen Logik*. II Aufl. Springer, Berlin 1938.

- Carnap Rudolph, *Abriss der Logistik*. Wien 1929.

Charakter popularyzujący posiada ciekawa książka:

- Russell Bertrand, *Introduction to mathematical philosophy*. London 1921. To samo w tłumaczeniu: *Einfuhrung in die Mathematische Philosophie*. Ins deutsche übertreten von E. J. Gumpel und W. Gordon, Drei Masken, Munchen 1923.

Nie znam literatury zagranicznej z okresu wojny 1939–1945.

1.2. Co rozumieć będziemy przez metodologię

Piszę na tablicy „1 + 1 = 2". Jest to pewne twierdzenie spisane w powszechnie przyjętym znakowaniu arytmetycznym, pewne zdanie wypowiedziane w języku arytmetyki – jak inaczej możemy powiedzieć. Jest to zarazem konkretny, materialny napis na tablicy, o tym napisie możemy wypowiadać