Ekonomia matematyczna

Materiały do ćwiczeń

Joanna Górka
Witold Orzeszko
Marcin Wata

Wydawnictwo C.H. Beck

Ekonomia
matematyczna

Ekonomia matematyczna

Materiały do ćwiczeń

Joanna Górka
Witold Orzeszko
Marcin Wata

WYDAWNICTWO C.H. BECK
WARSZAWA 2009

Wydawca: Dorota Ostrowska-Furmanek
Redakcja merytoryczna: Urszula Cielniak
Recenzent: prof. dr hab. Krzysztof Malaga
Projekt okładki i stron tytułowych: Maryna Wiśniewska
Ilustracja na okładce: © Mark Evans/iStockphoto.com

Seria: Metody ilościowe

Złożono programem TEX

Wydawnictwo C.H. Beck Sp. z o.o.
ul. Bonifraterska 17, 00-203 Warszawa

Skład i łamanie: Wydawnictwo C.H. Beck
Druk i oprawa: Studio Spartan, Gdynia

ISBN 978-83-255-1179-1

Spis treści

Wstęp

Niniejszy skrypt przeznaczony jest przede wszystkim dla studentów kierunków ekonomicznych oraz matematycznych, gdzie realizowany jest przedmiot ekonomia matematyczna. Omawiane w książce zagadnienia oraz ich układ odpowiadają programowi zajęć z ekonomii matematycznej prowadzonych na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu. Zagadnienia te zostały podzielone na cztery podstawowe grupy tematyczne, którym odpowiadają poszczególne rozdziały niniejszego skryptu:

1) teoria popytu konsumenta,
2) model równowagi rynkowej Arrowa–Hurwicza,
3) funkcja produkcji wraz z teorią przedsiębiorstwa,
4) dynamiczne modele procesów ekonomicznych.

Intencją autorów było stworzenie pomocy dydaktycznej do prowadzenia ćwiczeń, stąd główny nacisk położony został na część praktyczną, czyli rozwiązywanie zadań. Niemniej jednak każdy rozdział rozpoczyna zwięzłe wprowadzenie teoretyczne, którego celem jest zaprezentowanie podstawowych pojęć, twierdzeń i własności niezbędnych do zrozumienia danego zakresu materiału. Ambicją autorów nie było napisanie podręcznika z zakresu teorii, stąd w trakcie opracowywania tej części skryptu autorzy korzystali z pozycji książkowych dostępnych już na rynku wydawniczym. W zakresie pierwszych trzech rozdziałów szczególnie pomocne były prace: E. Panek *Ekonomia matematyczna* oraz A. Mas-Colell, M.D. Whinston, J.R. Green *Microeconomic Theory*, natomiast w zakresie rozdziału czwartego – A.C. Chiang *Podstawy ekonomii matematycznej*, A. Ostoja-Ostaszewski *Matematyka w ekonomii, modele i metody* oraz H. Zawadzki *Chaotyczne systemy dynamiczne*.

W dalszej części każdego z rozdziałów prezentowane są przykładowe, najbardziej reprezentatywne zadania wraz z ich rozwiązaniami. Każdy rozdział zakończony jest zestawem zadań do samodzielnego rozwiązania, które pozwalają na lepsze zrozumienie oraz opanowanie materiału. Zadania, w których wykorzystano bardziej zaawansowany aparat matematyczny lub wymagana jest znajomość pakietu Maple, przeznaczone są głównie dla studentów matematyki i oznaczone zostały gwiazdką. W celu ułatwienia korzystania z niniejszej książki na jej końcu znajdują się odpowiedzi do zadań.

Prezentowane zadania są oparte na pomysłach własnych autorów lub pochodzą z innych publikacji, np. E. Panek (red.) *Podstawy ekonomii matematycznej* oraz H. Zawadzki (red.) *Zbiór zadań z ekonomii matematycznej*.

Autorzy książki przyjęli założenie, że czytelnikowi znane są podstawowe zagadnienia z zakresu analizy matematycznej i algebry liniowej. W przypadku, gdy korzysta się z bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego, następuje odwołanie do właściwego materiału źródłowego.

Do skryptu dołączono wykaz stosowanych symboli matematycznych, indeks pojęć oraz dodatek matematyczny. W pierwszej części dodatku matematycznego zawarto wykaz wybranych definicji i twierdzeń z zakresu matematyki wyższej. Z założenia nie jest to spójny wykład, lecz przypomnienie pojęć przydatnych do lepszego zrozumienia prezentowanego w skrypcie materiału. W dwóch kolejnych częściach dodatku przedstawiono liniowe równania różnicowe oraz różniczkowe, ze szczególnym naciskiem na metody ich rozwiązywania.

Autorzy pragną serdecznie podziękować Prof. dr hab. Józefowi Stawickiemu za wydatną i życzliwą pomoc w napisaniu niniejszego skryptu oraz Dr hab. Krzysztofowi Maladze, prof. nadzw. UEP, za wnikliwą recenzję, która znacząco poprawiła jakość przygotowywanej publikacji.

Autorzy wyrażają nadzieję, że prezentowany skrypt będzie stanowił przydatną pomoc dydaktyczną w nauczaniu ekonomii matematycznej.

Wykaz symboli matematycznych

$\wedge$	koniunkcja logiczna
$\vee$	alternatywa logiczna
$\neg$	negacja logiczna
$\Rightarrow$	implikacja
$\Leftrightarrow$	równoważność
$\forall$	kwantyfikator ogólny – „dla każdego”
$\exists$	kwantyfikator szczegółowy – „istnieje”
$\exists!$	kwantyfikator – „istnieje dokładnie jeden”
$A \subset B$	„A jest podzbiorem właściwym B”
$A \subseteq B$	„A jest podzbiorem B” ($A \subset B$ lub $A = B$)
$A \times B$	iloczyn kartezjański zbiorów A i B
$\operatorname{int} A$	wnętrze zbioru A
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}_+$	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
$\mathbb{R}^n$	n-wymiarowa rzeczywista przestrzeń wektorowa
$\overline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$	n-wymiarowy wektor ($\overline{x} \in \mathbb{R}^n$)
$\overline{0}$	wektor $[0, 0, \ldots, 0]$
$\mathbb{R}^n_+$	$\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n\}$
$[\overline{x}, \overline{y}]$	uporządkowana para wektorów $\overline{x}$ i $\overline{y}$
$\overline{x} \circ \overline{y}$	iloczyn skalarny wektorów $\overline{x}$ i $\overline{y}$
$\overline{x} \geqslant \overline{y}$	częściowy porządek w $\mathbb{R}^n$ ($x_i \geqslant y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$)
$\overline{x} > \overline{y}$	ostry częściowy porządek w $\mathbb{R}^n$ ($x_i > y_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$)
$\overline{x} \neq \overline{y}$	„$\overline{x}$ jest różne od $\overline{y}$” (istnieje takie i, że $x_i \neq y_i$)
$\succsim$	relacja słabej preferencji
$\succ$	relacja silnej preferencji
$\sim$	relacja indyferencji

Rozdział 1. Teoria popytu

1.1. Preferencje konsumenta

Konsument wyraża swoje preferencje w wyniku porównania między sobą pojedynczych towarów lub ich koszyków. Porównując dwa koszyki towarów, może stwierdzić, że są one jednakowo dobre lub też że jeden z nich jest lepszy od drugiego. Koszyk towarów można opisać n-wymiarowym wektorem $\overline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, w którym liczby x_i oznaczają ilość jednostek[1] i-tego towaru ($i = 1, \ldots, n$). Koszyki towarów tworzą **przestrzeń towarów** – zbiór $X \subset \mathbb{R}^n_+$, gdzie przez $\mathbb{R}_+$ rozumiemy zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych.

Do określenia relacji preferencji konsumenta używać będziemy symbolu „$\succsim$", zapis $\overline{x} \succsim \overline{y}$ będzie oznaczać, że koszyk towarów $\overline{x}$ jest nie gorszy niż koszyk $\overline{y}$.

> **Definicja 1.1.**
> Relację „$\succsim$" określoną na przestrzeni towarów nazywamy **relacją słabej preferencji**, jeśli spełnia warunki:
> R(1) $\forall_{\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in X} \quad (\overline{x} \succsim \overline{y} \wedge \overline{y} \succsim \overline{z}) \Rightarrow \overline{x} \succsim \overline{z}$ (przechodniość),
> R(2) $\forall_{\overline{x}, \overline{y} \in X} \quad \overline{x} \succsim \overline{y} \vee \overline{y} \succsim \overline{x}$ (zupełność).

Zauważmy, że warunek zupełności daje konsumentowi możliwość porównania każdych dwóch koszyków towarów.

> **Definicja 1.2.**
> Parę $\langle X, \succsim \rangle$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n_+$ jest przestrzenią towarów, a „$\succsim$" relacją słabej preferencji konsumenta w X, nazywamy **polem preferencji konsumenta**.

Na podstawie pojęcia słabej preferencji określmy relację indyferencji i silnej preferencji.

> **Definicja 1.3.**
> Koszyki towarów $\overline{x}$, $\overline{y}$ nazywamy **indyferentnymi** (ozn. $\overline{x} \sim \overline{y}$), jeśli $\overline{x} \succsim \overline{y}$ i jednocześnie $\overline{y} \succsim \overline{x}$.

[1] Wielkości te nie muszą być całkowite.

Indyferencja dwóch koszyków oznacza, że koszyki te są dla konsumenta jednakowo dobre.

Definicja 1.4.
Niech $\overline{x} \in X$. Zbiór $K_{\overline{x}} = \{\overline{y} : \ \overline{y} \in X \wedge \overline{x} \sim \overline{y}\}$ (tzn. zbiór koszyków indyferentnych z koszykiem $\overline{x}$) nazywamy **obszarem (powierzchnią) obojętności** w przestrzeni towarów[2].

Definicja 1.5.
Koszyk $\overline{x}$ nazywamy **silnie preferowanym** nad koszyk $\overline{y}$ (ozn. $\overline{x} \succ \overline{y}$), jeśli $\overline{x} \succsim \overline{y} \wedge \neg(\overline{y} \succsim \overline{x})$.

Relacje słabej preferencji, indyferencji oraz silnej preferencji mają następujące własności:
P(1) „$\sim$” jest relacją równoważności[3],
P(2) $\forall_{\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in X} \quad (\overline{x} \succsim \overline{y} \wedge \overline{y} \succ \overline{z}) \Rightarrow \overline{x} \succ \overline{z}$,
P(3) $\forall_{\overline{x},\overline{y} \in X} \quad \overline{x} \succsim \overline{y} \Leftrightarrow (\overline{x} \succ \overline{y} \vee \overline{x} \sim \overline{y})$,
P(4) $\forall_{\overline{x},\overline{y} \in X} \quad \overline{x} \succ \overline{y} \vee \overline{y} \succ \overline{x} \vee \overline{x} \sim \overline{y}$.

Relacje preferencji mogą również mieć dodatkowe własności. Spośród nich wyróżnijmy ciągłość i wypukłość.

Definicja 1.6.
Relację silnej preferencji nazywamy **ciągłą** na X, jeśli zbiór

$$G = \{[\overline{x}, \overline{y}] : \ \overline{x} \succ \overline{y}\}$$

jest otwarty[4] w $X \times X$.

Ciągłość relacji oznacza, że warunkiem koniecznym (choć niewystarczającym) do tego, aby konsument przestał uważać jeden koszyk za lepszy od drugiego, są „dostatecznie duże” zmiany zawartości tych koszyków.

Definicja 1.7.
Relację preferencji „$\succsim$” określoną na zbiorze wypukłym[5] nazywamy **wypukłą**, jeśli dla dowolnych koszyków towarów $\overline{x} \succsim \overline{y}$ i dowolnej liczby $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ koszyk towarów $\overline{z}$ będący kombinacją liniową koszyków $\overline{x}$ i $\overline{y}$ (tzn. $\overline{z} = \lambda\overline{x} + (1-\lambda)\overline{y}$) jest co najmniej tak preferowany, jak koszyk $\overline{y}$ (tzn. $\overline{z} \succsim \overline{y}$).

Pojęcie wypukłości relacji umożliwia zdefiniowanie pojęcia wypukłego pola preferencji.

[2] W przypadku $n = 2$ zbiór $K_{\overline{x}}$ nazywamy **krzywą obojętności**.
[3] Por. definicja 1 w dodatku matematycznym.
[4] Por. definicja 6 w dodatku matematycznym.
[5] Por. definicja 11 w dodatku matematycznym.

Definicja 1.8.
Pole preferencji $\langle X, \succsim \rangle$ nazywamy **słabo wypukłym**, jeżeli:
- przestrzeń towarów X jest zbiorem wypukłym,
- relacja preferencji „$\succsim$" jest wypukła.

Definicja 1.9.
Relację preferencji „$\succsim$" określoną na zbiorze wypukłym nazywamy **silnie wypukłą**, jeśli dla dowolnych koszyków towarów $\overline{x} \succsim \overline{y}$, $\overline{x} \neq \overline{y}$ i dowolnej liczby $0 < \lambda < 1$ koszyk $\overline{z} = \lambda \overline{x} + (1 - \lambda)\overline{y}$ spełnia warunek $\overline{z} \succ \overline{y}$.

Oznacza to, że dla konsumenta kierującego się silnie wypukłą relacją preferencji uznanie koszyka $\overline{x}$ za nie gorszy od innego koszyka $\overline{y}$ jest równoznaczne z tym, że każda kombinacja liniowa koszyków $\overline{x}$ i $\overline{y}$ jest lepsza od koszyka $\overline{y}$.

Definicja 1.10.
Pole preferencji $\langle X, \succsim \rangle$ nazywamy **silnie wypukłym**, jeżeli:
- przestrzeń towarów X jest zbiorem wypukłym,
- relacja preferencji „$\succsim$" jest silnie wypukła.

Każdy konsument, opierając się na relacji preferencji, podejmuje decyzje o zakupach w celu wyboru koszyka subiektywnie najlepszego (preferowanego). Aby formalnie zdefiniować pojęcie „koszyka preferowanego", rozważmy dowolny niepusty podzbiór M przestrzeni towarów X.

Definicja 1.11.
Koszyk towarów $\overline{x}^0 \in M$ nazywamy **M-preferowanym**, jeśli dla dowolnego $\overline{x} \in M$ zachodzi $\overline{x}^0 \succsim \overline{x}$.

Oznacza to, że M-preferowany koszyk $\overline{x}^0$ jest nie gorszy od dowolnego innego koszyka ze zbioru M. Z przedstawionej definicji nie wynika, czy koszyk $\overline{x}^{(0)}$ istnieje oraz czy jest on jedyny. Kwestii tej poświęcone są następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1.1.
Jeśli relacja preferencji „$\succsim$" jest ciągła w X i $M \subset X$ jest niepustym zbiorem zwartym[6], to istnieje co najmniej jeden M-preferowany koszyk towarów.

Twierdzenie 1.2.
Jeżeli pole preferencji jest silnie wypukłe, to w wypukłym zbiorze M istnieje nie więcej niż jeden M-preferowany koszyk towarów.

Twierdzenia 1.1 i 1.2, choć stanowią kryteria istnienia jedynego M-preferowanego koszyka towarów, to jednak nie dają wskazówki, jak go znaleźć. W podrozdziałach 1.1−1.4 zostanie wprowadzony aparat matematyczny służący do wyznaczania takiego koszyka w sytuacji, gdy M jest zbiorem szczególnej postaci – tzw. zbiorem budżetowym.

[6] Por. definicja 10 w dodatku matematycznym.

1.2. Zbiór budżetowy i powierzchnia budżetowa

W rzeczywistości każdy konsument dysponuje pewnym dochodem I (gdzie $I \geqslant 0$), który może wydać na zakup towarów.

Niech $p_i > 0$ oznacza cenę jednostki i-tego towaru ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ceny p_i tworzą **wektor cen** postaci $\overline{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$. **Wartością koszyka** towarów $\overline{x}$ jest iloczyn skalarny wektorów $\overline{p}$ i $\overline{x}$, tzn. liczba:

$$\overline{p} \circ \overline{x} \stackrel{\text{df}}{=} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Definicja 1.12.
Zbiorem budżetowym nazywamy zbiór:

$$Z(\overline{p}, I) \stackrel{\text{df}}{=} \{\overline{x} \in X : \ \overline{p} \circ \overline{x} \leqslant I\}.$$

Zbiór budżetowy jest więc zbiorem koszyków towarów, których wartość nie przekracza dochodu konsumenta.

Twierdzenie 1.3.
Zbiór $Z(\overline{p}, I)$ jest ograniczony[7], domknięty[8] i wypukły.

W zbiorze budżetowym wyróżnijmy podzbiór zawierający te koszyki, na zakup których konsument wyda cały swój dochód. Nazywamy go **powierzchnią budżetową**[9] i definiujemy następująco:

$$B(\overline{p}, I) \stackrel{\text{df}}{=} \{\overline{x} \in X : \ \overline{p} \circ \overline{x} = I\}.$$

Jeżeli $\overline{x} \in B(\overline{p}, I)$, to będziemy mówić, że „koszyk $\overline{x}$ leży na powierzchni budżetowej".

Definicja 1.13.
Koszyk towarów $\overline{x} \in Z(\overline{p}, I)$ nazywamy **optymalnym** w zbiorze $Z(\overline{p}, I)$, jeśli $\overline{x} \succsim \overline{y}$ dla dowolnego koszyka $\overline{y} \in Z(\overline{p}, I)$.

Odnosząc się do definicji 1.11, możemy zatem powiedzieć, że koszyk optymalny to koszyk $Z(\overline{p}, I)$-preferowany.

1.3. Funkcja użyteczności

Posługiwanie się relacją preferencji jest w wielu przypadkach (np. w zadaniu wyznaczania optymalnego koszyka) mało wygodne w zastosowaniu.

[7] Zob. definicja 9 w dodatku matematycznym.
[8] Zob. definicja 8 w dodatku matematycznym.
[9] W przypadku, gdy $n = 2$, zbiór $B(\overline{p}, I)$ nazywamy **linią budżetową**.

W takich sytuacjach dużo bardziej operatywnym narzędziem jest funkcja użyteczności.

Definicja 1.14.
Funkcją użyteczności nazywamy funkcję $u\colon X \to \mathbb{R}$ taką, że relacja „$\succsim$" określona wzorem:

$$\forall_{\overline{x},\overline{y}\in X} \quad (\overline{x} \succsim \overline{y} \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} u(\overline{x}) \geqslant u(\overline{y}))$$

jest relacją słabej preferencji.

Wartość funkcji użyteczności interpretuje się jako stopień zadowolenia konsumenta z nabycia określonego koszyka towarów. Jednakże wartość ta jest tylko wielkością względną, umożliwiającą jedynie porównanie koszyków towarów [zob. Panek (red.), 2005, s. 35].

Zauważmy, że z definicji 1.3, 1.5 i 1.14 wynika, że:

$$\overline{x} \sim \overline{y} \Leftrightarrow u(\overline{x}) = u(\overline{y}),$$
$$\overline{x} \succ \overline{y} \Leftrightarrow u(\overline{x}) > u(\overline{y}).$$

Oczywiście nie każda funkcja $u\colon X \to \mathbb{R}$ jest funkcją użyteczności, gdyż relacja przez nią opisywana (w rozumieniu definicji 1.14) musi spełniać warunki $\mathrm{R}(1)$ i $\mathrm{R}(2)$ (patrz definicja 1.1). Zarazem jednak należy podkreślić, że dla danej relacji słabej preferencji może istnieć więcej niż jedna opisująca ją funkcja użyteczności.

Definicja 1.15.
Funkcje $u_1\colon X \to \mathbb{R}$ oraz $u_2\colon X \to \mathbb{R}$ są **równoważne** (inaczej: opisują tę samą relację preferencji), jeśli:

$$\forall_{\overline{x},\,\overline{y}\in X} \quad u_1(\overline{x}) \geqslant u_1(\overline{y}) \Leftrightarrow u_2(\overline{x}) \geqslant u_2(\overline{y}).$$

Mówiąc w skrócie: funkcje użyteczności są równoważne, gdy prowadzą do wyborów tych samych koszyków towarów.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że przestrzenią towarów jest cały zbiór $\mathbb{R}^n_+$, czyli $X = \mathbb{R}^n_+$.

Twierdzenie 1.4.
- Jeżeli relacja preferencji „$\succsim$" jest ciągła na $\mathbb{R}^n_+$, to istnieje ciągła funkcja użyteczności $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ opisująca tę relację.
- Jeżeli funkcja użyteczności $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to opisywana przez nią relacja preferencji jest ciągła na $\mathbb{R}^n_+$.

DEFINICJA 1.16.
Mówimy, że w polu preferencji $\langle \mathbb{R}^n_+, \succsim \rangle$ obserwujemy **zjawisko niedosytu**, jeżeli:

$$\forall_{\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^n_+} \quad \overline{x} \geqslant \overline{y} \wedge \overline{x} \neq \overline{y} \Rightarrow \overline{x} \succ \overline{y}.$$

Zjawisko niedosytu oznacza, że wzrost ilości któregokolwiek towaru w koszyku zwiększa użyteczność tego koszyka w oczach konsumenta. Mówiąc w skrócie: konsument woli więcej niż mniej.

TWIERDZENIE 1.5.
W polu preferencji $\langle \mathbb{R}^n_+, \succsim \rangle$ obserwujemy zjawisko niedosytu wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja użyteczności opisująca relację preferencji „$\succsim$" jest rosnąca[10].

Z twierdzenia 1.5 wynika, że dla różniczkowalnej funkcji użyteczności zjawisko niedosytu jest tożsame z warunkiem:

$$\forall_{\overline{x} \in \mathbb{R}^n_+} \forall_{i=1,\,2,\,\dots,\,n} \quad \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} > 0.$$

W dalszych rozważaniach ważną rolę pełnić będą wklęsłe funkcje użyteczności[11]. Na mocy definicji, funkcja $u\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ jest wklęsła, jeśli:

$$\forall_{\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^n_+} \forall_{\lambda \in (0,\,1)} \quad u(\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\overline{y}) \geqslant \lambda u(\overline{x}) + (1-\lambda)u(\overline{y}).$$

Wklęsłość funkcji użyteczności oznacza, że konsument jest co najmniej tak zadowolony z posiadania koszyka towarów $\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\overline{y}$, jak „średnia" jego zadowolenia (z wagami λ oraz $(1-\lambda)$) z posiadania koszyków $\overline{x}$ oraz $\overline{y}$.

Następne twierdzenie wiąże ze sobą własności relacji preferencji oraz funkcji użyteczności.

TWIERDZENIE 1.6.
Jeśli funkcja użyteczności u jest funkcją wklęsłą (ściśle wklęsłą[12]), to relacja preferencji określona przez tę funkcję jest wypukła (silnie wypukła[13]).

Badanie wklęsłości funkcji użyteczności na podstawie definicji jest mało wygodne. W praktyce wklęsłość funkcji bada się przez analizę określoności macierzy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu $\left[\frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}$ (zwaną **macierzą Hessa** lub inaczej **hesjanem**)[14].

Z przedstawionych twierdzeń wynika wniosek, że ciągła funkcja użyteczności klasy C^2 opisuje ciągłą i wypukłą relację preferencji.

[10] Zob. definicja 17 w dodatku matematycznym.
[11] Zob. definicja 12 w dodatku matematycznym.
[12] Zob. definicja 12 w dodatku matematycznym.
[13] Twierdzenie odwrotne nie zachodzi, por. przykład 1.4.
[14] Zob. twierdzenia 2 oraz 3 w dodatku matematycznym.

TWIERDZENIE 1.7.
Jeżeli funkcja u jest klasy C^2 i macierz $\left[\frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}$ jest ujemnie określona, to:

$$\forall_{\overline{x}\in\mathbb{R}^n_+}\ \forall_{i=1,2,\ldots,n}\quad \frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial x_i^2} < 0. \tag{1.1}$$

Warunek (1.1) znany jest jako **pierwsze prawo Gossena**. W interpretacji ekonomicznej warunek ten oznacza, że krańcowa użyteczność i-tego towaru[15] (tzn. $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}$) maleje wraz ze wzrostem jego ilości w koszyku $\overline{x}$ (przy założeniu, że ilości pozostałych towarów nie ulegają zmianie).

Z twierdzeń 1.1−1.4 i twierdzenia 1.6 wynika następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1.8.
Jeśli funkcja użyteczności u jest ciągła i ściśle wklęsła, to:

$$\forall_{I\geqslant 0}\ \forall_{\overline{p}>\overline{0}}\ \exists!_{\overline{x}\in Z(\overline{p},I)}\ \forall_{\overline{y}\in Z(\overline{p},I),\ \overline{x}\neq\overline{y}}\quad u(\overline{x}) > u(\overline{y}).$$

Twierdzenie 1.8 oznacza, że dla ciągłej i ściśle wklęsłej funkcji użyteczności istnieje dokładnie jeden koszyk optymalny. Problem znalezienia tego koszyka sprowadza się do rozwiązania zadania maksymalizacji funkcji użyteczności (tzw. **zadania konsumenta**[16]), które w istocie rozwiązuje każdy racjonalnie postępujący konsument:

$$\begin{aligned}&\max_{\overline{x}} u(\overline{x})\\ &\text{przy ograniczeniach:}\\ &\begin{cases}\overline{p}\circ\overline{x}\leqslant I,\\ \overline{x}\geqslant\overline{0}.\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2}$$

1.4. Funkcja popytu

W podrozdziale 1.2 zostało zdefiniowane w języku relacji preferencji pojęcie koszyka optymalnego. Na wstępie przeformułujmy tę definicję, wykorzystując pojęcie funkcji użyteczności.

> **DEFINICJA 1.17.**
> Koszyk towarów $\overline{x}\in Z(\overline{p},I)$ jest **optymalny** dla relacji preferencji opisywanej przez funkcję użyteczności u, jeśli:
>
> $$u(\overline{x}) = \max_{\overline{y}\in Z(\overline{p},I)} u(\overline{y}).$$

[15] Zob. definicja 1.20.

[16] Zadanie to nazywane jest również „zadaniem maksymalizacji użyteczności konsumpcji” [zob. Panek (red.), 2005, s. 59].

Poszukiwanie optymalnego koszyka towarów polega zatem na rozwiązaniu zadania wyznaczenia ekstremum warunkowego funkcji wielu zmiennych u z warunkami[17] $\overline{p} \circ \overline{x} \leqslant I$ oraz $\overline{x} \geqslant \overline{0}$.

Z twierdzenia Kuhna–Tuckera [zob. Panek, 2003, s. 777; Panek (red.), 2005, s. 63] otrzymujemy następujące wnioski:

Wniosek 1.1.
Zadanie

$$\max_{\overline{x} \in Z(\overline{p}, I)} u(\overline{x})$$

jest równoważne zadaniu

$$\max_{\overline{x} \in B(\overline{p}, I)} u(\overline{x}), \tag{1.3}$$

gdzie $\overline{x} \geqslant \overline{0}$.

Oznacza to, że problem znalezienia optymalnego koszyka towarów jest równoważny poszukiwaniu ekstremum warunkowego funkcji u z warunkami $\overline{p} \circ \overline{x} = I$ oraz $\overline{x} \geqslant \overline{0}$.

Do wyznaczenia ekstremum warunkowego możemy, zgodnie z metodą Lagrange'a[18], posłużyć się funkcją postaci:

$$L(\overline{x}, \lambda) = u(\overline{x}) - \lambda(\overline{p} \circ \overline{x} - I).$$

W konsekwencji otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 1.2.
Jeśli u jest klasy C^2 oraz spełnione są warunki:
U(1) $\forall_{\overline{x} \in \mathbb{R}^n_+} \forall_{i=1,2,\ldots,n} \ \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} > 0$,
U(2) $\forall_{\overline{x} \in \mathbb{R}^n_+}$ macierz $\left[\frac{\partial^2 u(\overline{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n \times n}$ jest ujemnie określona,
to koszyk towarów $\overline{x} \in B(\overline{p}, I)$ jest optymalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} = \lambda p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \overline{p} \circ \overline{x} = I. \end{cases} \tag{1.4}$$

Warunek $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} = \lambda p_i$ ma swoją interpretację ekonomiczną, gdyż oznacza, że krańcowa użyteczność każdego z towarów w koszyku jest wprost proporcjonalna do ceny tego towaru.

Po uwzględnieniu twierdzenia 1.8 otrzymujemy dodatkowy wniosek:

---

[17] Inaczej mówiąc, jest to zadanie programowania nieliniowego (lub w szczególnym przypadku – liniowego).

[18] Zob. dodatek matematyczny D.1.

Wniosek 1.3.
Jeśli u jest rosnącą i ściśle wklęsłą funkcją różniczkowalną, to istnieje dokładnie jeden koszyk optymalny $\overline{x}^0 \in B(\overline{p}, I)$ spełniający układ (1.4).

Wartość λ^0 spełniającą warunki (1.4) (związaną z $\overline{x}^0$) nazywamy optymalnym mnożnikiem Lagrange'a. Przekształcając układ równań (1.4), można wykazać, że $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial I}\big|_{\overline{x}=\overline{x}^0} = \lambda^0$. Oznacza to zatem, że optymalny mnożnik Lagrange'a interpretuje się jako krańcową użyteczność jednostki pieniężnej (tzn. przyrost użyteczności wynikający ze zwiększenia dochodu konsumenta o jednostkę) [zob. Panek (red.), 2005, s. 68].

Definicja 1.18.
Odwzorowanie $\overline{\varphi}\colon \operatorname{int} \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ przyporządkowujące każdej parze $(\overline{p}, I) > \overline{0}$ jedyne rozwiązanie zadania konsumenta (1.2) (tzn. koszyk optymalny $\overline{x}^0$) nazywamy **funkcją popytu konsumenta**.

Twierdzenie 1.9.
Jeżeli dwie funkcje użyteczności $u_1(\overline{x})$ i $u_2(\overline{x})$ opisują tę samą relację preferencji, to odpowiada im ta sama funkcja popytu $\overline{\varphi}(\overline{p}, I)$.

Twierdzenie 1.10.
Funkcja popytu konsumenta jest jednorodna stopnia zero[19], tzn. zachodzi:

$$\forall_{\overline{p}>\overline{0}}\, \forall_{I>0}\, \forall_{\lambda>0} \quad \overline{\varphi}(\lambda\overline{p}, \lambda I) = \overline{\varphi}(\overline{p}, I).$$

Jednorodność funkcji popytu oznacza, że popyt konsumpcyjny zależy tylko od struktury cen i dochodu $(\overline{p}, I)$, a nie od ich bezwględnego poziomu.

Definicja 1.19.
Pośrednią funkcją użyteczności nazywamy odwzorowanie $v\colon \operatorname{int} \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}$, które każdej parze $(\overline{p}, I) > \overline{0}$ przyporządkowuje użyteczność $u(\overline{x}^0)$ optymalnego koszyka $\overline{x}^0$, będącego rozwiązaniem zadania konsumenta (1.2).

Wartość pośredniej funkcji użyteczności jest zatem maksymalną użytecznością, którą może osiągnąć konsument dysponujący dochodem I przy cenach $\overline{p}$ [zob. Panek (red.), 2005, s. 73].

1.5. Interpretacja pochodnych funkcji użyteczności

Definicja 1.20.
Krańcową użytecznością i-tego towaru (w koszyku $\overline{x}$) nazywamy pochodną cząstkową pierwszego rzędu, tzn. $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}$.

[19] Zob. definicja 16 w dodatku matematycznym.

Krańcowa użyteczność i-tego towaru informuje, o ile (w przybliżeniu) zmieni się użyteczność koszyka $\overline{x}$, jeżeli ilość i-tego towaru wzrośnie o jednostkę, podczas gdy ilości pozostałych towarów nie ulegną zmianie.

Definicja 1.21.
Elastycznością użyteczności i-tego towaru nazywamy wyrażenie:

$$E_i(\overline{x}) = \frac{x_i}{u(\overline{x})} \cdot \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}.$$

Elastyczność użyteczności i-tego towaru informuje, o ile procent (w przybliżeniu) zmieni się użyteczność koszyka $\overline{x}$, jeżeli ilość i-tego towaru wzrośnie o jeden procent, podczas gdy ilości pozostałych towarów nie ulegną zmianie.

Definicja 1.22.
Krańcową stopą substytucji i-tego towaru przez j-y towar ($i \neq j$) nazywamy wyrażenie:

$$R_{ij}(\overline{x}) = \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} : \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j}.$$

Krańcowa stopa substytucji i-tego towaru przez j-y towar informuje, o ile (w przybliżeniu) należy zwiększyć w koszyku $\overline{x}$ ilość j-ego towaru przy zmniejszeniu ilości i-tego towaru o jednostkę, aby użyteczność koszyka nie uległa zmianie.

Z układu (1.4) wynika, że dla koszyka optymalnego zachodzi:

$\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i}\big|_{\overline{x}=\overline{x}^0} = \lambda^0 p_i$ oraz $\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j}\big|_{\overline{x}=\overline{x}^0} = \lambda^0 p_j$ dla dowolnych i, j.

Dzieląc obie równości stronami, otrzymujemy:

$$R_{ij}(\overline{x}^0) = \frac{p_i}{p_j}. \tag{1.5}$$

Równość (1.5) znana jest jako **drugie prawo Gossena** i oznacza, że w celu maksymalizacji funkcji użyteczności konsument wybiera taki koszyk towarów, w którym stosunki krańcowych użyteczności tych towarów są równe stosunkowi ich cen. Wynika stąd, że im wyższa jest cena towaru substytuowanego (p_i), tym wyższa jest także krańcowa stopa substytucji (przy założeniu niezmienności ceny p_j).

Definicja 1.23.
Elastycznością substytucji i-tego towaru przez j-y towar ($i \neq j$) nazywamy wyrażenie

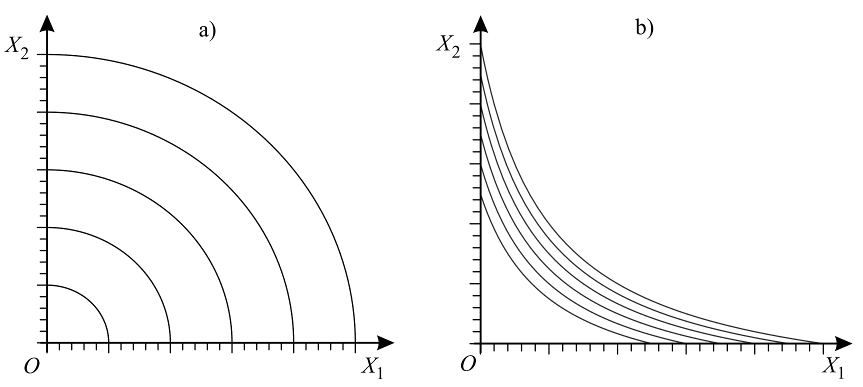
$$E_{ij}(\overline{x}) = \frac{E_i(\overline{x})}{E_j(\overline{x})} = \left(\frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_i} : \frac{\partial u(\overline{x})}{\partial x_j}\right) \cdot \frac{x_i}{x_j}.$$

Elastyczność substytucji i-tego towaru przez j-y towar informuje, o ile procent (w przybliżeniu) należy zwiększyć w koszyku $\overline{x}$ ilość j-ego towaru przy zmniejszeniu ilości i-tego towaru o jeden procent, aby użyteczność tego koszyka nie uległa zmianie.

1.6. Przykłady z rozwiązaniami

Przykład 1.1.
Dana jest przestrzeń towarów $\mathbb{R}^2_+$ oraz dwie relacje preferencji konsumenta zdefiniowane następująco:
a) $\overline{x} \succsim \overline{y} \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geqslant y_1^2 + y_2^2$,
b) $\overline{x} \succsim \overline{y} \Leftrightarrow \sqrt{(x_1+1)(x_2+1)} \geqslant \sqrt{(y_1+1)(y_2+1)}$.
Dla powyższych relacji narysować krzywe obojętności oraz wskazać koszyki M-preferowane w zbiorach:
$M_1 = \{\overline{x} = [x_1, x_2] : \ 0 \leqslant x_1 \leqslant A, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant B\}$, gdzie A i B są pewnymi stałymi,
$M_2 = \{\overline{x} = [x_1, x_2] : \ x_1, \ x_2 \ \geqslant 0 \ \wedge \ \overline{p} \circ \overline{x} \leqslant I\}$, gdzie $p_1 = 1, \ p_2 = 2, \ I = 3$.

Rozwiązanie. Ustalmy koszyk $\overline{x}^s = [x_1^s, x_2^s]$, dla którego wyznaczymy przechodzącą przez niego krzywą (powierzchnię) obojętności. Dla relacji (a) przyjmijmy $c := (x_1^s)^2 + (x_2^s)^2$. Wówczas koszyki $\overline{x} = [x_1, x_2]$ i $\overline{x}^s$ są indyferentne, jeśli $(x_1)^2 + (x_2)^2 = c$. A zatem krzywą obojętności zawierającą koszyk $\overline{x}^s$ jest okrąg o środku w punkcie $[0, 0]$ i promieniu $\sqrt{c}$, ograniczony do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych. Zmieniając początkowy koszyk $\overline{x}^s$ (a więc i parametr c), otrzymujemy kolejne krzywe obojętności (zob. rys. 1.1a).



Rysunek 1.1. Przykładowe krzywe obojętności

Źródło: opracowanie własne.

Podobnie wyznaczamy krzywe obojętności dla relacji (b), zauważając, że każdą z nich tworzą koszyki $\overline{x} = [x_1, x_2]$ spełniające równanie:

$$\sqrt{(x_1+1)(x_2+1)} = c, \quad \text{gdzie } c = \sqrt{(x_1^s+1)(x_2^s+1)}.$$

W celu wyznaczenia koszyków M-preferowanych należy w układzie OX_1X_2 narysować zbiory M_1 i M_2, a następnie nanieść na nie wyznaczone uprzednio krzywe obojętności. Dla relacji (a) otrzymujemy rysunek 1.2.