Spis treści

KLIKNIJ NA INTERESUJĄCY CIĘ TEMAT

Drodzy Studenci i Wykładowcy!

Skrypt Tomasza Nowaka to pozycja skierowana do wszystkich, którzy mają kłopoty z ekonometrią i badaniami operacyjnymi. Praca ma charakter na tyle uniwersalny, że może z niej korzystać każdy, niezależnie od uczelni i kierunku, na jakich studiuje lub wykłada.

Sposób prezentacji zagadnień ściśle koresponduje z zamierzonym celem, jakim jest przygotowanie czytelnika do samodzielnego rozwiązywania zadań pojawiających się na kolokwiach zaliczeniowych i egzaminach. Jest to publikacja dydaktyczna, a nie naukowa, autor ogranicza więc wstępy teoretyczne do niezbędnego minimum. Towarzyszy natomiast czytelnikowi przy żmudnych obliczeniach, podczas których mogłoby się okazać, że brakuje jakiejś elementarnej wiedzy lub umiejętności matematycznych.

Skrypt został napisany swobodną ręką, język jest prosty, można rzec studencki, a dodatkowym urozmaiceniem są zabawne rysunki, niekiedy nawiązujące do treści zadań. Zastosowano w nim także najnowsze metody przedstawiania graficznego, co sprawia, że trudno znaleźć na rynku pozycję, która prezentuje zadania (szczególnie z zakresu badań operacyjnych) w równie precyzyjny sposób.

Wydawca

1. Wyznaczanie i weryfikacja modeli ekonometrycznych

1.1. Model liniowy

Podstawową sprawą podczas rozwiązywania konkretnego zadania jest określenie postaci modelu ekonometrycznego, który najczęściej jest podany w zadaniu. Następnie należy sprowadzić go do postaci liniowej, jeżeli oczywiście nie jest on liniowy i o ile jest to możliwe. Trzeba też zastosować odpowiednią metodę wyznaczania parametrów. My będziemy korzystać z metody najmniejszych kwadratów.
Załóżmy, że mamy model w postaci:

$\mathbf{Y = X \cdot b \,/ \cdot X^T}$ (lewostronnie)
$\mathbf{X^TY = X^TX \cdot b \,/\, (X^TX)^{-1}}$
$\mathbf{(X^TX)^{-1}\, X^TY = b}$, czyli
$\mathbf{b = (X^TX)^{-1}\, X^TY}$

Jest to podstawowy wzór macierzowy do wyznaczenia parametrów modelu klasyczną metodą najmniejszych kwadratów.

Przykład 1

Badano zależność pomiędzy liczbą napojów chłodzących sprzedanych w małym sklepie spożywczym w pewnej nadmorskiej miejscowości a temperaturą powietrza. Uzyskano wyniki. Wiadomo, że zależność między nimi jest liniowa.

Temp. w ^oC X	**Sprzedaż w szt. Y**	**Y^2**	**XY**	**X^2**
25	250	62 500	6 250	625
30	350	122 500	10 500	900
31	400	160 000	12 400	961
26	270	72 900	7 020	676
25	240	57 600	6 000	625
16	100	10 000	1 600	256
20	180	32 400	3 600	400
$\sum X = 173$	$\sum Y = 1\,790$	$\sum Y^2 = 517\,900$	$\sum XY = 47\,370$	$\sum X^2 = 4\,443$

Polecenia:

a) Wyznaczyć liniowy model ekonometryczny.
b) Dokonać weryfikacji merytorycznej.
c) Dokonać weryfikacji statystycznej, czyli policzyć dopasowanie modelu do obserwacji, zbadać jego zmienność i sprawdzić istotność parametru.
d) Dokonać prognozy sprzedaży napojów chłodzących, jeżeli przewiduje się, że temperatura powietrza przyjmie wartość 29,5^{o}C.

Rozwiązanie:

a)

Do wyznaczenia tego modelu trzeba oznaczyć zmienne. Musimy się zastanowić, co od czego zależy. W treści zadania jest powiedziane, że badano zależność liczby sprzedanych napojów od temperatury. Zmienna objaśniana (czyli Y, zmienna zależna) jest zawsze przed słowem „od”, a zmienna objaśniająca (czyli X, zmienna niezależna) po słowie „od”.
U nas jest więc tak:
– temperatura to X,
– liczba sprzedanych napojów to Y.

Model będzie zatem wyglądał następująco:

$$Y = \beta_1 X + \beta_0 + \xi$$

Ten ostatni element można pominąć (będziemy tak robić w kolejnych zadaniach):

$$Y = \beta_1 X + \beta_0$$

Jest to model hipotetyczny. Jeżeli zastąpimy β-ty literami parametrów, uzyskamy model ekonometryczny przed oszacowaniem:

$$Y = b_1 X + b_0$$

Do wyznaczenia parametrów b_1 i b_0 zastosujemy metodę najmniejszych kwadratów i znany już wzór:

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Musimy teraz wprowadzić pojęcie tabelki cross.

	Y	**X**	**1**
Y			
X			
1			

Pierwszą kolumnę oraz pierwszy wiersz oznaczamy jako Y, ponieważ w naszym modelu ($Y = b_1X + b_0$) Y jest na pierwszym miejscu.

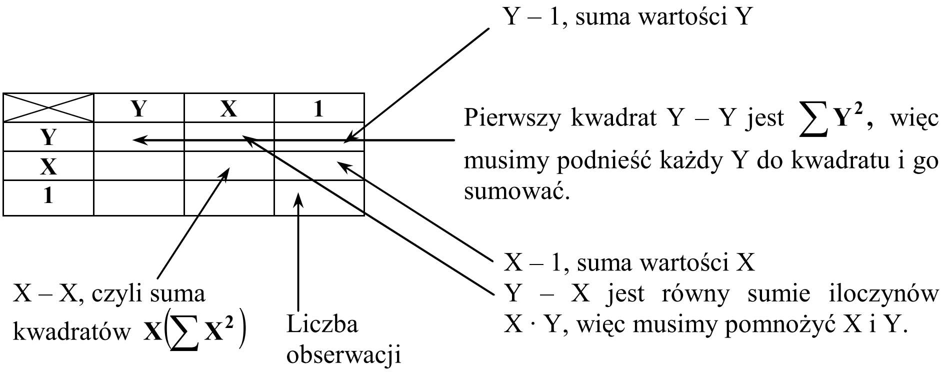
Jedynka reprezentuje tu zmienną tożsamościowo równą 1. Jest to zmienna związana z wyrazem wolnym. W naszym modelu wyraz wolny był na końcu, więc w tabeli cross liczba 1 też jest na końcu (czasami zamiast 1 pisze się const.).

Drugą kolumną i drugim wierszem jest X, ponieważ w naszym modelu X jest na drugim miejscu.

Gdyby $Y = b_0 + b_1X$, to tabelka cross wyglądałaby jak poniżej:

	Y	**1**	**X**
Y			
1			
X			

Teraz musimy ją wypełnić:



Możemy już wypełnić tabelkę cross. Poszczególne sumy zostały wyliczone w tabeli początkowej.

	Y	Y	1
Y	517 900	47 370	1 790
Y	47 370	4 443	173
1	1 790	173	7

ta część to X^TY ta część to X^TX

Zauważmy, że Y – 1 jest równy 1 – Y, zatem nie trzeba zliczać wszystkich kwadratów. Podobnie X – 1 i 1 – X oraz X – Y i Y – X.

Aby użyć wzoru $b = (X^TX)^{-1} X^TY$, musimy jeszcze odwrócić X^TX.
Znany jest wzór:

$$\mathbf{(X^TX)^{-1} = \frac{1}{\det X^TX} \cdot A^D},$$

gdzie $\det X^TX$ to wyznacznik macierzy X^TX, a A^D to macierz transponowana dopełnień algebraicznych.
Potrzebne dane znajdziemy w tabeli cross, czyli

$$X^TX = \begin{bmatrix} 4\,443 & 173 \\ 173 & 7 \end{bmatrix}$$

Można udowodnić poniższe twierdzenie.

Twierdzenie:

Jeżeli macierz jest kwadratowa w postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, to macierz dopełnień algebraicznych A^D ma postać: $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.