ROZDZIAŁ 6

RÓWNANIA WIELOMIANOWE

6 Równania wielomianowe

Równaniem·wielomianowym·nazywamy·równanie·postaci¶

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$¶

Innymi słowy, równanie wielomianowe to nic innego jak suma jednomianów przyrównana do 0. Równanie wielomianowe czasem bardzo trudno jest obliczyć i trzeba użyć do niego wielu metod. W tym miejscu chciałabym wymienić kilka metod rozwiązywania równań wielomianowych m z czego pierwsze 3 obowiązują uczniów po gimnazjum, natomiast ostatnia uczniów po podstawówce:

- wyciąganie czynnika przed nawias
- metoda grupowania
- dzielenie wielomianów

Zacznijmy po kolei omawiać metody. Przyłóż się do tego tematu bo dotychczas zadanie z równania wielomianowego było zawsze jako jedno z zadań otwartych na maturze !

6.1 Metoda wyłączania czynnika przed nawias

Metodę wyłączania czynnika przed nawias wykorzystujemy, gdy mamy do czynienia z wielomianem, w którym każdy element ma x. Wówczas możemy go wyłączyć przed nawias i przedstawić wielomian jako iloczyn dwóch elementów: wyłączonego x i nawiasu. Wtedy każdy z elementów możemy przyrównać do 0 tworząc dwa osobne równania. Pokażę to na przykładzie.

$$x^3 + 2x^2 + x = 0$$

Jak widzimy możemy tutaj wyłączyć x przed nawias. Otrzymamy wówczas:

$$x(x^2 + 2x + 1) = 0$$

Mnożenie dwóch elementów jest równe 0 wtedy i tylko wtedy kiedy któryś z elementów przez które mnożymy jest zerem, czyli:

$$x = 0 \quad lub \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

W przypadku pierwszego równania mamy jasność, drugie musimy rozwiązać korzystając z delty.

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Mamy zatem jedno rozwiązanie:

$$x_0 = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1$$

Nasze równanie wielomianowe ma zatem 2 rozwiązania: x=0 oraz x=-1.

Spróbujmy na jeszcze jednym przykładzie:

$$x^5 + 5x^4 + 6x^3 = 0$$

W tym przypadku możemy wyłączyć wyższą potęgę x przed nawias, bo możemy wyłączyć aż x^3.

$$x^3(x^2 + 5x + 6) = 0$$

Otrzymujemy zatem dwa osobne równania:

$$x^3 = 0 \quad lub \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

Zacznijmy od pierwszego równania :

$$x^3 = 0 \ \backslash \sqrt[3]{\ }$$

$$x = 0$$

Drugie równanie ponownie wymaga obliczenia delty:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

Mamy tu zatem 2 rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-5+1}{2 \cdot 1} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-5-1}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3$$

Nasze równanie ma zatem aż trzy rozwiązania: x=0, x=-2, x=-3.

6.2 Metoda grupowania

Metoda grupowania jest troszkę trudniejsza, lecz po zrozumieniu jej zasad działa bardzo intuicyjnie. Na maturze podstawowej korzystamy z niej kiedy mamy parzystą ilość elementów w sumie i nie możemy nic wyłączyć przed nawias. Aby rozwiązać równanie metodą grupowania należy podzielić naszą sumę na 2 części i z każdej z nich wyciągnąć maksymalnie dużo przed nawias tak, aby w nawiasach zostało to samo. Najlepiej wytłumaczyć daną metodę na przykładzie:

Zadanie (matura maj 2010, zadanie 27):

$$x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$$

Dzielimy nasze równanie na 2 grupy:

$$\underline{x^3 - 7x^2}\ \underline{-4x + 28} = 0$$

Wyciągamy maksymalnie dużo przed nawias z grupy pierwszej oraz drugiej:

$$x^2(x-7) - 4(x-7) = 0$$

Zauważmy, że z drugiej grupy przed nawias wyciągamy -4, zatem aby iloczyn był dodatni i wynosił 28, musimy w nawiasie mieć liczbę ujemną ponieważ tylko $- \cdot - = +$. Jak widzimy teraz w nawiasach występuje dokładnie to samo. Spróbujemy zatem wyciągnąć nasz nawias przed nawias.

$$x^2\underline{(x-7)} - 4\underline{(x-7)} = 0$$

Zauważmy, że jak wyciągniemy **x-7** z pierwszego elementu to pozostanie nam x^2, natomiast jak wyciągniemy to z drugiego elementu zostanie **-4** Otrzymujemy zatem:

$$(x-7)(x^2-4)=0$$

Dzielimy równanie na 2 osobne (podobna sytuacja jak w metodzie wyciągania przed nawias):

$$x-7=0 \qquad\qquad x^2-4=0$$

Z pierwszego równania wychodzi nam, że x=7. Z drugiego równania:

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4$$

Musimy się zastanowić co podniesione do kwadratu da nam 4, zatem

$$x=2\; oraz\; x=-2.$$

Nasze równanie ma zatem 3 rozwiązania: **x=7, x=-2** oraz **x=2**.

Zróbmy jeszcze jeden przykład. Zanim opanujecie tą metodę trzeba będzie zrobić wiele przykładów. Pamiętajcie, że jeżeli w nawiasach nie pojawia wam się to samo, to coś jest źle ;)

Zadanie (matura sierpień 2010, zadanie 27).

Rozwiąż równanie:

$$x^3-3x^2+2x-6=0$$

$$\underline{x^3-3x^2}+\underline{2x-6}=0$$
$$x^2\underline{(x-3)}+2\underline{(x-3)}=0$$
$$(x-3)(x^2+2)=0$$
$$x-3=0 \qquad x^2+2=0$$
$$x=3 \qquad x^2=-2$$
$$\textit{sprzeczne}$$

Możemy zastanawiać się, czy cokolwiek podniesione do kwadratu da nam -2, ale to równanie sprzeczne! Nigdy nie otrzymamy liczby ujemnej w wyniku potęgi parzystego stopnia !

Zatem tutaj nasze równanie ma tyko jedno rozwiązanie: x=3.

Tu w tym miejscu umieścimy równania wielomianowe dla osób, które są po gimnazjum. Oczywiście obowiązują również one osoby po podstawówce, z tym, że niestety, te drugie osoby mają trochę więcej materiału na podstawie.

6.3 ZADANIA: RÓWNANIA WIELOMIANOWE

Zadanie 1. (matura czerwiec 2015, zadanie 27).

Rozwiąż równanie:

$$x(x^2 - 2x + 3) = 0$$

Zadanie 2. (matura maj 2016, zadanie 28).

Rozwiąż równanie:

$$(4 - x)(x^2 + 2x - 15) = 0$$

Zadanie 3. (matura sierpień 2017, zadanie 27).

Rozwiąż równanie:

$$(x^2 - 6)(3x + 2) = 0$$

Zadanie 4. (matura próbna grudzień 2014, zadanie 3).

Rozwiązaniami równania:

$$(x^3 - 8)(x - 5)(2x + 1) = 0$$

są liczby:

$A. -8;\ -5;\ 1$ $\quad B. -1; 5; 8$ $\quad C. -\frac{1}{2};\ 2; 5$ $\quad D. -\frac{1}{2}; 2; 8$

Zadanie 5.

Rozwiąż równanie:

$$(x^2 - 5x + 6)(x - 1)(x + 3) = 0$$

Zadanie 6.

Rozwiąż równanie:

$$(x - 8)(x^2 - 4)(x^3 - 8) = 0$$

Zadanie 7. (matura maj 2019, zadanie 26)

Rozwiąż równanie:

$$x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = 0$$

Zadanie 8. (matura czerwiec 2020, zadanie 27).

Rozwiąż równanie:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2x) = 0$$

6.4 Rozwiązania

Zadanie 1.

$$x(x^2 - 2x + 3) = 0$$

Rozpatrujemy 2 osobne równania:

$$x = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

W pierwszym mamy jasność, zabieramy się za drugie:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

$$\Delta < 0$$

Brak rozwiązań z równania kwadratowego, zatem jedynym rozwiązaniem jest x=0.

Zadanie 2.

Ponownie rozpatrujemy 2 przypadki:

$$4 - x = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Z pierwszego:

$$4 - x = 0$$

$$-x = -4 \quad \backslash\cdot(-1)$$

$$x = 4$$

Z drugiego:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{-2+8}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-2-8}{2 \cdot 1} = -\frac{10}{2} = -5$$

Mamy zatem 3 rozwiązania:

Odpowiedź: x=4, x=3 oraz **x=-5**.

Zadanie 3.

Rozpatrujemy 2 równania:

$$x^2 - 6 = 0 \qquad 3x + 2 = 0$$

Pierwsze równanie:

$$x^2 = 6$$

Co podniesione do kwadratu da nam 6?

$$x = \sqrt{6} \quad i \quad x = -\sqrt{6}$$

Drugie równanie:

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2 \ \backslash : 3$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Mamy zatem 3 rozwiązania:

Odpowiedź: $\boldsymbol{x = \sqrt{6}}$, $\boldsymbol{x = -\sqrt{6}}$, $\boldsymbol{x = -\frac{2}{3}}$.

Zadanie 4.

Rozpatrujemy 3 równania:

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1 \quad \backslash : 2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Odpowiedź: C.

Zadanie 5.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x - 1 = 0 \qquad x + 3 = 0$$

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-5) - 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2) $x - 1 = 0$

$$x = 1$$

3) $x + 3 = 0$

$$x = -3$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są x=2, x=3, x=1 oraz x=-3.

Zadanie 6.

Rozpatrujemy trzy równania:

1) $x - 8 = 0$
2) $x^2 - 4 = 0$
3) $x^3 - 8 = 0$

1. $x - 8 = 0$

$$x = 8$$

2. $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \; lub \; x = -2$$

3. $x^3 - 8 = 0$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są x=2, x=-2.

Zadanie 7.

Łączymy po 2 elementy i z nich wyciągamy maksymalnie dużo przed nawias:

$$x^2(x - 5) - 9(x - 5) = 0$$

Wyciągamy (x-5) przed całość otrzymując:

$$(x - 5)(x^2 - 9) = 0$$

Teraz rozpatrujemy 2 równania:

1) $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$
2) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9$

$$x = 3 \; lub \; x = -3$$

Odpowiedź: Mamy 3 rozwiązania: x=5, x=3 i x=-3.

Zadanie 8.

Rozpatrujemy dwa przypadki:

1) $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad lub \; x = -1$$

2) $x^2 - 2x = 0$

Wyciągamy x przed nawias lub rozwiązujemy deltą. Ja wyłączę x przed nawias.

$$x(x-2) = 0$$

Zatem:

$$x = 0 \; lub \; x - 2 = 0$$

Naszymi rozwiązaniami są zatem:

Odpowiedź: x=1, x=-1, x=0, x=2.

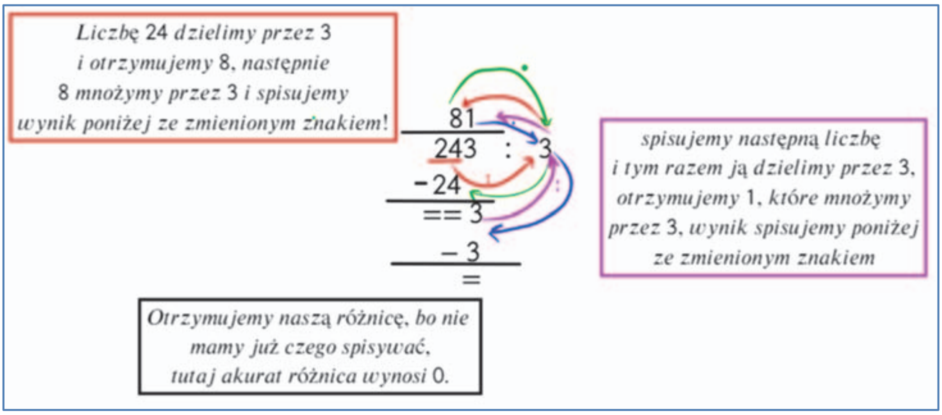
6.5 Dzielenie wielomianów

> **Dzielenie wielomianów wygląda bardzo podobnie jak dzielenie pisemne liczb. Wykonujemy cały czas ten sam schemat aż do otrzymania reszty lub też do braku reszty.**

Jeżeli już wcześniej miałeś „pod górkę" z dzieleniem pisemnym przedstawię tutaj jeszcze jedną alternatywną metodę dzielenia wielomianów, czyli schemat Hornera. Jest on wyjątkowo korzystny dla osób z dysleksją lub dysgrafią. Zacznijmy jednak od dzielenia pisemnego.

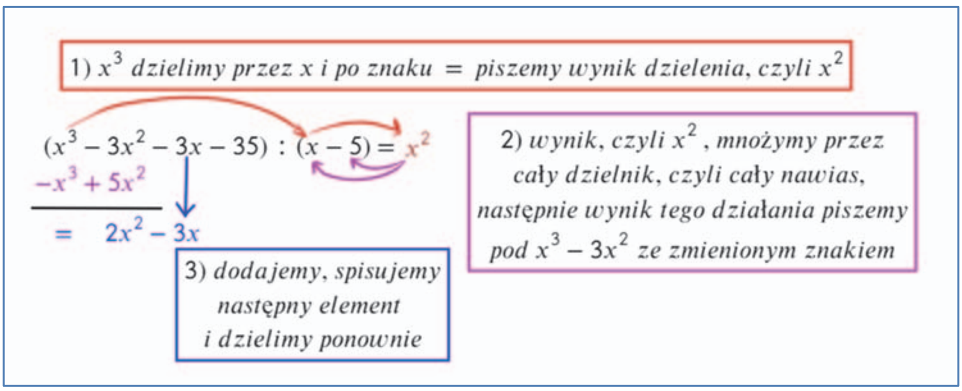
6.6 Dzielenie pisemne wielomianów

W przypadku dzielenia pisemnego liczb schemat wyglądał następująco:

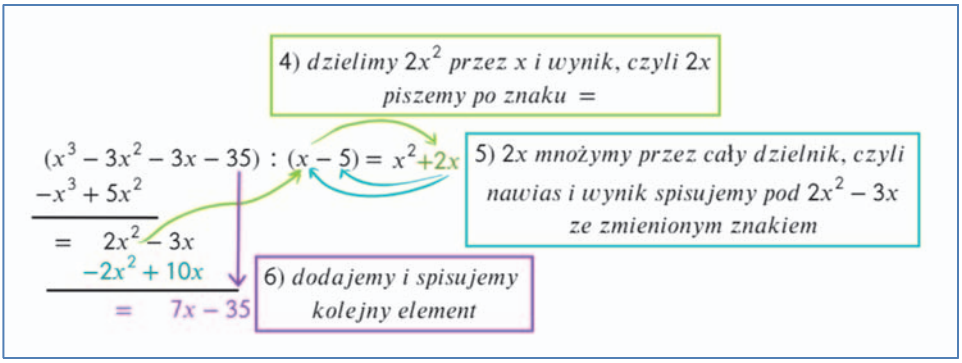


Rysunek 6.1 Schemat dzielenia pisemnego

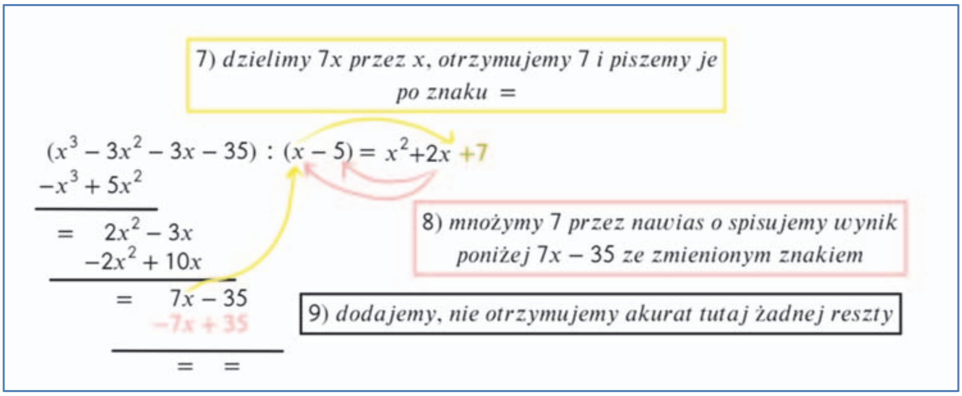
Dzielenie pisemne liczb na egzaminie maturalnym nie ma żadnego sensu, gdyż możemy mieć na nim kalkulator, natomiast identyczny schemat wykorzystamy w dzieleniu wielomianów. Spróbujemy wytłumaczyć to na przykładzie dzielenia wielomianu: $\boldsymbol{x^3 - 3x^2 - 3x - 35}$ przez wielomian $\boldsymbol{x - 5}$.



Rysunek 6.2 Schemat dzielenia pisemnego



Rysunek 6.3 Schemat dzielenia pisemnego



Rysunek 6.4 Schemat dzielenia pisemnego

W tym przypadku nie wyszła nam żadna reszta z dzielenia, zatem możemy powiedzieć, że :

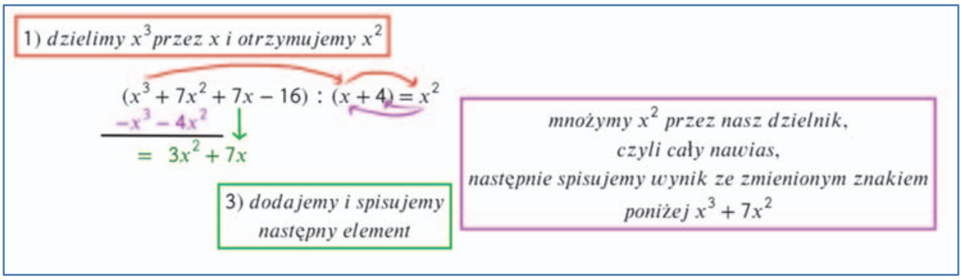
$$(x^3 - 3x^2 - 3x - 35):(x - 5) = x^2 + 2x + 7$$

Dla pewności możemy zrobić sprawdzenie mnożąc nasz wynik z dzielenia przez dzielnik, czyli:

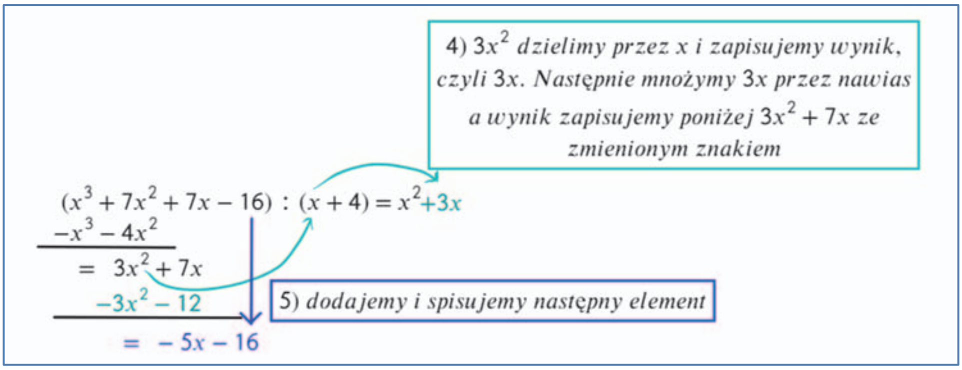
$$(x - 5)(x^2 + 2x + 7) = x^3 + 2x^2 + 7x - 5x^2 - 10x - 35 =$$
$$= x^3 - 3x^2 - 3x - 35$$

Wyszedł nam dokładnie ten sam wielomian, którego dzieliliśmy, zatem rozwiązanie jest poprawne.

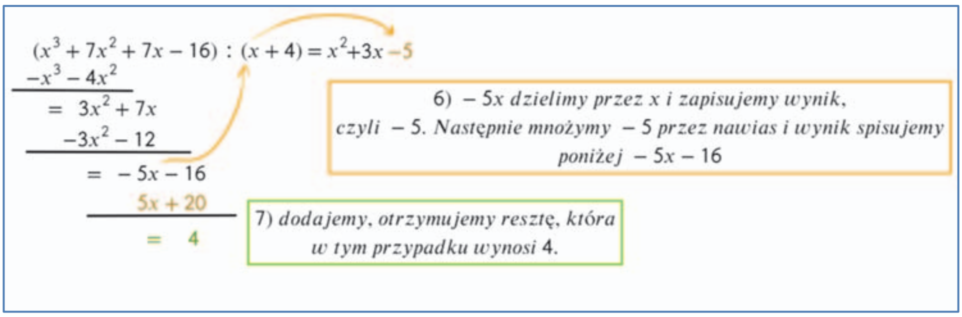
Spróbujmy inny przykład zrobić. Tym razem podzielimy wielomian: $\boldsymbol{w(x) = x^3 + 7x^2 + 7x - 16}$ przez wielomian**:** $\boldsymbol{x + 4}$.



Rysunek 6.5 Schemat dzielenia pisemnego



Rysunek 6.6 Schemat dzielenia pisemnego



Rysunek 6.7 Schemat dzielenia pisemnego

Możemy zatem powiedzieć, że wielomian w(x) dzielony przez dwumian (x+4) daje resztę 4. Skoro dzielenie dało nam resztę, to oznacza, podobnie jak w liczbach, że wielomian niestety nie jest podzielny przez (x+4). Wielomian w(x) możemy zapisać jako:

$$x^3 + 7x^2 + 7x - 16 = (x - 4)(x^2 + 3x - 5) + 4$$

Oprócz mnożenia wyniku, który nam powstał i dzielnika, musimy pamiętać o reszcie która pozostała. Zaznaczona została ona w naszym wielomianie na żółto.

6.7 Pierwiastek całkowity wielomianu

W przypadku wielomianów, których wszystkie współczynniki znajdujące się przy odpowiednich potęgach x, mamy takie twierdzenie, które mówi nam o tym, że pierwiastkiem całkowitym wielomianu jest dzielnik wyrazu wolnego wielomianu. Liczba będzie wielomianem, gdy podstawiając ją pod x do wzoru wielomianu w wyniku otrzymamy 0.

Weźmy przykład: wielomian: $\boldsymbol{W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$.

Szukamy dzielników wyrazu wolnego, czyli w tym przypadku -1. Pamiętajmy, że interesują nas dzielniki całkowite, więc uwzględniamy zarówno dzielniki ujemne jak i dodatnie. Oznaczymy je jako p. Jedynym dzielnikiem -1 jest 1 i -1 zatem $p \in \{\pm 1\}$.

Sprawdźmy zatem, czy wielomian od -1 lub 1 jest równy 0.

$$W(-1) = (-1)^3 - 3 * (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1 = -1 - 3 * 1 - 3 - 1$$
$$= -1 - 3 - 3 - 1 = -8 \neq 0$$

Sprawdzamy zatem nasz drugi możliwy pierwiastek, czyli 1.

$$W(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

Zatem możemy powiedzieć, że 1 jest pierwiastkiem wielomianu a co za tym idzie, nasz wielomian W(x) będzie podzielny przez x-a, gdzie a jest pierwiastkiem wielomianu, czyli x-1. Wykonujemy dzielenie pisemne.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-x^3 + x^2} \\
= \ -2x^2 + 3x \\
\quad \underline{2x^2 - 2x} \\
\qquad = \quad x - 1 \\
\qquad\quad \underline{-x + 1} \\
\qquad\quad = \quad =
\end{array}
$$

Wynikiem dzielenia jest kolejny wielomian, tutaj akurat trójmian kwadratowy. Aby obliczyć jego pierwiastki liczymy deltę.

6.7.1.1.1.1 $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

Mamy zatem jeden pierwiastek:

$$x_0 = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

Nasz wielomian ma zatem 1 pierwiastek: x=1.

Weźmy inny przykład wielomianu i spróbujmy znaleźć jego pierwiastek.

$$W(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 3$$

$$p \in \{\pm 1. \pm 3\}$$

$$W(1) = 2 * 1^3 + 4 * 1^2 - 3 - 3 = 2 + 4 - 3 - 3 = 0$$

Ponownie dzielnikiem wielomianu okazuje się x=1, zatem nasz wielomian musi być podzielny przez x-1. Wykonujemy dzielenie jak w poprzednich tematach i otrzymujemy trójmian kwadratowy. Liczymy zatem deltę, miejsca zerowe i koniec zadania. Spróbuj dokończyć je sam.

6.8 Równania wymierne

Równania wymierne to równania, w których w mianowniku występuje x. Przykładami równań wymiernych mogą być: $\mathbf{\frac{2}{x} - 3 = 9}$ lub $\mathbf{\frac{x-3}{x+2} = 6}$ itd.

Zaczynając obliczać rozwiązanie takiego równania, należy zacząć od wyznaczenia dziedziny, czyli wyznaczenia dla jakich x równanie ma sens. Pewnie wiele razy słyszeliście wierszyk, którego na potrzeby szkoły i tej książki lekko ocenzuruje:

Pamiętaj kolego, nigdy nie dziel przez zero !!!

Kreska ułamkowa to inaczej znak dzielenia, zatem możemy powiedzieć, że to co jest w mianowniku odpowiada temu, przez co dzielimy. Zatem zawsze chcąc obliczać równanie wymierne zaczynamy od ustalenia dziedziny czyli napisania $mianownik \neq 0$. Takie równanie, mimo że znak = jest przekreślony liczymy dokładnie tak samo jak każde inne, czyli doprowadzamy do postaci $x \neq \cdots$. Przeanalizujmy ten krok na jakimś przykładzie. Załóżmy, że mamy równanie:

$$\frac{x-3}{x+2} = 3$$

Wiemy, że nasz mianownik nie może się równać 0, zatem otrzymujemy:

$$x + 2 \neq 0$$

Przerzucamy 2 na drugą stronę ze zmienionym znakiem i otrzymujemy:

$$x \neq -2.$$

Zatem można powiedzieć, że naszą dziedziną jest dowolny x oprócz x=-2. Możemy też zapisać $x \in R\backslash\{-2\}$.

Najszybszą metodą rozwiązywania równań wymiernych jest tzw. metoda „na krzyż”. Załóżmy, że mamy rozwiązać równanie podane powyżej. Wówczas warto zapisać je sobie w nieco inny sposób tzn.: $\boldsymbol{\frac{x-3}{x+2} = \frac{3}{1}}$. Mnożąc dane równanie na krzyż otrzymamy :

$$(x-3) \cdot 1 = (x+2) \cdot 3$$

Wykonujemy działania i wyliczamy x.

$$x - 3 = 3x + 6$$

$$x - 3x = 6 + 3$$

$$-2x = 9 \quad \backslash : (-2)$$

$x = -\frac{9}{2}$ lub jak kto woli $x = -4{,}5$.

Rozwiązanie jest zgodne z dziedziną, ponieważ z niej wynika, że x nie mógł być równy tylko -2, zatem to koniec naszego równania.

Zadanie (matura sierpień 2012, zadanie 11).

Równanie $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0$ ma

A. Dokładnie jedno rozwiązanie
B. Dokładnie dwa rozwiązania
C. Dokładnie trzy rozwiązania
D. Dokładnie cztery rozwiązania

Tradycyjnie zaczynamy od dziedziny:

$$(x-3)(x+2) \neq 0$$

$$x-3 \neq 0 \quad oraz\, x+2 \neq 0$$

$$x \neq 3 \quad oraz\, x \neq -2$$

Zatem naszą dziedziną są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem x =3 i x=-2, możemy to zapisać jako $x \in R \setminus \{3, -2\}$. Przechodzimy do naszego równania:

$$\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+2)} = 0 \setminus \cdot\ (x-3)(x+2)$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3 = 0\ lub\ x-2 = 0$$

$$x = -3\ \ lub\ x = 2$$

Mamy zatem 2 rozwiązania i oba są zgodne z dziedziną funkcji.

Odpowiedź: B.

6.9 ZADANIA: RÓWNANIA WYMIERNE

Zadanie 1. (matura sierpień 2014, zadanie 6).

Rozwiązaniem równania**:** $\frac{x-5}{7-x} = \frac{1}{3}$ jest liczba:

$A. -11$ $B. \frac{11}{2}$ $C. \frac{2}{11}$ $D. 11$

Zadanie 2. (matura maj 2015, zadanie 7)

Rozwiązaniem równania: $\frac{2x-4}{3-x} = \frac{4}{3}$ jest liczba :

$A. x = 0$ $B. x = \frac{12}{5}$ $C. x = 2$ $D. x = \frac{25}{11}$

Zadanie 3. (matura maj 2015, zadanie 7).

Równanie: $\frac{x-1}{x+1} = x - 1$

A. Ma dokładnie jedno rozwiązanie x=1
B. Ma dokładnie jedno rozwiązanie x=0
C. Ma dokładnie jedno rozwiązanie x=-1
D. Ma dokładnie dwa rozwiązania x=0, x=1

Zadanie 4.

Rozwiązaniem równania: $\frac{x-7}{x} = 5, gdzie\ x \neq 0$, jest liczba należąca do przedziału :

$A. (-\infty, -2)$ $B. < -2, -1)$ $C. < -1,0)$ $D. (0, \infty)$

Zadanie 5. (matura sierpień 2015, zadanie 26).

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$, gdzie $x \neq 0\ i\ x \neq 2$.

6.10 SPRAWDŹ SIĘ! ZESKANUJ KOD I ZRÓB QUIZZ!

SCAN ME

6.11 Rozwiązania

Zadanie 1.

$$\frac{x-5}{7-x}=\frac{1}{3}$$

$$3(x-5)=1(7-x)$$

$$3x-15=7-x$$

$$4x=22\backslash:4$$

$$x=\frac{22}{4}$$

$$x=\frac{11}{2}$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 2.

$$\frac{2x-4}{3-x}=\frac{4}{3}$$

$$3(2x-4)=4(3-x)$$

$$6x-12=12-4x$$

$$6x+4x=12+12$$

$$10x=24$$

$$x=\frac{24}{10}$$

$$x=\frac{12}{5}$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 3.

$$\frac{x-1}{x+1} = x - 1$$

$$D: x + 1 \neq 0\,,$$

$$x \neq -1$$

$$x - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$x - 1 = x^2 - 1$$

$$x - 1 - x^2 + 1 = 0$$

$$-x^2 + x = 0$$

$$x(-x+1) = 0$$

$$x = 0 \quad lub \quad -x + 1 = 0$$

$$x = 1$$

Z dziedziny wynikało, że $\boldsymbol{x \neq -1}$ zatem oba rozwiązania które nam wyszły są poprawne.

Odpowiedź: D

Zadanie 4.

$$D: x \neq 0$$

$$\frac{x-7}{x} = 5 \backslash \cdot x$$

$$x - 7 = 5x$$

$$x - 5x = 7$$

$$-4x = 7 \backslash : (-4)$$

$$x = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$$

Odpowiedź: B.

Zadanie 5.

$$x \neq 0 \ i \ 2x - 4 \neq 0$$

$$2x \neq 4$$

$$x \neq 2$$

$$D: x \in R \quad \backslash\{0,2\}$$

Mnożymy równanie na krzyż:

$$(2x - 4)(2x - 4) = x \cdot x$$

$$4x^2 - 8x - 8x + 16 = x^2$$

Przerzucamy na jedną stronę i przyrównujemy do 0.

$$3x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 256 - 192 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{16 - 8}{2 \cdot 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{16 + 8}{6} = \frac{24}{6} = 4$$