

# e-Matematyka wspomagająca ekonomię

Krzysztof Piasecki  
Marcin Anholcer  
Krzysztof Echaust

Wydawnictwo C.H. Beck 

e-Matematyka  
wspomagająca  
ekonomię

## Autorzy:

**Krzysztof Piasecki** wprowadzenie, 1; 2; 4; 5; 6; 7.1–7.3; 7.4\*;  
7.5; 8.1; 8.2; 9.2; 11\*; 12.3\*; 13.2\*; 14; 15; 17; 19.1; 19,2;  
19,3\*; 22.1–22.5; 22.6\*; 23

**Marcin Anholcer** 3; 7.6; 8.3; 9.1; 10; 11\*; 20; 21

**Krzysztof Echaust** 7.4\*; 12.1; 12.2; 12.3\*; 12.4; 12.5; 13.1;  
13.2\*; 13.3–13.9; 16; 18; 19,3\*; 22.6\*

\* współautorstwo

# e-Matematyka wspomagająca ekonomię

Krzysztof Piasecki  
Marcin Anholcer  
Krzysztof Echaust



WYDAWNICTWO C.H. BECK  
WARSZAWA 2013

Wydawca: Dorota Ostrowska-Furmanek  
Redakcja merytoryczna: Krystyna Knap  
Recenzent: prof. dr hab. Tadeusz Trzaskalik  
Projekt okładki i stron tytułowych: Maryna Wiśniewska  
Ilustracja na okładce: ©MarkEvans/iStockphoto

Seria: Metody ilościowe


Złożono programem  $\text{\TeX}$



© Wydawnictwo C.H. Beck 2013

Wydawnictwo C.H. Beck Sp. z o.o.  
ul. Bonifraterska 17, 00-203 Warszawa

Skład i łamanie: Wydawnictwo C.H. Beck  
Druk i oprawa: Totem, Inowrocław

ISBN 978-83-255-5313-5  
 e-book 978-83-255-5314-2

# Spis treści

<b>Przedmowa</b> . . . . .	1
<b>Wprowadzenie – implementacja języka WolframAlpha</b> . . . . .	5
<b>Rozdział 1. Logika matematyczna</b> . . . . .	10
1.1. Podstawy logiki . . . . .	10
1.2. Twierdzenia . . . . .	16
1.3. Reguły wnioskowania . . . . .	19
1.4. Funkcje zdaniowe . . . . .	20
1.5. Równania i nierówności . . . . .	25
<b>Rozdział 2. Wstęp do matematyki</b> . . . . .	31
2.1. Algebra zbiorów . . . . .	31
2.2. Produkt kartezjański . . . . .	39
2.3. Funkcje . . . . .	41
2.4. Ciągi . . . . .	44
2.5. Tablice . . . . .	46
2.6. Algebraiczne działania wielokrotne . . . . .	47
2.7. Liczebność zbiorów skończenie elementowych . . . . .	49
2.8. Elementy kombinatoryki . . . . .	51
<b>Rozdział 3. Grafy i digrafy</b> . . . . .	56
3.1. Grafy . . . . .	56
3.2. Digrafy . . . . .	60
3.3. Podgrafy i spójność . . . . .	63
3.4. Szczególne typy grafów i digrafów . . . . .	70
<b>Rozdział 4. Relacje</b> . . . . .	75
4.1. Relacje – istota, określenie i formy opisu . . . . .	75
4.2. Własności relacji . . . . .	78
4.3. Działania na relacjach . . . . .	80
4.4. Funkcja w świetle teorii relacji . . . . .	83
<b>Rozdział 5. Zastosowania relacji w ekonomii</b> . . . . .	86
5.1. Relacja równoważności . . . . .	86
5.2. Relacje porządkujące . . . . .	89
5.3. Optymalizacja . . . . .	93
<b>Rozdział 6. Podstawy algebry liniowej</b> . . . . .	98
6.1. Algebra macierzy . . . . .	98
6.2. Przestrzeń wektorowa . . . . .	106

<b>Rozdział 7. Instrumenty algebry liniowej</b>	115
7.1. Przekształcenia elementarne macierzy	115
7.2. Rząd macierzy	120
7.3. Macierz odwrotna	123
7.4. Określoność macierzy symetrycznej	128
7.5. Wyznacznik	130
7.6. Instrumentalne zastosowania wyznacznika	140
<b>Rozdział 8. Układy warunków liniowych</b>	145
8.1. Układy równań liniowych	147
8.2. Układy nierówności liniowych	160
8.3. Zastosowania wyznacznika do rozwiązywania układów równań liniowych	168
<b>Rozdział 9. Zastosowania algebry liniowej w ekonomii</b>	171
9.1. Programowanie liniowe	171
9.1.1. Zagadnienie optymalnego asortymentu produkcji	177
9.1.2. Zagadnienie diety	178
9.1.3. Problem maksymalnego przepływu	180
9.1.4. Problem przepływu o minimalnym koszcie	184
9.2. Model Leontiewa	189
<b>Rozdział 10. Zaawansowane zagadnienia algebry</b>	193
10.1. Liczby zespolone	193
10.2. Rozwiązywanie wybranych typów równań nieliniowych	198
10.3. Układy równań nieliniowych	203
<b>Rozdział 11. Ciągi i szeregi liczbowe</b>	209
11.1. Podstawowe własności i rodzaje ciągów	209
11.2. Granice ciągów	212
11.3. Szeregi liczbowe	221
<b>Rozdział 12. Funkcja jednej zmiennej</b>	225
12.1. Podstawowe pojęcia	225
12.2. Elementarne funkcje jednej zmiennej	231
12.3. Granica funkcji	241
12.4. Ciągłość funkcji	246
12.5. Asymptoty funkcji	247
<b>Rozdział 13. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej</b>	252
13.1. Podstawy rachunku różniczkowego	252
13.2. Różniczka funkcji	259
13.3. Reguła de l'Hospitala	262
13.4. Badanie monotoniczności funkcji	265
13.5. Badanie wypukłości funkcji	266
13.6. Poszukiwanie ekstremów lokalnych funkcji	267
13.7. Poszukiwanie punktów przegięcia funkcji	272
13.8. Ekstrema globalne funkcji na przedziale domkniętym	273
13.9. Badanie przebiegu zmienności funkcji	275
<b>Rozdział 14. Zastosowanie teorii funkcji jednej zmiennej w ekonomii</b>	282
14.1. Podstawy rachunku marginalnego	282
14.2. Modele kosztu	287
14.3. Zmienność cenowa popytu i podaży	289

14.4. Zmienność dochodowa popytu . . . . .	290
14.5. Analiza trendu . . . . .	293
<b>Rozdział 15. Elementy matematyki finansowej . . . . .</b>	<b>299</b>
15.1. Istota i podstawowe pojęcia matematyki finansowej . . . . .	299
15.2. Wartość przyszła . . . . .	301
15.3. Wartość bieżąca . . . . .	309
15.4. Wartość bieżąca netto . . . . .	312
15.5. Wewnętrzna stopa zwrotu . . . . .	317
15.6. Umarzanie kredytu . . . . .	320
<b>Rozdział 16. Analiza funkcji wielu zmiennych . . . . .</b>	<b>325</b>
16.1. Funkcje wielu zmiennych – podstawowe pojęcia . . . . .	325
16.2. Pojęcie granicy i ciągłości funkcji wielu zmiennych . . . . .	329
16.3. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych . . . . .	330
16.4. Różniczka zupełna funkcji wielu zmiennych . . . . .	337
16.5. Funkcje uwikłane . . . . .	339
16.6. Badanie monotoniczności funkcji wielu zmiennych . . . . .	343
16.7. Badanie wypukłości funkcji wielu zmiennych . . . . .	344
16.8. Poszukiwanie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych . . . . .	346
16.9. Ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych . . . . .	349
<b>Rozdział 17. Zastosowanie teorii funkcji wielu zmiennych w ekonomii . . . . .</b>	<b>362</b>
17.1. Modele ekonomiczne dane jako funkcja wielu zmiennych . . . . .	362
17.2. Rachunek marginalny . . . . .	365
17.3. Krzywe obojętności i substytucji . . . . .	368
<b>Rozdział 18. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej . . . . .</b>	<b>373</b>
18.1. Całka nieoznaczona . . . . .	373
18.1.1. Całkowanie elementarne . . . . .	375
18.1.2. Całkowanie przez podstawienie . . . . .	375
18.1.3. Całkowanie przez części . . . . .	377
18.2. Całka oznaczona . . . . .	379
18.3. Całki niewłaściwe . . . . .	384
18.4. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej . . . . .	389
<b>Rozdział 19. Zastosowanie całek w ekonomii . . . . .</b>	<b>393</b>
19.1. Kapitalizacja ciągła . . . . .	393
19.2. Dyskonto procesu dochodów . . . . .	395
19.3. Nadwyżka konsumenta i producenta . . . . .	397
<b>Rozdział 20. Równania różnicowe . . . . .</b>	<b>401</b>
20.1. Wybrane typy równań i sposoby ich rozwiązywania . . . . .	401
20.1.1. Jednorodne liniowe równania różnicowe rzędu 1 . . . . .	402
20.1.2. Jednorodne liniowe równania różnicowe rzędu 2 . . . . .	402
20.1.3. Jednorodne liniowe równania różnicowe rzędu $k$ . . . . .	404
20.2. Zagadnienie początkowe . . . . .	405
20.3. Wybrane zastosowania równań różnicowych w ekonomii . . . . .	407
<b>Rozdział 21. Równania różniczkowe . . . . .</b>	<b>410</b>
21.1. Wybrane typy równań i metody ich rozwiązywania . . . . .	410
21.1.1. Równania o zmiennych rozdzielonych . . . . .	411
21.1.2. Równania o podstawieniu liniowym . . . . .	412



21.1.3. Równania jednorodne . . . . .	414
21.2. Zagadnienie początkowe . . . . .	415
21.3. Wybrane zastosowania równań różniczkowych w ekonomii . . . . .	416
<b>Rozdział 22. Rachunek prawdopodobieństwa . . . . .</b>	<b>420</b>
22.1. Prawdopodobieństwo – istota i ewolucja pojęcia . . . . .	420
22.2. Aksjomatyczna teoria prawdopodobieństwa . . . . .	426
22.3. Prawdopodobieństwo warunkowe – istota i pojęcie . . . . .	430
22.4. Wnioskowanie bayesowskie . . . . .	432
22.5. Zmienna losowa . . . . .	438
22.6. Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa . . . . .	445
22.6.1. Rozkład dwupunktowy . . . . .	446
22.6.2. Rozkład dwumianowy . . . . .	447
22.6.3. Rozkład geometryczny . . . . .	449
22.6.4. Rozkład Poissona . . . . .	450
22.6.5. Rozkład jednostajny . . . . .	451
22.6.6. Rozkład prostokątny . . . . .	452
22.6.7. Rozkład trójkątny . . . . .	452
22.6.8. Rozkład wykładniczy . . . . .	453
22.6.9. Rozkład normalny . . . . .	455
22.6.10. Rozkład logarytmiczno-normalny . . . . .	457
22.6.11. Rozkład chi-kwadrat . . . . .	459
22.6.12. Rozkład t-Studenta . . . . .	461
22.6.13. Rozkład F Snedecora . . . . .	462
22.6.14. Rozkład Cauchy’go . . . . .	464
22.6.15. Rozkład Pareto . . . . .	465
22.6.16. Rozkład beta . . . . .	467
<b>Rozdział 23. Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa w ekonomii . . . . .</b>	<b>470</b>
23.1. Całkowanie metodą Monte Carlo . . . . .	470
23.2. Prawdopodobieństwo subiektywne . . . . .	472
23.3. Probabilistyczny model decyzyjny . . . . .	474
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>479</b>
<b>Indeks rzeczowy . . . . .</b>	<b>481</b>

## Przedmowa

W 1994 roku ukazał się zredagowany przeze mnie podręcznik „Matematyka wspomagająca zarządzanie”. Tytuł tej książki nawiązywał do głoszonej przez autorów tezy, że matematyka co prawda jest jedna, ale każdy z kierunków studiów ekonomicznych wymaga odrębnego wyboru nauczanych treści matematycznych. My nasz podręcznik dedykowaliśmy studentom kierunków studiów związanych z dyscypliną zarządzanie.

Podręcznik ten do tej pory towarzyszył wykładom z matematyki przedstawianym początkowo jedynie studentom kierunku studiów zarządzanie. Stopniowo grono jego użytkowników poszerzyło się o słuchaczy kierunków studiów związanych z dyscyplinami ekonomia i finanse. Dzięki temu mogło się do tej pory ukazać sześć wydań tego podręcznika: dwa w prywatnym wydawnictwie Akademia i cztery w Wydawnictwie AE/UE w Poznaniu.

Poszerzenie merytorycznego profilu osób korzystających z tego podręcznika skutkowało między innymi tym, że dawał się odczuć brak tych działów matematyki, które powinni znać przyszli ekonomiści i finansiści. Ta niedogodność zachęciła do przygotowania nowego, bardziej uniwersalnego podręcznika do nauki matematyki. Prezentowany podręcznik jest dedykowany studentom kierunków ogólnoeconomicznych, finansowych i zarządczych.

Z pełną premedytacją podręcznika tego nie adresujemy do studentów kierunków studiów typu „Informatyka i ekonometria”. Specyfika kształcenia na tych kierunkach wymusza podniesienie złożoności matematycznej przekazywanych treści nauczania do poziomu trudnego do zaakceptowania przez studentów pozostałych kierunków ekonomicznych. Tak wysokie wymagania należy stawiać jedynie przed przyszłymi twórcami narzędzi formalnych stosowanych w ekonomii. Tym, którzy te narzędzia będą jedynie stosowali, wystarczy mniejszy zasób wiedzy matematycznej.

Z oczywistych względów książki tej nie adresujemy też do studentów warsztatów. Ten kierunek studiów wymaga całkowicie odmiennej wiedzy matematycznej nawiązującej do przyrodznawstwa.

Do rąk czytelników oddajemy książkę obszerną. Ta objętość wynika z zamiaru równoczesnego umieszczenia w niej treści odpowiadających odmiennym potrzebom poszczególnych kierunków studiów. Książka jest podręcznikiem adresowanym głównie do studentów studiów licencjackich kierunków związanych z dyscyplinami: ekonomia, zarządzanie i finanse. Część prezentowanych tre-

ści jest, zdaniem autorów, wspólna dla wszystkich wymienionych kierunków. Dodatkowo uwzględniono treści unikatowe dla poszczególnych kierunków. Wielokrotnie stawiamy też do wyboru rodzaj instrumentów formalnych służących do rozwiązania postawionych zagadnień. W oparciu o zaprezentowane tutaj treści można przygotować wiele różnych programów nauczania. Zadanie to pozostawiamy poszczególnym wykładowcom. Wszystko to powiększa grono odbiorców, do których jest adresowana książka.

Głównym założeniem książki jest prezentacja matematyki jako języka opisu zagadnień ekonomicznych, zarządczych i finansowych. W tym celu wykład został pomyślany jako nierozzerwalny splot dwóch wątków. Pierwszy z nich jest poświęcony instrumentarium matematycznemu i porządkuje równocześnie sekwencje rozdziałów zgrupowanych wokół wybranych teorii matematycznych. Obszerny wątek aplikacyjny został wprowadzony w przekonaniu, że taka forma prezentacji instrumentarium matematycznego stanowi warunek konieczny dla pozytywnej percepcji proponowanych metod matematycznych. Omówienie możliwości zastosowań matematyki w ekonomii dostosowano do poziomu erudycji ekonomicznej studentów pierwszego roku. Identyczne idee przyświecały autorom podręcznika „Matematyka wspomagająca zarządzanie”. Dla podkreślenia faktu kontynuacji tej idei, tytuł prezentowanej książki w oczywisty sposób nawiązuje do tytułu tamtego podręcznika.

Prezentowana książka nie jest jedynie prostym poszerzeniem treści nauczania. Na jej kształcie odcisnął swój znak także czas niosący w minionym dwudziestolecu wielkie zmiany.

Od paru lat obserwujemy wyraźną zmianę profilu wykształcenia absolwentów szkół średnich. Autorzy nie mieli tutaj wyboru i musieli dostosować się do tych zmian. Dostrzec jednak można pewne pozytywne efekty zmiany profilu wykształcenia kandydatów na studia, gdyż dzięki tym zmianom nie musimy już przełamywać pewnych nawyków wynoszonych przez studentów ze szkoły średniej. Autorzy skwapliwie z tej możliwości skorzystali.

Drugą ważną zmianą jest postępująca szybko informatyzacja naszego dnia powszedniego. Proces ten wymaga także zmiany środków i celów kształcenia matematycznego. I bynajmniej nie chodzi tutaj wcale o e-dydaktykę<sup>1</sup>.

Wszyscy przywykliśmy już do poszukiwania potrzebnej wiedzy w Internecie. Robimy to także w odniesieniu do wiedzy matematycznej. Będzie to łatwiejsze, jeśli nasi studenci będą władać międzynarodowym językiem matematycznym. Stąd cały podręcznik został napisany w języku formalnym, stosowanym przez ogół korzystających z matematyki mieszkańców naszej planety. Dzięki temu treści zawarte w książce mogą być bezpośrednio rozszerzone o treści zawarte na platformach internetowych (np. Wikipedia).

Postępująca informatyzacja dostarcza nam wszystkim łatwo dostępnym narzędzi informatycznych. W chwili obecnej dużym ułatwieniem w stosowaniu

---

<sup>1</sup> ang. *e-learning*

matematyki jest możliwość posługiwania się właściwym oprogramowaniem matematycznym. Nasza książka jest adresowana do takich studentów i absolwentów, którzy matematykę w ekonomii stosują jedynie sporadycznie. W tej sytuacji istotnym ograniczeniem możliwości wykorzystania tutaj wyspecjalizowanych programów komputerowych jest wysoka cena wielu z nich. W praktyce możliwości stosowania programów komputerowych ograniczają się do korzystania z arkusza kalkulacyjnego EXCEL i otwartych portali typu „knowledge engine”. W tej sytuacji wszystkie treści matematyczne prezentowane w tej książce zostały zilustrowane możliwościami zastosowania arkusza EXCEL i portalu WolframAlpha do rozwiązywania postawionych tam problemów. Portal WolframAlpha dostępny jest nawet na ekranach smartfonów. W książce przedstawiony jest język lineary matematyki pozwalający opisać problem matematyczny jedynie przy zastosowaniu klawiatury QWERTY telefonu komórkowego.

Informatyzacja obliczeń w praktyczny sposób zniosła wszystkie utrudnienia związane z wysoką złożonością analityczną i obliczeniową zadań matematyki. Poprawne skorzystanie z tych możliwości wymaga jednak opanowania innych umiejętności formalnych przedstawionych w podręczniku. W dydaktyce matematyki należy przenieść nacisk z kształtowania kompetencji „wykonywanie skomplikowanych obliczeń” na rzecz kształtowania kompetencji „zarządzanie skomplikowanymi obliczeniami”. Nie ma większego zagrożenia dla poprawnych zastosowań matematyki, niż nieznająca matematyki osoba wykonująca biegle obliczenia. Doświadczenie podpowiada, że nigdy w takim wypadku nie wiadomo, czy poprawnie został zidentyfikowany model matematyczny służący rozwiązaniu postawionego zadania i czy biegle przeprowadzone obliczenia odpowiadają wybranemu modelowi matematycznemu. Stąd w proponowanym podręczniku kształtowanie umiejętności kalkulacyjnych zostało ograniczone do przypadków prostych zadań, których rozwiązanie przybliży i pozwoli zrozumieć istotę problemu matematycznego. Pozostałe, bardziej skomplikowane obliczenia możemy już ze zrozumieniem wykonać na ekranach naszych urządzeń. Dlatego tytuł książki sygnalizuje, że rzecz będzie o e-matematyce.

Wspomniana już łatwość wykonywania obliczeń rodzi potrzebę poprawnego zarządzania tymi obliczeniami. Z tej przyczyny duży nacisk w książce położono na:

- doskonalenie umiejętności precyzyjnego formułowania i rozwiązywania problemów;
- podstawowe reguły wnioskowania normatywnego i wnioskowania bayesowskiego;
- wnioskowanie dedukcyjne.

Realizacja tych wszystkich celów dydaktycznych jest zorientowana na kształtowanie u studentów dwóch głównych kompetencji:

- biegłego stosowania matematyki do rozwiązywania wszystkich zadań stawianych na innych przedmiotach z zakresu szeroko rozumianej ekonomii ilościowej;

– w trakcie pracy zespołowej zdolności komunikowania się z ekspertem stosującym do rozwiązania postawionego problemu narzędzia matematyczne.

Zaproponowana formuła e-matematyki jest próbą sprostania wyzwaniom stawianym przez zmieniające się otoczenie. Mnie udało się do tej pory przejść szlak od liczydła w szkole podstawowej poprzez suwak logarytmiczny i kręciołek<sup>2</sup> na studiach aż do smartfona dzisiaj. Idąc tą drogą, zauważyłem jedno:

*Kolejne ułatwienia w stosowaniu matematyki wymagają coraz większej jej znajomości.*

Opublikowanie książki nie jest możliwe bez zaufania okazanego przez wydawcę. Pani redaktor Dorocie Ostrowskiej-Furmanek dziękuję za okazane zaufanie. Książkę oddaję w Państwa ręce

*Marysław Piasecki*

Bnin, 24.03.2013

---

<sup>2</sup> Kalkulator mechaniczny z napędem ręcznym

## Wprowadzenie – implementacja języka WolframAlpha

Każdą spójną logicznie metodę zapisu problemów matematycznych w jednym wierszu nazywamy językiem linearnym matematyki. Portal WolframAlpha jest przykładem cybernetycznego poliglota, gdyż można się z nim kontaktować we wszystkich powszechnie znanych językach linearnych matematyki. Każdy z tych języków dokonuje interpretacji w sposób określony przez jego reguły interpretacyjne zgodne z uniwersalnymi regułami matematyki. Portal WolframAlpha jest bardzo tolerancyjny, gdyż dopuszcza komunikaty zapisane w języku łamanym, składającym się ze słów pochodzących z różnych języków linearnych. Przy interpretacji takich poleceń kieruje się własnym zestawem reguł interpretacyjnych i czasami zgłasza gotowość rozwiązania zadania innego niż zadania rozwiązywane przez osobę użytkującą ten portal. Jedynym sposobem ominięcia tych trudności jest posługiwanie się językiem o sprawdzonych interpretacjach. Przyswojenie takiego języka przebiega normalną drogą i zawsze zaczyna się od posługiwania się prostym językiem składającym się z niewielu słów. Później, w miarę podnoszenia swoich kwalifikacji matematycznych i językowych, każdy użytkownik WolframAlpha może ten język wzbogacać o dalsze słowa i zwroty. Taka jest naturalna kolej rzeczy przy nauce każdego języka.

Poniżej została przedstawiona propozycja takiego języka. Jest to język w swej składni nawiązujący do języka stosowanego w programie Mathematica<sup>®</sup>. Wybór ten jest uzasadniony przypuszczeniem, że kolejnym etapem po korzystaniu z portalu WolframAlpha jest stosowanie programu Mathematica<sup>®</sup>. Tak też przypuszcza właściciel portalu WolframAlpha będący równocześnie producentem programu Mathematica<sup>®</sup>.

Ewolucja stosowanego języka rozpoczyna się na ogół od prostych modyfikacji. Wprowadzając te modyfikacje, trzeba pamiętać między innymi, że:

W zaproponowanym języku zastępowanie dużych liter przez małe w ogólnym przypadku jest niedopuszczalne.

W ułamku dziesiętnym część całkowitą od części ułamkowej oddziela kropka.

Z drugiej strony, w pełni dopuszczalne jest zastosowanie następującej modyfikacji.

Nawiasy kwadratowe [ ] zawsze mogą zostać zastąpione przez okrągłe ( ) i odwrotnie.

Symbole określające poszczególne działania arytmetyczne na dowolnych liczbach zostały przedstawione w tabeli W.1. W arytmetyce rozpowszechniony jest zwyczaj pomijania znaku mnożenia pomiędzy mnożonymi zmiennymi. Kulturowanie tego zwyczaju w przypadku portalu WolframAlpha prowadzi czasami do trudności z identyfikacją zapisu działań arytmetycznych. Wynika stąd kolejne ograniczenie dla zaproponowanego języka.

Nigdy nie pomijamy znaku mnożenia \*.

W przypadku stosowania dowolnego języka linearnego obowiązują wspólne reguły arytmetyki liczb. Określają one w jednoznaczny sposób kolejność działań arytmetycznych.

**Kolejność wykonywania działań arytmetycznych:**

- 1) obliczanie wartości funkcji,
- 2) działania w nawiasach,
- 3) podnoszenie do potęgi,
- 4) mnożenia i dzielenia jako działania równorzędne,
- 5) dodawania i odejmowania jako działania równorzędne.

W przypadku wielokrotnych działań równoważnych opisanych w punktach 3) i 4) wykonuje je się w kolejności od lewej do prawej. Kolejność ta ma istotne znaczenie w przypadku, kiedy pojawiają się dzielenia.

W przypadku wielokrotnego potęgowania potęgujemy w kolejności od prawej do lewej.

**Przykład W.1.** Poniższe polecenia wykonujemy w następujący sposób:

$$(\text{Cos}[\text{Pi}] + 3)^2 + 2 * 3 * 4$$


$$(\cos \pi + 3)^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = (-1 + 3)^2 + 6 \cdot 4 = 2^2 + 24 = 4 + 24 = 28,$$

$$2^3^4$$

$$2^{3^4} = 2^{81} = 2417851639229258349412352,$$

$$10/5*2$$

$$10 : 5 \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4. \quad \square$$

W poniższej tabeli przedstawiono wszystkie te symbole i polecenia, które znajdują zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów matematycznych opisanych w tej książce. W pewnych sytuacjach, ze względu na złożoność opisu, musieliśmy się jedynie odwołać do odpowiednich stron podręcznika. Każde polecenie zapisujemy w linii poleceń przedstawionych na rysunku W.1 i zatwierdzamy poprzez naciśnięcie przycisku .



Rysunek W.1.

Tabela W.1.

Znaczenie	Symbol/komenda	Przykład	Interpretacja przykładu
alternatywa		p  q	$p \vee q$
asymptoty	Asymptotes[F[x]]	Asymptotes[1/x]	
arcus tangens	Atan[x]	Atan[1]	arctg 1
całka nieoznaczona	int F[x]dx	int (2x+x^(1/2))/x^2dx	$\int \frac{2x+\sqrt{x}}{x^2} dx$
całka oznaczona	int F[x]dx from a to b	int x^2*Log[x]dx from 1 to E	$\int_1^e x^2 \ln x dx$
cosinus	Cos[x]	Cos[Pi/2]	$\cos \frac{\pi}{2}$
cotangens	Cot[x]	Cot[Pi/3]	$\text{ctg} \frac{\pi}{3}$
digraf	str. 60		
dodawanie liczb	+	a+b	$a + b$
dodawanie macierzy	+	({1,2},{3,4})+ ({5,6},{7,8})	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$
druga pochodna	D[D[F[x],x],x]	D[D[x^2+5*x,x],x]	$(x^2 + 5 \cdot x)''$
druga pochodna	(F[x])''	(x^2+5*x)''	$(x^2 + 5 \cdot x)''$
druga pochodna w punkcie	D[D[F[x],x],x] for x=a	D[D[F[x],x],x] for x=3	$F''(3)$
dziedzina funkcji	Domain[F[x] ]	Domain[Sqrt[x]]	
dzielenie liczb	/	a/b	$a : b$
funkcja wykładnicza	Exp[x]	Exp[4]	$e^4$
graf	str. 56		
granica	limF[x],x->c	limx^2,x->3	$\lim_{x \rightarrow 3} x^2$
granica lewostronna	limF[x],x->c-	limx^2,x->3-	$\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2$
granica lewostronna	limF[x],x->Inf	limx^2,x->Inf	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$
granica prawostronna	limF[x],x->c+	limx^2,x->3+	$\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2$
granica prawostronna	limF[x],x->-Inf	limx^2,x->-Inf	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2$
Iloczyn skalarowy <sup>1</sup>	*	(1,2)*(2,4)	$(1;2) \circ (3;4)$
implikacja	=>	p=>q	$p \implies q$
koniunkcja	&&	p&&q	$p \wedge q$
liczba Neppera	E		$e$
liczba pi	Pi		$\pi$
liniowa niezależność	Linearindependence[ ]	Linearindependence [(1,2), (3,4)]	
logarytm naturalny	Log[x]	Log[12]	$\ln 12$

<sup>1</sup> Miałem to szczęście, że matematyki nauczyli mnie lwowscy profesorowie. Tłumaczyli nam zawsze, że właściwym dla języka polskiego jest słowo „skalarowy”.



logarytm z dowolną podstawą	Log[a,x]	Log[2,12]	$\log_2 12$
macierz	str. 101	({1,2,3},{4,5,6})	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
macierz jednostkowa	IdentityMatrix[n]	IdentityMatrix[2]	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
macierz odwrotna	Inverse[A]	Inverse({1,2},{3,4})	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$
macierz transponowana	Transpose[A]	Transpose[({1,2,3},{4,5,6})]	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T$
maksimum globalne	Max F[x] from a to b	Max x^2 from 1 to 2	$\max_{1 \leq x \leq 2} x^2$
metoda eliminacji Gaussa-Jordana	Rowreduce[A]	Rowreduce[({1,2,3},{4,5,6})]	
miejsca zerowe funkcji	Roots[F[x]]	Roots[Sqrt[x]]	
minimum globalne	Min F[x] from a to b	Min x^2 from 1 to 2	$\min_{1 \leq x \leq 2} x^2$
„mniejsze niż”	<	a<b	$a < b$
„mniejsze równe niż”	<=	a<=b	$a \leq b$
mnożenie liczb	*	a*b	$a \cdot b$
mnożenie macierzy	*	({1,2},{3,4})*({5,6},{7,8})	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$
mnożenie macierzy przez liczbę	str. 102	2*({1,2,3},{4,5,6})	$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
negacja	!	!p	$\neg p$
nieskończoność	Inf		$\infty$
odejmowanie liczb	-	a-b	$a - b$
pierwiastek kwadratowy	Sqrt[x]	Sqrt[x+6]	$\sqrt{x+6}$
pochodna	D[F[x],x]	D[x^2+5*x],x]	$(x^2 + 5 \cdot x)'$
pochodna	(F[x])'	(x^2+5*x)'	$(x^2 + 5 \cdot x)'$
pochodna cząstkowa	D[F[x,...,z],x]	D[x*z*y, x]	$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y \cdot z)$
pochodna cząstkowa II rzędu	D[D[F[x,...,z],x],y]	D[D[x*z*y, x],z]	$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}(x \cdot y \cdot z)$
pochodna w punkcie	D[F[x],x] for x=a	D[F[x],x] for x=3	$F'(3)$
pole pomiędzy krzywymi	area between y=F[x],y=G[x],...y=H[x]	area between y=2*x,y=x^2	

potęgowanie liczb	$\wedge$	$a^b$	$a^b$
„równa się”	$=$	$a=b$	$a = b$
równoważność	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	$p \iff q$
„różne”	$\neq$	$a \neq b$	$a \neq b$
rzęd macierzy	Rank[A]	Rank[{{1,2,3}, {4,5,6}}]	
silnia	Fact[n]	Fact[5]	5!
sinus	Sin[x]	Sin[Pi/2]	$\sin \frac{\pi}{2}$
szereg	Sum[a(n), {n,m}]	Sum[n^2, {n,5}]	$\sum_{n=1}^5 n^2$
symbol Newtona	Bin[n,k]	Bin[10,2]	$\binom{10}{2}$
tangens	Tan[x]	Tan[Pi/4]	$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
tautologia	TautologyQ[ ]	TautologyQ[p=>!p]	str. 13
wartość bezwzględna	Abs[x]	Abs[x]	$ x $
wartość bieżąca	present value	str. 309	
wartość bieżąca netto	net present value	str. 312	
wartość funkcji	F[x]	Sin[x]	$\sin x$
wartość przyszła	future value	str.301	
wektor	str. 106	(1,2,3)	$(1, 2, 3)^T$
wewnętrzna stopa zwrotu	internal rate of return	str. 317	
„większe niż”	$>$	$a > b$	$a > b$
„większe równe niż”	$\geq$	$a \geq b$	$a \geq b$
wykres funkcji	Plot F[x]	Plot x^3	
wykres funkcji w przedziale	Plot F[x] from a to b	Plot x^3 from -1 to 2	
wyraz ciągu	a(n)	a(12)	$a_{12}$
wyznacznik macierzy	Det[A]	Det({1,2},{3,4})	$\det \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)$
zbiór wartości funkcji	Range[F[x]]	Range[Sqrt[x]]	

Dalszych inspiracji do doskonalenia zaproponowanego języka należy szukać przede wszystkim w podręcznikach programu Mathematica® .

# Rozdział 1. Logika matematyczna

## 1.1. Podstawy logiki

**Stwierdzeniem** w logice nazywamy dowolne zdanie twierdzące opisujące właściwości dowolnych, zdefiniowanych uprzednio, obiektów. Wynika z tego, że żadna definicja nie jest stwierdzeniem. Szczególnym przypadkiem stwierdzeń są stwierdzenia porównujące liczby i zmienne. Stwierdzenia te nazywamy porównaniami ilościowymi. Najczęściej stosowane porównania ilościowe zostały przedstawione w tabeli 1.1. Tam też przedstawiono implementację WOLFRAM i implementację EXCEL tych porównań. Implementacje kolejnych istotnych z punktu widzenia matematyki stwierdzeń będą podane tam, gdzie te stwierdzenia zostaną opisane.

**Tabela 1.1.** Porównania ilościowe i ich implementacje programowe

Porównanie	Objaśnienie	WOLFRAM	EXCEL
$a = b$	<b>a</b> jest równe <b>b</b>	$a==b$	$a=b$
$a \neq b$	<b>a</b> jest różne od <b>b</b>	$a!=b$	$a<>b$
$a > b$	<b>a</b> jest większe od <b>b</b>	$a>b$	$a>b$
$a \geq b$	<b>a</b> jest większe równe <b>b</b>	$a>=b$	$a>=b$
$a < b$	<b>a</b> jest mniejsze od <b>b</b>	$a<b$	$a<b$
$a \leq b$	<b>a</b> jest mniejsze równe <b>b</b>	$a<=b$	$a<=b$

**Przykład 1.1.** W tabeli 1.2 przedstawiono przykłady stwierdzeń. W przypadku porównań ilościowych opisano tam także implementację. □

**Zdaniem** w logice nazywamy każde stwierdzenie, o którym można orzec, czy jest prawdziwe, czy też fałszywe. Sposób rozstrzygnięcia o prawdziwości lub fałszywości zdania stanowi przedmiot rozważań filozofii. Pośród wyrażań języka potocznego zdaniami mogą być jedynie zdania oznajmujące (np.: „Jan lubi banany”, „Warszawa jest stolicą Islandii”). Nie są zdaniami pytania, polecenia, prośby czy też wyrażenia ustalające pewne normy (np.: „Należy jeść banany”). Zdaniami nie są też prognozy (np.: „Jutro będzie padał deszcz”) oraz definicje (np.: „Tydzień kalendarzowy to kolejne dni od poniedziałku do niedzieli”).

**Tabela 1.2.** Przykłady stwierdzeń i ich implementacje

Pozycja	Stwierdzenie	WOLFRAM	EXCEL
a)	$3 = 4$	<code>3==4</code>	<code>3=4</code>
b)	$x + 3 \neq 5$	<code>x+3!=5</code>	<code>x+3&lt;&gt;5</code>
c)	$2 + 5 > 4$	<code>2+5&gt;4</code>	<code>2+5&gt;4</code>
d)	$6 \geq 10$	<code>6&gt;=10</code>	<code>6&gt;=10</code>
e)	$3 \in \{1; 2; 3; 4\}$		
f)	Warszawa jest stolicą Islandii		

Każdemu ze zdań prawdziwych przypisujemy wartość logiczną **PRAWDA**. Każdemu ze zdań fałszywych przypisujemy wartość logiczną **FAŁSZ**. W dalszych rozważaniach wartość **PRAWDA** oznaczać będziemy za pomocą symbolu **T**, a wartość **FAŁSZ** za pomocą symbolu **F**.

W wielu polskich podręcznikach matematyki wartość **PRAWDA** jest oznaczana za pomocą symbolu **1**, a wartość **FAŁSZ** za pomocą symbolu **0**. Jest to podejście różniące się od wspólnych międzynarodowych standardów dydaktycznych.

**Tabela 1.3.** Implementacja programowa wartości logicznych

Wartość logiczna	Logika	WOLFRAM	EXCEL *
<b>PRAWDA</b>	<b>T</b>	True	PRAWDA
<b>FAŁSZ</b>	<b>F</b>	False	FAŁSZ

\*W arkuszu EXCEL wartość logiczną wybranych zdań można ustalić, stosując podstawienie =P, gdzie symbol P oznacza oceniane zdanie.

**Przykład 1.2.** Stwierdzenie b) z przykładu 1.1 jest zdaniem. Pozostałe stwierdzenia są zdaniami. Zdania a), d) i f) są fałszywe, a więc przypisujemy im wartość logiczną **F**. Zdania c) i e) są zdaniami prawdziwymi, a więc przypisujemy im wartość logiczną **T**. W arkuszu kalkulacyjnym EXCEL wartość logiczną trzech pierwszych zdań można ustalić, stosując odpowiednio podstawienia:

$$=3=4$$

$$=2+5>4$$

$$=6>=10.$$

□

W logice podstawą do rozważań są zdania proste mające określoną wartość logiczną. W logice matematycznej poszczególne zdania proste oznaczać będziemy małymi literami, np.:  $p, q, r, s$  itp. Poszczególne zdania proste mogą być przekształcone lub połączone za pomocą spójników logicznych. Sposób tego przekształcenia może zostać opisany przy użyciu definicji właściwej lub definicji F–T. Uzyskane w ten sposób zdania nazywamy zdaniami złożonymi. Definicje F–T są jedynie równoważnym formalnym zapisem właściwej definicji. Definicje F–T zostały podane w tabeli 1.4.