

Konstanty Dmochowski



Czego nie znajdziesz w tablicach maturalnych z matematyki?

Wykaz najważniejszych faktów, zależności, wzorów

Autor: **Konstanty Dmochowski**

Korekta i redakcja: **Magdalena Bodek**

Projekt okładki: **Michał Bobrowski**

Skład i łamanie: **Sławomir Drachal, Konstanty Dmochowski**

Główny recenzent: **Paweł Mleczko, UAM w Poznaniu**

Copyright © by Konstanty Dmochowski

Poznań 2023

ISBN: 978-83-966226-2-4

**Wydanie pierwsze (e-book)**

Książka, którą nabyłaś(eś), jest zarówno dziełem Twórcy, jak i wydawcy - w wersji papierowej, jak i elektronicznej. Jej zawartość możesz wykorzystać w celach edukacyjnych, prowadząc zajęcia w szkołach, uczelniach, podczas szkoleń lub korepetycji, jednak wyraźnie przy tym zaznacz, skąd dane opracowanie pochodzi.

#### **Kontakt z Autorem:**

strona internetowa: [www.programtica.edu.pl](http://www.programtica.edu.pl)

e-mail: [kosti@programtica.edu.pl](mailto:kosti@programtica.edu.pl)

pomocniczy e-mail: [kondmo@gmail.com](mailto:kondmo@gmail.com)

#### **Wersja elektroniczna**



strona internetowa: [www.bookplan.pl](http://www.bookplan.pl)

e-mail: [info@bookplan.pl](mailto:info@bookplan.pl)

# Spis treści

Od autora . . . . .	7
---------------------	---

## Zanim zaczniemy

Jak korzystać z poniższej książki? . . . . .	11
Wykaz najważniejszych oznaczeń . . . . .	13

## I. Działy

1. Liczby i działania . . . . .	17
2. Logarytmy . . . . .	22
3. Ciągi . . . . .	24
4. Funkcje . . . . .	28
5. Funkcja liniowa . . . . .	38
6. Funkcja kwadratowa . . . . .	40
7. Wielomiany . . . . .	43
8. Geometria analityczna . . . . .	46
9. Planimetria . . . . .	48
10. Stereometria . . . . .	59
11. Trygonometria . . . . .	65
12. Rachunek prawdopodobieństwa . . . . .	68

## II. Zadania z rozwiązaniami

Zadania . . . . .	87
Odpowiedzi do zadań . . . . .	93
Szczegółowe rozwiązania . . . . .	95

## Dodatki

Brudnopis . . . . .	.131
Alfabet grecki . . . . .	.134
Tabela wartości funkcji trygonometrycznych . . . . .	.135
Bibliografia . . . . .	.138
Spis rysunków . . . . .	.139
Spis tabel . . . . .	.142
Skorowidz . . . . .	.143

Logarytmy są bardzo praktyczne. Dla przykładu są one stosowane w chemii, gdy chcemy zbadać skalę  $pH$  dla danej substancji, w akustyce przy pomiarze natężenia dźwięku, czy jego tłumieniu.

Przypomnimy wzory, które możemy znaleźć w tablicach matematycznych:

### Definicja logarytmu

Niech  $a > 0$  i  $a \neq 1$ . Logarytmem  $\log_a b$  liczby  $b > 0$  przy podstawie  $a$  nazywamy wykładnik  $c$  potęgi, do której należy podnieść  $a$ , aby otrzymać  $b$ :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$



Poza definicją, mamy także wymienione podstawowe własności:

### Własności logarytmu

Dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x > 0$ ,  $y > 0$  oraz  $r$  prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (2.1.)$$

$$\log_a \left( \frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y \quad (2.2.)$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x \quad (2.3.)$$



**Wzór na zamianę podstawy logarytmu**

Jeżeli  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$  oraz  $c > 0$ , to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$



Jak się okazuje, nie są to jedyne własności logarytmu, które przewijają się w zadaniach. Niekiedy pojawiają się też:

- Ciekawsze własności

Jeśli  $a > 0, a \neq 1, b > 0$  i  $s \neq 0$ , to:

$$\log_{a^s} b = \frac{1}{s} \log_a b$$

W połączeniu z zależnością (2.3.) uogólnieniem powyższej zależności jest następująca własność:

$$\log_{a^s} b^r = \frac{r}{s} \log_a b$$

Jeśli  $a, b > 0, a, b \neq 1$  i  $c > 0$ , to:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Łatwo tę ostatnią własność zapamiętać - jest to nic innego, jak wykorzystanie wzoru na zamianę podstaw i pomnożenie obustronnie tegoż wzoru przez wyrażenie  $\log_a b$  z lewej strony.

Z wielomianami poniekąd już się spotkaliśmy wcześniej - postaci funkcji liniowej i kwadratowej są najprostszym przykładem wielomianów. Tutaj głównie powiemy o bardziej zaawansowanych przypadkach.

- Pierwiastek wielomianu

Pierwiastkiem wielomianu  $W$  nazywamy taką liczbę rzeczywistą  $a$ , dla której  $W(a) = 0$ .

- Twierdzenie Bézouta<sup>11</sup>

Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $W$  jest podzielny przez dwumian  $(x - a)$ .

- Liczba pierwiastków wielomianu

Liczba pierwiastków niezerowego wielomianu  $W(x)$  jest nie większa niż stopień wielomianu  $W(x)$ .

- Wymierne pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych

Jeżeli wielomian

$$W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a^2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0,$$

gdzie  $a_n \neq 0$  i  $a_0 \neq 0$  o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny zapisany w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ , z kolei mianownik to dzielnik współczynnika  $a_n$  przy najwyższej potędze zmiennej.

W szczególności, gdy  $a_n = 1$ , to pierwiastek może być przedstawiony jako dzielnik wyrazu wolnego  $a_0$ .

<sup>11</sup> Étienne Bézout (1730-1783) - francuski matematyk.

- Pierwiastek k-krotny

Pierwiastkiem  $k$ -krotnym wielomianu  $W$ , ( $k \in \mathbb{N}_+$ ) nazywamy liczbę  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $W$  jest podzielny przez  $(x - a)^k$  i nie jest podzielny przez  $(x - a)^{k-1}$ . Liczbę  $k$  nazywamy krotnością pierwiastka.

- Schemat Hornera<sup>12</sup>

Niech dany będzie wielomian

$$W(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0,$$

gdzie  $a_n \neq 0$ , oraz dwumian liniowy  $(x - a)$ .

Układając poniższą tabelkę:

	$a_n$	$a_{n-1}$	...	$a_1$	$a_0$
$a$		$c_{n-1} = a \cdot b_{n-1}$	...	$c_1 = a \cdot b_1$	$c_0 = a \cdot b_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + c_{n-1}$	...	$b_0 = a_1 + c_1$	$r = a_0 + c_0$

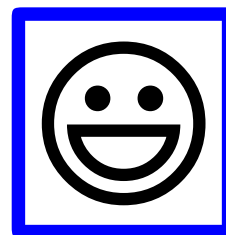
możemy się przekonać, że wielomian da się zapisać w postaci:

$$W(x) = (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0)(x - a) + r.$$

W dziale z zadaniami, znajdziesz wielomian rozwiązany tą metodą.

### Zapamiętaj!

Nie wolno wykonywać tego algorytmu przy dzieleniu wielomianów przez wielomiany o wyższym stopniu! Wówczas należy skorzystać z dzielenia wielomianów sposobem pisemnym.



### Ciekawostka

Schemat ten jest pomocny przy konwersji liczb zapisanych w różnych systemach pozycyjnych (np. z dwójkowego na dziesiętny).



<sup>12</sup> William George Horner (1786-1837) - brytyjski matematyk.



- Wielomian rozkładalny

Wielomianem rozkładalnym nazywamy wielomian różny od wielomianu zerowego, który da się przedstawić w postaci iloczynu wielomianów mających stopnie różne od zera. Jeżeli nie da się go przedstawić w postaci takiego iloczynu, wielomian ten jest nierozkładalny.

Każdy wielomian stopnia  $\geq 3$  można rozłożyć na czynniki stopnia co najwyżej drugiego. Taki rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do kolejnych czynników oraz stałej.

- Trójkąt Pascala<sup>13</sup>

Współczynniki liczbowe pochodzące z rozwinięcia  $(a + b)^n$  można zapisać w kolejnych wierszach:

$n = 0$				1			
$n = 1$				1	1		
$n = 2$			1	2	1		
$n = 3$			<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	
$n = 4$		1	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	1	
$n = 5$	1	5	10	10	5	1	
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1

*i tak dalej...*

W tym trójkącie każda liczba poza skrajnymi jedynkami jest sumą dwóch liczb, które znajdują się powyżej tej liczby (dla przykładu, dla  $n = 4$ , mamy kolejno: **4 = 1 + 3**, **6 = 3 + 3**, **4 = 3 + 1**).

Co ciekawe, kolejne liczby w poszczególnym wierszu są powiązane z kolejnymi współczynnikami wzorów skróconego mnożenia.

Np.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Dla wyższych potęg, wyrażenie  $(a \pm b)^n$  dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$  rozwijamy ze wzoru dwumianowego Newtona<sup>14</sup>.

<sup>13</sup> Blaise Pascal (1623-1662) - francuski matematyk, fizyk, inżynier-wynalazca, filozof.

<sup>14</sup> Isaac Newton (1642/43-1726/27) - angielski fizyk, astronom, matematyk, filozof.

Zestawienie pojęć występujących w książce.

**A**

aksjomat 19  
 algorytm 44, 114  
     Euklidesa 19

**B**

błąd  
     bezwzględny 21, 95  
     procentowy 21, 96  
     względny 21, 96

**C**

cecha podzielności 17, 18  
 ciąg  
     arytmetyczny 25, 109, 127  
     geometryczny 26, 110  
     granica 27  
         niewłaściwa 27  
         właściwa 27  
     rekurencyjny 25, 109  
     zbieżny 27  
 cosinus 65, 112  
 cotangens 65  
 cyfra 17, 18, 72, 73  
 czworokąt 89  
 czynniki 45, 103  
     pierwsze 19, 20

**Ć**

ćwiartka 46, 65

**D**

deltoid 50, 104  
 diagram Venna 72, 76  
 doświadczenie losowe  
     wieloetapowe 79  
 drzewo stochastyczne 72, 75  
 dwumian 44  
 działanie 21  
 dzielenie 17  
 dzielna 113  
 dzielnik 17, 19, 113

**F**

figura  
     bok 48–50, 53–57, 100, 101, 118,  
         119, 121, 122  
 funkcja 97  
     kwadratowa 40  
     ciągła 37  
     dziedzina 28, 88, 101, 124  
     ekstrema funkcji 37  
     kwadratowa 40, 88  
     liczbowa 30  
     liniowa 38, 97

malejąca 29, 38, 111  
monotoniczność 29, 124  
niemalejąca 29  
nieparzysta 30  
nierosnąca 29  
odwzorowanie 28  
okresowa 30  
parzysta 30  
pochodna 111  
przyporządkowanie 28  
rosnąca 29, 38, 97, 102  
równość funkcji 31  
różnowartościowość 29, 124  
stała 29, 38  
trygonometryczna 30, 65, 119,  
120, 126  
zbiór wartości 28  
złożenie funkcji (superpozycja)  
31, 102

**G**

geometria 48, 59  
graf 128  
graniastosłup 59

**I**

iloczyn 71  
iloraz 109, 110

**K**

kąt 65  
dwusieczna 57, 58, 91, 118  
dwuścienny 64  
prosty 49, 104  
przyległy 52  
rozarty 90  
wewnętrzny 52, 90  
zewewnętrzny 52

kombinacje

bez powtórzeń 69, 71  
z powtórzeniami 70, 71

kombinatoryka 68  
krawędź 108  
boczna 60, 63, 64  
kula 80  
kwadrat 50

**L**

liczba 21, 67  
Eulera 27  
naturalna 107  
niewymierna 27  
parzysta 107  
liczby 17  
całkowite 17  
naturalne 20, 71  
dodatnie 71  
względnie pierwsze 20  
logarytm 22, 96  
naturalny 27  
losowanie 80

**M**

maksimum lokalne 37  
metoda  
graficzna 39  
podstawiania 39  
przeciwnych współczynników 39,  
105  
miara łukowa 66  
miejsce zerowe 31, 38  
minimum lokalne 37  
model klasyczny 72  
moneta 79  
multizbiór 70

**N**

nierówność 40, 97, 101

- kwadratowa 97  
wykładnicza 124  
niewiadoma 39, 117, 124  
NWD (największy wspólny dzielnik) 18, 19, 21  
NWW (najmniejsza wspólna wielokrotność) 20, 21
- O**  
objętość 58  
obwód 58, 103  
odcinek 48  
długość 58, 98, 119  
środek 105  
okrąg 49  
opisany na czworokącie 56  
okręgi 51  
przecinające się 51  
rozłączne wewnętrznie 51  
rozłączne zewnętrznie 51  
styczne wewnętrznie 51, 98  
styczne zewnętrznie 51, 98  
współśrodkowe 51  
orzeł 79  
ostroślup 59  
oś  
pionowa 46  
pozioma 46  
symetrii 41, 49, 89, 104
- P**  
parabola 40  
parametr 42, 97  
permutacje  
bez powtórzeń 69  
z powtórzeniami 69, 70  
pierwiastek 101  
płaszczyzna podstawy 61, 63  
pochodna 37, 102, 103  
pojęcie pierwotne 19, 76  
pole 58, 100, 101  
potęga 106  
powinowactwo prostokątne 32, 34, 36  
półprosta 57, 119  
prawdopodobieństwo 68  
całkowite 81  
klasyczne 108  
warunkowe 80  
procent 21  
składany 24  
promień 98  
proporcja 66, 119  
prosta 57, 104  
rozłączna z okręgiem 47  
prostokąt 50  
prostopadłościan 60, 125  
przekątna 49, 53, 60, 61, 104, 105  
przekształcenia 31  
punkt 33, 35, 36, 39, 41, 88  
punkty kratowe 47
- R**  
radian 66  
reguła  
dodawania 68  
kombinatoryczna 68  
mnożenia 68  
rekurencja 25, 71  
reszka 79  
reszta z dzielenia 17, 114  
romb 50  
równanie 40, 88, 95, 104, 105  
kwadratowe 40, 117  
równoległobok 50  
różnica 102, 109

**S**

schemat Hornera 44, 113  
 sieczna do okręgu 47  
 silnia 71  
 sinus 65, 112  
 sortowanie  
   bąbelkowe 40  
   przez wstawianie 40  
 stała 45  
 stopień 66  
 stosunek 58  
 styczna do okręgu 47  
 suma 27, 102  
 symetralna 57  
 symetria  
   osiowa  
     względem osi  $O_x$  31, 35  
     względem osi  $O_y$  31, 33, 35  
   środkowa 31, 35  
 sześcian 60, 108  
 szufladka 72

**Ś**

ściana boczna 60, 63  
 średnia  
   arytmetyczna 40, 95  
 średnica 105  
 środek okręgu 98  
 środkowa 57

**T**

tangens 65, 112  
 trapez 50, 53  
 trójkąt 54, 100  
   charakterystyczny 54, 125  
   Pascala 45  
   prostokątny 105  
   równoboczny 103

twierdzenie 24

Bézouta 43  
 cosinusów 54, 122  
 Fermata 37  
 Pitagorasa 100, 105  
 sinusów 54, 122

**U**

układ  
   nieoznaczony 39  
   oznaczony 39  
   równań liniowych 39, 105  
   sprzeczny 39  
   współrzędnych 46, 117  
 ułamek 21, 111  
 urna 72

**W**

wariacje  
   bez powtórzeń 69  
   z powtórzeniami 69, 70  
 wartość  
   bezwzględna 21, 32, 33, 35, 95  
   dokładna 21  
   najmniejsza 12, 31, 41, 42  
   największa 12, 31, 41, 42  
   przybliżona 21  
 warunek  
   dostateczny 37  
   konieczny 37  
 wektor 31  
   translacja (przesunięcie) 31, 35  
 wielokąt 118  
   foremny 48, 118  
   wkłęsły 48  
   wypukły 48  
 wielokrotność 17  
 wielomian 43, 103

- dzielenie 44  
nierozkładalny 45  
pierwiastek 43, 44  
rozkładalny 45, 106  
wierzchołek 41, 119  
współczynnik 39, 113  
    kierunkowy 97  
współrzędna 36, 40, 41, 89  
wyraz wolny 39  
wysokość 57, 101  
wzór 23, 25, 26  
    Brahmagupty 56  
    dwumianowy Newtona 45  
    Herona 55, 122  
    jawny 128  
    Picka 56  
    rekurencyjny 89  
    skróconego mnożenia 45, 102, 123  
    Viète'a 42, 103
- Z**  
zbiór 12, 42, 69, 107  
    część wspólna 77  
    dopełnienie 77  
    iloczyn 77  
    moc 107  
    podzbiór 77  
    przestrzeń 77  
    różnica 77  
    suma 77  
zdarzenie 68, 107  
    elementarne 107  
zmienna 101



„Pracuj tak, jakby wszystko zależało od Ciebie.”

św. Augustyn z Hippony (354-430)

## PROGRAMTICA

### Nauczanie z przygodą

Pozycja pt. „Czego nie znajdziesz w tablicach maturalnych z matematyki?” zawiera kilkadziesiąt mniej znanych i wykorzystywanych zagadnień, niejednokrotnie przewijających się w zadaniach podczas egzaminów dojrzałości z matematyki, a także podczas prac klasowych. Kompendium to może być wykorzystywane przez uczniów szkół średnich uczących się do sprawdzianów, egzaminów, ale również ich nauczycieli, którzy chcieliby lepiej przygotować do nich swoich podopiecznych.

### O Autorze

Konstanty Dmochowski jest absolwentem Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza w Poznaniu. Z wykształcenia nauczyciel matematyki oraz informatyki, zawodowo korepetytor i twórca materiałów dydaktycznych. Przygotowuje uczniów do egzaminu maturalnego, jednakże zdarza mu się pomagać także w zakresie analizy matematycznej i metod numerycznych.



ISBN 978-83-966226-2-4



9 788396 622624

 bookplan.pl