

Stefan Starzyński

ATLAS MATEMATYCZNY

	Studia
	Rozszerzenie
	Poziom szkoły średniej
	
	
	Poziom szkoły podstawowej
	
	

Atlas matematyczny

Autorzy* treści – geniusze matematyczni swoich epok:

Tales z Miletu (ok. 627–ok. 540 p.n.e.)

Pitagoras (ok. 572–ok. 497 p.n.e.)

Euklides (ok. 300 p.n.e.)

Archimedes (ok. 287–ok. 212 p.n.e.)

Apoloniusz z Pergii (ok. 262–ok. 200 p.n.e.)

Heron z Aleksandrii (I wiek n.e.)

Diofantos (druga połowa III wieku)

Pappus z Aleksandrii (przełom III i IV wieku)

Aryabhata I (ok. 475–?)

Muhammed Ibn Musa Alchwarizmi (ok. roku 800)

Francois Viète (1540–1603)

Renè Descartes *Kartezjusz* (1596–1650)

Blaise Pascal (1623–1662)

Gottfried Leibniz (1646–1716)

Izaak Newton (1642–1727)

Abraham de Moivre (1667–1754)

Leonard Euler (1707–1783)

Augustin Louios Cauchy (1789–1857)

Heinrich Eduard Heine (1821–1881)

* *Poczet wielkich matematyków* Instytut Wydawniczy *Nasza Księgarnia* Warszawa 1989

Wszelkie prawa zastrzeżone. Nieautoryzowane rozpowszechnianie całości lub fragmentu niniejszej publikacji w jakiegokolwiek postaci jest zabronione. Wykonywanie kopii metodą kserograficzną, fotograficzną, a także kopiowanie książki na nośniku filmowym, magnetycznym lub innym powoduje naruszenie praw autorskich niniejszej publikacji.

Wszystkie znaki występujące w tekście są zastrzeżonymi znakami firmowymi bądź towarowymi ich właścicieli.

Autor oraz Wydawnictwo HELION dołożyli wszelkich starań, by zawarte w tej książce informacje były kompletne i rzetelne. Nie biorą jednak żadnej odpowiedzialności ani za ich wykorzystanie, ani za związane z tym ewentualne naruszenie praw patentowych lub autorskich. Autor oraz Wydawnictwo HELION nie ponoszą również żadnej odpowiedzialności za ewentualne szkody wynikłe z wykorzystania informacji zawartych w książce.

Redaktor prowadzący: Małgorzata Kulik

Projekt okładki: Stefan Starzyński

Projekt graficzny: Stefan Starzyński

Wydawnictwo HELION

ul. Kościuszki 1c, 44-100 GLIWICE

tel. 32 231 22 19, 32 230 98 63

e-mail: helion@helion.pl

WWW: <http://helion.pl> (księgarnia internetowa, katalog książek)

Drogi Czytelniku!

Jeżeli chcesz ocenić tę książkę, zajrzyj pod adres

<http://helion.pl/user/opinie/atlmat>

Możesz tam wpisać swoje uwagi, spostrzeżenia, recenzję.

Możesz też napisać do autora na adres StefanStarzynski@wp.pl
lub odwiedzić jego stronę SztukaLiczenia.net.

ISBN: 978-83-283-4760-1

Copyright © Stefan Starzyński 2019

Printed in Poland.

- Kup książkę
- Poleć książkę
- Oceń książkę

- Księgarnia internetowa
- Lubię to! » Nasza społeczność

Spis treści

- Temat 1 Rachunek zdań**
Zdania i działania logiczne. Tautologia. Forma zdaniowa. Kwantyfikatory. Budowa twierdzenia.
- Temat 2 Rachunek zbiorów**
Symbolika zbiorów. Działania na zbiorach. Relacje między zbiorami. Związki między rachunkiem zdań a rachunkiem zbiorów.
- Temat 3 Liczby całkowite**
Liczby pierwsze. Liczby naturalne. Liczby całkowite.
- Temat 4 Indukcja matematyczna**
Zasada indukcji. Twierdzenia z sumami ciągów. Twierdzenia z podzielnością. Twierdzenia geometryczne.
- Temat 5 Liczby wymierne**
Liczby wymierne. Operacje i działania na ułamkach. Ułamki dziesiętne. Ułamki okresowe.
- Temat 6 Procenty i promile**
Procenty. Procent składany. Promile.
- Temat 7 Liczby niewymierne**
Liczby niewymierne. Ograniczenia i kresy zbiorów liczbowych. Przybliżenia liczb. Usuwanie niewymierności z mianownika.
- Temat 8 Liczby rzeczywiste**
Klasyfikacja zbiorów liczbowych. Przedziały liczbowe – podzbiory zbioru \mathbb{R} . Hierarchia inkluzji zbiorów liczbowych. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Temat 9 Potęgi i pierwiastki**
Potęgi o wykładnikach naturalnych. Potęgi o wykładnikach całkowitych. Potęgi o wykładnikach wymiernych. Pierwiastki.
- Temat 10 Wzory skróconego mnożenia**
Kwadrat sumy lub różnicy. Różnica kwadratów. Suma kwadratów. Sześcian sumy lub różnicy. Suma lub różnica sześciątów. Wzór dwumianowy Newtona.
- Temat 11 Liczby zespolone**
Postać kanoniczna. Działania na liczbach zespolonych. Interpretacja geometryczna. Postać trygonometryczna. Wzory de Moivre'a.
- Temat 12 Równania zespolone**
Rozwiązywanie z układami równań. Rozwiązywanie ze wzorami de Moivre'a.
- Temat 13 Relacje**
Para uporządkowana. Produkt kartezjański. Relacja. Własności relacji. Klasy abstrakcji.
- Temat 14 Funkcje**
Funkcja. Sposoby opisu funkcji.
- Temat 15 Funkcje liniowe**
Postać kierunkowa prostej. Funkcja liniowa z parametrem. Wykres funkcji liniowej.
- Temat 16 Równania i nierówności liniowe**
Równanie liniowe z jedną niewiadomą. Równanie liniowe z parametrem. Nierówności liniowe z jedną niewiadomą. Nierówności liniowe z parametrem.
- Temat 17 Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi**
Postać ogólna prostej lub półpłaszczyzny. Rozwiązania równań liniowych. Interpretacja graficzna.
- Temat 18 Układy równań liniowych 2 na 2**
Układ równań 2 na 2. Wyznacznik 2 na 2. Rozwiązywanie układów równań 2 na 2.
- Temat 19 Macierze**
Budowa macierzy. Działania na macierzach. Macierz odwrotna.
- Temat 20 Wyznaczniki**
Obliczanie wyznaczników. Własności wyznaczników.
- Temat 21 Układy Cramera**
Układ n równań z n niewiadomymi. Metoda wyznacznikowa. Metoda macierzowa.

Spis treści

- Temat 22 Układy równań liniowych**
Układ równań liniowych. Rozwiązywanie układu równań liniowych.
- Temat 23 Funkcje kwadratowe – przypadki szczególne**
- Temat 24 Funkcje kwadratowe**
Postać ogólna. Postać kanoniczna. Postać iloczynowa. Wzory Viète'a. Parabola.
- Temat 25 Równania kwadratowe**
Równania kwadratowe, niezupełne. Równania kwadratowe ze wzorami skróconego mnożenia. Równania kwadratowe ze wzorami Viète'a. Równania kwadratowe dowolne.
- Temat 26 Nierówności kwadratowe**
Postać ogólna nierówności (równań) kwadratowych. Rozwiązania nierówności. Rozwiązania równań.
- Temat 27 Wykresy funkcji kwadratowych**
Przypadki położenia paraboli na płaszczyźnie.
- Temat 28 Równania i nierówności kwadratowe z parametrem**
Równania kwadratowe. Nierówności kwadratowe.
- Temat 29 Wielomiany – postać ogólna**
Funkcje wielomianowe. Działania na wielomianach.
- Temat 30 Wielomiany – postać iloczynowa**
Twierdzenie o postaci iloczynowej wielomianu. Pierwiastki wielomianów.
- Temat 31 Twierdzenia o wielomianach**
Twierdzenie o rozkładzie wielomianu. Twierdzenie Bézouta. Reszta z dzielenia wielomianu.
- Temat 32 Wykresy wielomianów**
Badanie przebiegu zmienności wielomianów.
- Temat 33 Równania wielomianowe**
Postać ogólna równań wielomianowych. Sprowadzanie wielomianów do postaci iloczynowej.
- Temat 34 Nierówności wielomianowe**
Wykresy wielomianów z dokładnością do znaków. Postać ogólna nierówności wielomianowych.
- Temat 35 Funkcje homograficzne**
Postać ogólna. Postać kanoniczna. Transformacje wzorów. Translacje wykresów.
- Temat 36 Równania i nierówności homograficzne**
Równania homograficzne. Nierówności homograficzne.
- Temat 37 Funkcje wymierne**
Postać ogólna i badanie. Wykresy.
- Temat 38 Równania i nierówności wymierne**
Równania lub nierówności wymierne. Interpretacja graficzna.
- Temat 39 Funkcje potęgowe**
Postać ogólna. Własności. Wykresy.
- Temat 40 Funkcje, równania i nierówności wykładnicze**
Funkcja wykładnicza. Własności funkcji wykładniczych. Równania lub nierówności wykładnicze.
- Temat 41 Logarytmy**
Logarytm. Własności logarytmów. Podstawowe wzory logarytmiczne.
- Temat 42 Funkcje, równania i nierówności logarytmiczne**
Funkcja logarytmiczna. Własności funkcji logarytmicznych. Równania lub nierówności logarytmiczne.
- Temat 43 Pojęcia trygonometryczne**
Zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.
- Temat 44 Tożsamości trygonometryczne**
Związki między funkcjami trygonometrycznymi. Funkcje trygonometryczne sumy (różnicy) kątów. Funkcje trygonometryczne połowy kąta. Jedynka trygonometryczna. Sumy/różnice funkcji trygonometrycznych. Funkcje trygonometryczne kąta podwojonego.

Spis treści

- Temat 45** **Funkcje trygonometryczne**
Sinus i cosekans. Cosinus i secans. Tangens i cotangens. Wzory redukcyjne. Znaki i monotoniczność funkcji trygonometrycznych w przedziałach.
- Temat 46** **Równania i nierówności trygonometryczne**
Równania. Nierówności.
- Temat 47** **Własności funkcji**
Funkcje „w/na”. Różnowartościowość. Odwracalność. Monotoniczność. Wypukłość. Parzystość. Ograniczoność. Okresowość.
- Temat 48** **Funkcje odwrotne**
Wzory funkcji odwrotnych. Wykresy funkcji odwrotnych.
- Temat 49** **Przekształcenia wykresów funkcji**
Przesunięcia (translacje). Symetrie. Powinowactwa.
- Temat 50** **Funkcja z wartością bezwzględną**
Funkcje postaci $y = |f(x)|$. Funkcje postaci $y = f(|x|)$. Funkcje z wartością bezwzględną bez reguły.
- Temat 51** **Ciągi liczbowe**
Ciąg liczbowy. Opisy ciągów liczbowych. Własności ciągów liczbowych.
- Temat 52** **Granice ciągów**
Granica ciągu liczbowego. Własności granic ciągów. Wybrane granice ciągów. Symbole granic.
- Temat 53** **Ciągi szczególne**
Ciągi arytmetyczne. Ciągi geometryczne.
- Temat 54** **Szeregi geometryczne**
Szereg geometryczny. Zbieżność szeregu geometrycznego. Interpretacje graficzne.
- Temat 55** **Granice funkcji w nieskończoności**
Granice w plus/minus nieskończoności. Granice w nieskończoności właściwe/niewłaściwe.
- Temat 56** **Granice funkcji w punkcie**
Granice w punkcie. Granice jednostronne. Granice w punkcie właściwe/niewłaściwe.
- Temat 57** **Własności granic funkcji**
Własności granic. Wybrane granice. Symbole granic.
- Temat 58** **Ciągłość funkcji**
Przypadki nieciągłości funkcji.
- Temat 59** **Pochodna funkcji w punkcie**
Otoczenie punktu. Iloraz różnicowy. Pochodna funkcji w punkcie. Interpretacja graficzna pochodnej.
- Temat 60** **Różniczkowalność funkcji**
Różniczkowalność funkcji. Interpretacja graficzna różniczkowalności. Różniczkowalność jednostronna w punkcie.
- Temat 61** **Pochodne funkcji**
Pochodna funkcji. Monotoniczność. Ekstrema lokalne. Wypukłość. Punkty przegięcia.
- Temat 62** **Pochodne funkcji elementarnych**
Pochodne funkcji: potęgowych, wielomianowych, wymiernych, wykładniczych, logarytmicznych, trygonometrycznych, cyklometrycznych.
- Temat 63** **Pochodne funkcji nieelementarnych**
Pochodna sumy, różnicy, iloczynu lub ilorazu. Pochodna funkcji odwrotnej. Pochodna funkcji złożonej.
- Temat 64** **Badanie funkcji**
- Temat 65** **Całki nieoznaczone**
Funkcja pierwotna. Całki podstawowe. Własności całek. Całkowanie przez części. Całkowanie przez podstawianie.
- Temat 66** **Całki oznaczone**
Całka oznaczona. Własności całek oznaczonych. Całkowanie oznaczone przez części. Całkowanie oznaczone przez podstawianie. Interpretacja graficzna.
- Temat 67** **Kombinatoryka**
Silnia. Symbol Newtona. Trójkąt Pascala. Schemat rozwiązywania zadań.

Spis treści

- Temat 68 Język prawdopodobieństwa**
Tabela pojęć i symboli.
- Temat 69 Prawdopodobieństwo**
Prawdopodobieństwo klasyczne. Własności prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo warunkowe. Prawdopodobieństwa całkowite. Schemat rozwiązywania zadań.
- Temat 70 Elementy statystyki**
Zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej. Wartość oczekiwana. Wariancja zmiennej losowej. Odchylenie standardowe.
- Temat 71 Kąty i trójkąty**
Miary kątowe. Twierdzenie Talesa. Podobieństwo trójkątów. Pole trójkąta. Twierdzenie sinusów. Twierdzenie cosinusów. Twierdzenie Pitagorasa.
- Temat 72 Okręgi i koła**
Okrąg/koło. Okrąg opisany na trójkącie lub wpisany w trójkąt. Okrąg opisany na czworokącie lub wpisany w czworokąt. Figury w kole. Kąty w okręgu/kole. Wzajemne położenia okręgów/kół.
- Temat 73 Wybrane figury planimetrii**
Trójkąty. Wielokąty foremne. Koło i jego elementy. Czworokąty.
- Temat 74 Wybrane figury stereometrii**
Graniastosłupy proste. Bryły obrotowe. Ostrosłupy proste.
- Temat 75 Wektory na płaszczyźnie**
Opis wektora. Długość wektora. Współczynnik kierunkowy wektora. Wektor zerowy. Równość wektorów. Interpretacja graficzna. Działania na wektorach. Prostopadłość/równoległość wektorów.
- Temat 76 Proste na płaszczyźnie**
Opis położenia prostej. Interpretacje graficzne opisu prostych. Postacie opisu prostej: ogólna, kierunkowa, wyznacznikowa, parametryczna, odcinkowa.
- Temat 77 Krzywe stożkowe**
Okrąg. Hiperbola. Elipsa. Parabola.
- Temat 78 Przekroje stożka**
Okrąg. Elipsa. Parabola. Hiperbola.
- Temat 79 Elementy geometrii analitycznej**
Punkty. Punkty i proste. Proste. Proste i wektory.
- Temat 80 Przekształcenia płaszczyzny**
Przesunięcia. Obroty. Jednokładności. Powinowactwa.

Tablice trygonometryczne

Tablice: sinusów, cosinusów, tangensów, cotangensów kątów. Zamiana miary stopniowej na łukową.

Tablice działań

Odwrotności, kwadraty, sześciiany, pierwiastki kwadratowe oraz sześciennie, wybrane wartości wykładnicze oraz logarytmy liczb naturalnych od 0 do 100.

Dodatki

Alfabet grecki. Jednostki wielokrotne i podwielokrotne. Liczby rzymskie.

Skorowidz pojęć

- Zakres odpowiadający szkole podstawowej.
- Zakres odpowiadający podstawowemu programowi wszystkich szkół średnich, w tym w szczególności: liceom ogólnokształcącym, szkołom zawodowym wszystkich typów (zasadnicze szkoły zawodowe i technika) do poziomu obligatoryjnej matury w zakresie podstawowym.
- Zakres odpowiadający maturze w zakresie rozszerzonym realizowanym w liceach ogólnokształcących w klasach o profilu matematycznym.
- Zakres pierwszego roku studiów wyższych pierwszego stopnia na wszystkich kierunkach uniwersyteckich z matematyką, tj. przede wszystkim na kierunkach ścisłych takich jak matematyka, informatyka, fizyka, chemia, astronomia, na kierunkach inżynierskich, politechnikach na poziomie licencjatu oraz uczelniach ekonomicznych na kierunkach: ekonomia, bankowość i zarządzanie.

Potęgi o wykładnikach naturalnych

Definicja

Potęga o podstawie a i wykładniku n to działanie:

$$a^n = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow n = 0 \wedge a \neq 0 \\ a & \Leftrightarrow n = 1 \\ \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}} & \Leftrightarrow n > 1 \end{cases}$$

$\mathbb{R} \ni a$ – **podstawa** potęgi $\mathbb{N} \ni n$ – **wykładnik** potęgi

Przykłady

$3^0 = 1$ $5^1 = 5$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $10^5 = 100000$

WZÓR	ZAŁOŻENIA	Przykład
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a, b \in \mathbb{R}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$		$2^2 \cdot 3^2 = 6^2 = 36$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a \neq 0$ $m > n$	$2^{30} : 2^{27} = 2^3 = 8$
$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$b \neq 0$	$2^2 : 3^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$m, n \in \mathbb{N}$	$(2^2)^3 = 2^6 = 64$

Potęgi o wykładnikach całkowitych

Definicja

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym to potęga odwrotności podstawy o przeciwnym wykładniku:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$a \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$

Przykłady

$3^{-1} = \frac{1}{3}$ $2^{-3} = \frac{1}{8}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$ $\sqrt{5}^{-4} = \frac{1}{25}$

WZÓR	ZAŁOŻENIA	Przykład
$a^k \cdot a^l = a^{k+l}$	$a, b \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$ $k, l \in \mathbb{C}$	$2^3 \cdot 2^{-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
$a^k \cdot b^k = (ab)^k$		$2^{-2} \cdot 3^{-2} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$
$a^k : a^l = a^{k-l}$		$2^3 : 2^{-2} = 2^5 = 32$
$a^k : b^k = \frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$		$2^{-2} : 3^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$
$(a^k)^l = a^{kl}$		$(2^{-2})^3 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$

Potęgi o wykładnikach wymiernych

Definicja

Potęga o wykładniku wymiernym dodatnim typu $\frac{1}{n}$ to pierwiastek⁽¹⁾ stopnia n z podstawy potęgi a :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$a \geq 0$, gdy n parzyste $a \in \mathbb{R}$, gdy n nieparzyste
 $n \in \mathbb{N}$

Przykłady

$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$ $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $1024^{\frac{1}{10}} = 2$

WZÓR	ZAŁOŻENIA		Przykład
	n - parz.	n - niep.	
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$	$a \geq 0$	$a \in \mathbb{R}$	$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$a > 0$	$a \neq 0$	$2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Pierwiastki

Definicja

Pierwiastek arytmetyczny z liczby a stopnia n to działanie:

$$\sqrt[n]{a} = p \Leftrightarrow p^n = a$$

$0 \leq a$ – **wartość podpierwiastkowa**, gdy n - parzyste

$\mathbb{R} \ni a$ – **wartość podpierwiastkowa**, gdy n - nieparzyste

$\mathbb{N} \ni n$ – **stopień pierwiastka**

Oznaczenia

$$\sqrt[1]{a} = a \qquad \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

Przykłady

$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\sqrt[10]{1024} = 2$

WZÓR	ZAŁOŻENIA		Przykład
	n - parz.	n - nieparz.	
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$a \geq 0$ $b \geq 0$	$a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{R}$	$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$a \geq 0$ $b > 0$	$a \in \mathbb{R}$ $b \neq 0$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$	$a \geq 0$	$a \in \mathbb{R}$	$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$a \geq 0$	$\begin{matrix} m \\ \text{- parz.} \\ a \geq 0 \end{matrix}$ $\begin{matrix} m \\ \text{- nieparz.} \\ a \in \mathbb{R} \end{matrix}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$
$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$	$a \geq 0$	$a \geq 0$ $a \in \mathbb{R}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{32}$
$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$	$a > 0$	$a > 0$ $a \neq 0$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

Obliczanie wyznaczników

Definicja

Wyznacznik macierzy kwadratowej⁽¹⁾ $[a_{ij}]_{n \times n}$ to liczba określona następująco:

$$\det A = |A| = \begin{cases} \det [a_{ij}]_{1 \times 1} = \det [a] = |a| = a \\ \det [a_{ij}]_{2 \times 2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & (2) \\ \det [a_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ \dots \\ \det [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ = a_{i1}|A_{i1}| - a_{i2}|A_{i2}| + a_{i3}|A_{i3}| - \dots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \end{cases}$$

A – macierz⁽³⁾ $n \in \mathbb{N}$

$|A_{ij}|$ – wyznacznik z podmacierzy powstałej przez usunięcie z macierzy A i -tego wiersza i j -tej kolumny – **minor macierzy** A

Przykłady

$$\det[5] = |5| = 5^{(4)} \quad \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot (-3) = 3$$

Własności wyznaczników

Twierdzenie	Przykład
Transpozycja macierzy nie zmienia jej wyznacznika: $\det A^T = \det A$.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$
Jeżeli macierz A zawiera wiersz lub kolumnę złożony/ą z samych zer to $\det A = 0$.	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$
Jeżeli macierz A ma dwa proporcjonalne wiersze lub kolumny to $\det A = 0$.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$
Jeżeli zamienimy miejscami dwa wiersze lub kolumny, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$
Jeżeli do danego wiersza lub kolumny dodamy wartości innego wiersza (innej kolumny) pomnożone przez pewną stałą, to wyznacznik nie zmieni wartości.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -2$ ⁽⁵⁾

Własności wyznaczników pozwalają obliczać sprawnie wyznaczniki macierzy większych rozmiarów na podstawie rozwinięcia Laplace'a, sprowadzając je do jednego składnika z jednym podwyznacznikiem coraz mniejszego rozmiaru.

Przykłady

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(6)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 6 \\ -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(7)}{=}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(8)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{(9)}{=}$$

$$= -3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \stackrel{(10)}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{(11)}{=}$$

$$= -3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot |3| = -3 \cdot |3| = -3 \cdot 3 = -9$$

(1) Wyznaczniki istnieją tylko dla macierzy kwadratowych. Rozwinięcie dla macierzy o wymiarach 3 na 3 nazywa się **schematem Sarrusa**, a dla większych – **rozwinięciem Laplace'a**. We wzorze definicji wyznacznika rozwinięcie Laplace'a pokazano według dowolnego (i -tego) wiersza. Rozwinięcie to może być również według dowolnej (j -tej) kolumny: $\det [a_{ij}]_{n \times n} = a_{1j}|A_{1j}| - a_{2j}|A_{2j}| + a_{3j}|A_{3j}| - \dots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$

W praktyce obliczeniowej dla większych wyznaczników unika się obliczania dużej liczby minorów przez zastosowanie \rightarrow **Własności wyznaczników**, tak aby w jakimś wierszu lub kolumnie wystąpiła tylko jedna liczba różna od zera, a co za tym idzie tylko jeden minor, z którym następnie postępujemy według tego samego schematu aż do otrzymania wyznacznika o wymiarach co najwyżej 3 na 3.

(2) \rightarrow Wyznacznik 2 na 2 \rightarrow Układy równań liniowych 2 na 2 \rightarrow Temat 18

(3) \rightarrow Macierze \rightarrow Temat 19

(4) Wartością wyznacznika rozmiaru 1 na 1 jest wartość pozostałego w nim elementu. Nie mylić z wartością bezwzględną!

(5) Do wartości drugiego wiersza dodano podwojone wartości wiersza pierwszego.
 (6) Korzystając z ostatniej własności wyznaczników, do wartości kolumny czwartej dodano wartości kolumny pierwszej, a do wartości kolumny trzeciej dodano wartości kolumny pierwszej pomnożone przez liczbę -2. W ten sposób otrzymano w wierszu pierwszym tylko jedną wartość różną od zera.

(7) Rozwinięcie Laplace'a według pierwszego wiersza.

(8) Tu można by skorzystać już ze schematu Sarrusa, ale korzystając ponownie z ostatniej własności wyznaczników, do pierwszego wiersza dodano podwojone wartości wiersza trzeciego. W ten sposób otrzymano w kolumnie trzeciej tylko jedną wartość różną od zera.

(9) Rozwinięcie Laplace'a według trzeciej kolumny.

(10) Tu można by skorzystać już ze schematu obliczania wyznacznika o wymiarach 2 na 2, ale można też jeszcze raz skorzystać z ostatniej własności wyznaczników i od wartości kolumny drugiej odjąć wartości kolumny pierwszej, otrzymując kolejne zero.

(11) Kolejne rozwinięcie Laplace'a według pierwszego wiersza sprowadza nasz wyznacznik do rozmiarów 1 na 1 – nie mylić ze znakiem wartości bezwzględnej!

Całka oznaczona

Definicja

Całka oznaczona funkcji $f(x)$ na przedziale $\langle a; b \rangle$ to różnica wartości dowolnej funkcji pierwotnej⁽¹⁾ $F(x)$ danej funkcji na końcach danego przedziału:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Przykład

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Własności całek oznaczonych⁽²⁾

Twierdzenia

Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowalne na przedziale $\langle a; b \rangle$, to zachodzą związki:

- ① $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
- ② $\int_a^b k f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \quad k \neq 0$
- ③ $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln|f(x)| + C]_a^b$
- ④ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad c \in (a; b)$

Przykłady

1. $\int_1^2 (x^2 - 3x + 1) dx = \textcircled{1} = \int_1^2 x^2 dx + \int_1^2 (-3x) dx + \int_1^2 1 dx = \textcircled{2}$
 $= \int_1^2 x^2 dx - 3 \int_1^2 x dx + \int_1^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 - 3 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 + [x]_1^2 =$
 $= \frac{1}{3} [x^3]_1^2 - \frac{3}{2} [x^2]_1^2 + [x]_1^2 = \frac{1}{3} [8 - 1] - \frac{3}{2} [4 - 1] + [2 - 1] = -\frac{7}{6}$
2. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+3} dx = \textcircled{3} = [\ln|x^2+3|]_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$
3. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = \textcircled{4} = \int_0^\pi \cos x dx + \int_\pi^{2\pi} \cos x dx =$
 $= [-\cos x]_0^\pi + [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -([\cos x]_0^\pi + [\cos x]_\pi^{2\pi}) =$
 $= -([\cos \pi - \cos 0] + [\cos 2\pi - \cos \pi]) = 0$

Całkowanie oznaczone przez części⁽³⁾

Twierdzenie

Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają na przedziale $\langle a; b \rangle$ ciągłe pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$, to:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Przykłady

1. $\int_0^\pi x \sin x dx = [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx =$
 $= -[x \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \pi$
2. $\int_1^e \ln x dx = [(\ln x)x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} dx = [x \ln x]_1^e - [x]_1^e =$
 $= [e \ln e - \ln 1] - [e - 1] = [e - 0] - [e - 1] = 1$

Całkowanie oznaczone przez podstawianie⁽⁴⁾

Twierdzenie

Jeśli funkcja $t = g(x)$ ma ciągłą pochodną $g'(x)$ na przedziale $\langle a; b \rangle$, a zbiór wartości funkcji $g(x)$ zawiera się w przedziale $\langle \alpha; \beta \rangle$, na którym jest określona ciągła funkcja $f(t)$ i $g(a) = \alpha$ oraz $g(b) = \beta$, to:

$$\int_a^b f[g(x)] g'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(t) dt$$

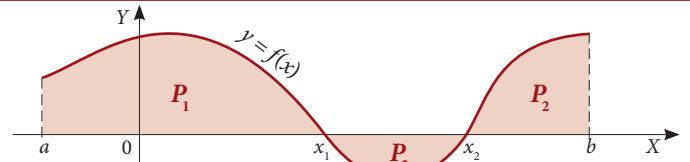
Przykłady

1. $\int_0^\pi \sin 2x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin t dt =$
 $= \frac{1}{2} [-\cos t]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} [\cos 2\pi - \cos 0] = -\frac{1}{2} [1 - 1] = 0$
2. $\int_0^1 x \sqrt{x^2+1} dx = \int_1^2 \sqrt{t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt =$
 $= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} [\sqrt{t^3}]_1^2 = \frac{1}{3} [\sqrt{8} - \sqrt{1}] = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$

(1) → Całki nieoznaczone → Temat 65
 (2) Porównaj → Własności całek → Całki nieoznaczone → Temat 65
 (3/4) Porównaj → Całkowanie przez części/podstawianie → Całki nieoznaczone → Temat 65
 Kup ksi k

Interpretacja graficzna

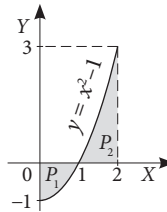
Pola figur ograniczonych⁽⁵⁾



$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

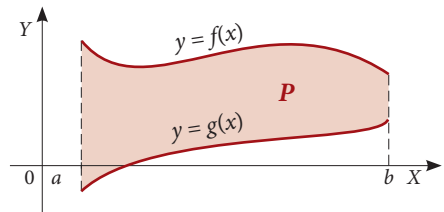
Przykład



$$P_1 = -\int_0^1 (x^2 - 1) dx = -\left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

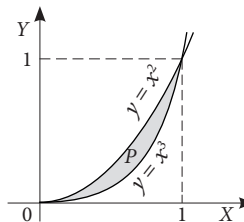
$$P_2 = \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$P = P_1 + P_2 = 2$$



$$P = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Przykład

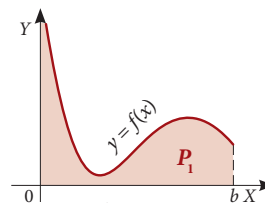


$$P = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 =$$

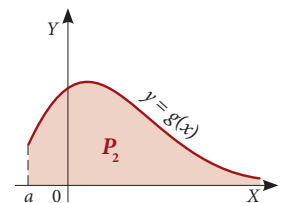
$$= \frac{1}{3} (1 - 0) - \frac{1}{4} (1 - 0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Pola figur nieograniczonych⁽⁶⁾



$$P_1 = \int_0^b f(x) dx =$$

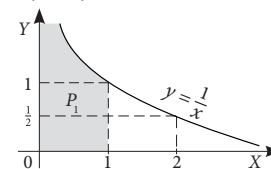
$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b f(x) dx \quad (7)$$



$$P_2 = \int_a^\infty f(x) dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

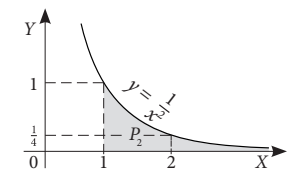
Przykłady



$$P_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x} =$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln|x|]_a^1 =$$

$$= 0 + \infty = \infty$$

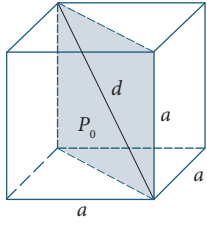
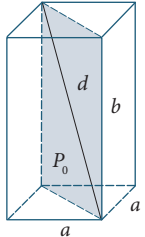
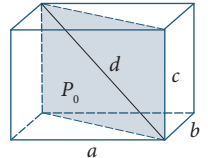
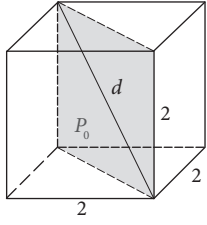
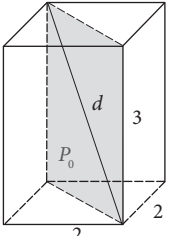
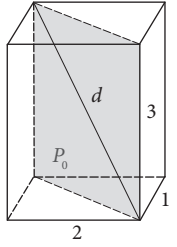


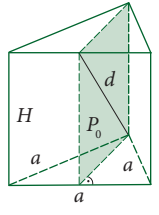
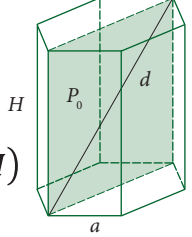
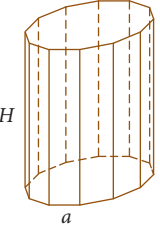
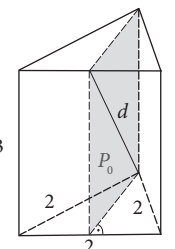
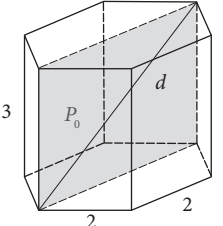
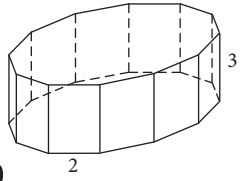
$$P_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b =$$

$$= 0 + 1 = 1 \quad (9)$$

(5/6) **Figura ograniczona/nieograniczona** płaska to taka, dla której istnieje/nie istnieje koło o skończonym promieniu zawierające tę figurę.
 (7) Gdy wykres funkcji zmierza asymptotycznie do osi OY z lewej strony, wówczas $P_1 = \int_a^0 f(x) dx = \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_b^a f(x) dx \rightarrow$ **Granice funkcji w punkcie** → Temat 56
 (8) Gdy wykres funkcji zmierza asymptotycznie do zera w minus nieskończoności, wówczas $P_2 = \int_b^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \rightarrow$ **Granice funkcji w nieskończoności** → Temat 55
 (9) Wynik jest dość zaskakujący, gdyż okazuje się, że pole figury nieograniczonej (niezawierającej się w kole o skończonym promieniu) może być... skończoną!
 Pole ksi k

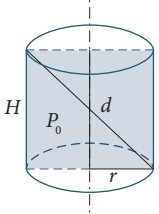
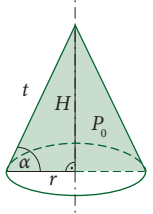
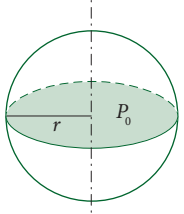
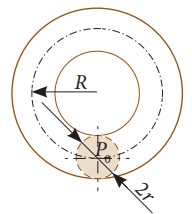
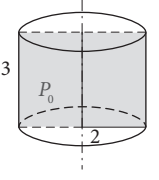
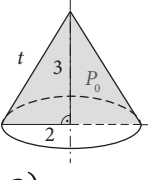
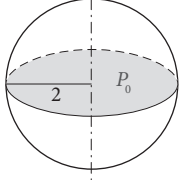
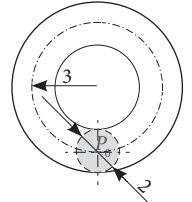
Gnaniostłupy proste⁽¹⁾

<p>Sześcian</p> $d = \sqrt{3}a$ $P_p = a^2$ $P_0 = \sqrt{2}a^2$ $P = 6a^2$ $V = a^3$ 	<p>Prostopadłościan prawidłowy⁽²⁾ czworokątny</p> $d = \sqrt{2a^2 + b^2}$ $P_p = a^2$ $P_0 = \sqrt{2}ab$ $P = 2a(a + 2b)$ $V = a^2b$ 	<p>Prostopadłościan</p> $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $P_p = ab$ $P_0 = c\sqrt{a^2 + b^2}$ $P = 2(ab + bc + ac)$ $V = abc$ 
<p><i>Przykład</i></p> $d = 2\sqrt{3}$ $P_p = 4$ $P_0 = 4\sqrt{2}$ $P = 24$ $V = 8$ 	<p><i>Przykład</i></p> $d = \sqrt{17}$ $P_p = 4$ $P_0 = 6\sqrt{2}$ $P = 32$ $V = 12$ 	<p><i>Przykład</i></p> $d = \sqrt{14}$ $P_p = 18$ $P_0 = 3\sqrt{5}$ $P = 22$ $V = 6$ 

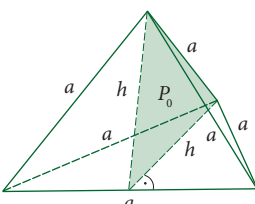
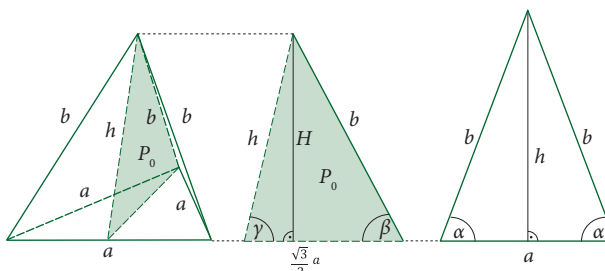
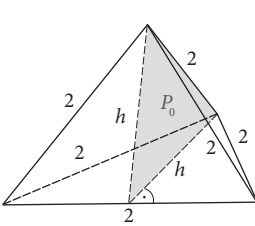
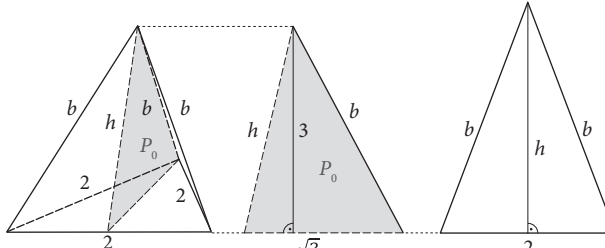
<p>Gnaniostłup prawidłowy⁽²⁾ trójkątny</p> $d = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4H^2}$ $P_b = 3aH \quad P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $P_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}aH$ $P = \frac{1}{2}a(\sqrt{3}a + 6H)$ $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2H$ 	<p>Gnaniostłup prawidłowy⁽²⁾ sześciokątny</p> $d = \sqrt{4a^2 + H^2}$ $P_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ $P_b = 6aH$ $P_0 = 2aH$ $P = 3a(\sqrt{3}a + 2H)$ $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2H$ 	<p>Gnaniostłup prawidłowy⁽²⁾ n-kątny</p> $P_p = \frac{na^2}{4} \text{ctg} \frac{180^\circ}{n}$ $P_b = naH$ $P = 2P_p + P_b$ $V = P_pH$ 
<p><i>Przykład</i></p> $d = 2\sqrt{3}$ $P_p = \sqrt{3}$ $P_b = 18$ $P_0 = 3\sqrt{3}$ $P = 2\sqrt{3} + 18$ $V = 3\sqrt{3}$ 	<p><i>Przykład</i></p> $d = 5$ $P_p = 6\sqrt{3}$ $P_b = 36$ $P_0 = 12$ $P = 12\sqrt{3} + 36$ $V = 3\sqrt{3}$ 	<p><i>Przykład</i></p> $n = 12$ $P_b = 72$ $P_p = 12 \text{ctg} 15^\circ = 12\sqrt{3} + 24$ $P = 24\sqrt{3} + 20$ $V = 36\sqrt{3} + 72$ 

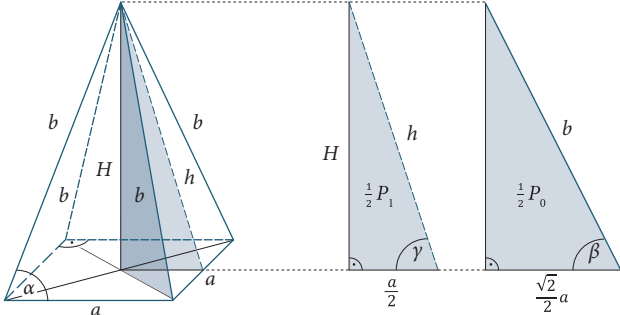
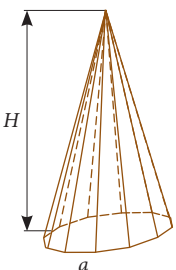
(1) Tzn. krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzn podstaw.

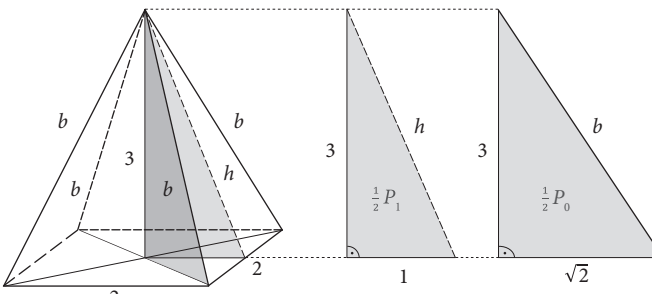
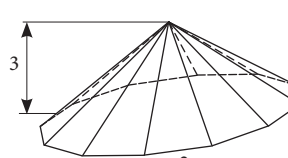
Bryły obrotowe

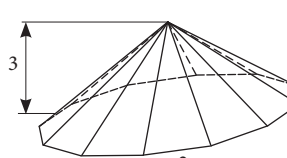
<p>Walec</p> $H^2 + 4r^2 = d^2$ $P_p = \pi r^2$ $P_b = 2\pi rH$ $P_0 = 2rH$ $P = 2\pi r(H + r)$ $V = \pi r^2H$ 	<p>Stożek</p> $r = t \cos \alpha$ $H^2 + r^2 = t^2$ $P_p = \pi r^2$ $P_b = \pi r t$ $P_0 = rH$ $P = \pi r(r + t)$ $V = \frac{1}{3}\pi r^2H$ 	<p>Kula</p> $P_0 = \pi r^2$ $P = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 	<p>Torus</p> $P_0 = \pi r^2$ $P = 4\pi^2 Rr$ $V = 2\pi^2 Rr^2$ 
<p><i>Przykład</i></p> $P_p = 4\pi$ $P_b = 12\pi$ $P_0 = 12$ $P = 20\pi$ $V = 12\pi$ 	<p><i>Przykład</i></p> $t = \sqrt{13}$ $P_p = 4\pi$ $P_b = 2\sqrt{13}\pi$ $P_0 = 6$ $P = 2(\sqrt{13} + 2)\pi$ $V = 4\pi$ 	<p><i>Przykład</i></p> $P_0 = 4\pi$ $P = 16\pi$ $V = \frac{16}{3}\pi$ 	<p><i>Przykład</i></p> $P_0 = \pi$ $P = 12\pi^2$ $V = 24\pi^2$ 

Ostrosłupy proste⁽³⁾

<p>Czworościan</p> $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ $P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $P_b = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ $P_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$ $P = \sqrt{3}a^2$ $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 	<p>Ostrosłup prawidłowy⁽²⁾ trójkątny</p> $h = b \sin \alpha$ $H = b \sin \beta = h \sin \gamma$ $H^2 + \frac{1}{12}a^2 = h^2$ $P_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $P_b = \frac{3}{2}ah = \frac{3}{2}ab \sin \alpha$ $P_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}aH$ $P = a \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a + 3h \right)$ $V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2H$ 
<p><i>Przykład</i></p> $h = \sqrt{3}$ $P_p = \sqrt{3}$ $P_0 = \sqrt{2}$ $P = 4\sqrt{3}$ $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 	<p><i>Przykład</i></p> $h = \frac{2\sqrt{21}}{3} \quad b = \frac{\sqrt{93}}{3}$ $P_p = \sqrt{3}$ $P_b = 2\sqrt{21}$ $P_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $P = 4\sqrt{21} + \sqrt{3}$ $V = \sqrt{3}$ 

<p>Ostrosłup prawidłowy⁽²⁾ czworokątny (piramida)</p> $H = b \sin \beta = h \sin \gamma$ $H^2 + \frac{1}{4}a^2 = h^2$ $H^2 + \frac{1}{2}a^2 = b^2$ $P_p = a^2$ $P_b = 2ah$ $P_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}aH$ $P_1 = \frac{1}{2}aH$ $P = a(a + 2h)$ $V = \frac{1}{3}a^2H$ 	<p>Ostrosłup prawidłowy⁽²⁾ n-kątny</p> $h^2 = H^2 + \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$ $P_p = \frac{na^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$ $P_b = \frac{nah}{2}$ $P = P_p + P_b$ $V = \frac{1}{3}P_pH$ 
---	--

<p><i>Przykład</i></p> $h = \sqrt{10}$ $b = \sqrt{11}$ $P_p = 4$ $P_b = 4\sqrt{10}$ $P_0 = 3\sqrt{2}$ $P_1 = 3$ $P = 4\sqrt{10} + 4$ $V = 4$ 	<p><i>Przykład</i></p> $n = 12$  $h = 2\sqrt{\sqrt{3} + 4}$ $P_p = 12 \operatorname{ctg} 15^\circ = 12\sqrt{3} + 24$ $P_b = 24\sqrt{\sqrt{3} + 4}$ $P = 24\sqrt{\sqrt{3} + 4} + 12\sqrt{3} + 24$ $V = 12\sqrt{3} + 24$
--	---

<p><i>Oznaczenia</i></p> <p>a, b, c – długości krawędzi⁽⁴⁾ n – liczba boków przystających⁽⁷⁾ d – długość przekątnej przekroju⁽⁴⁾</p> <p>α, β, γ – miary kątów⁽⁵⁾ h – wysokość ściany bocznej⁽⁴⁾ H – wysokość bryły⁽⁴⁾</p> <p>P_p – pole powierzchni podstawy⁽⁶⁾ P_b – pole powierzchni ścian bocznych⁽⁶⁾ $P_{0/1}$ – pole powierzchni wybranego przekroju⁽⁶⁾</p> <p>P – pole powierzchni całkowitej bryły⁽⁶⁾ V – objętość bryły⁽⁸⁾</p>	<p><i>Przykład</i></p> $n = 12$  $h = 2\sqrt{\sqrt{3} + 4}$ $P_p = 12 \operatorname{ctg} 15^\circ = 12\sqrt{3} + 24$ $P_b = 24\sqrt{\sqrt{3} + 4}$ $P = 24\sqrt{\sqrt{3} + 4} + 12\sqrt{3} + 24$ $V = 12\sqrt{3} + 24$
---	---

(2) W podstawach są wielokąty foremne → Wielokąty foremne → Wybrane figury planimetrii → Temat 73
 (3) Wszystkie krawędzie boczne są pod takimi samymi kątami do płaszczyzny podstawy.
 (4) Wielkości w jednostkach długości, np. w metrach [m], decymetrach [dm], centymetrach [cm] itp. → Jednostki wielokrotne i podwielokrotne → Dodatki
 (5) Wielkości w jednostkach miar kątów, np. w stopniach [°], gradusach [g] lub bezmianowo [radiany] → Miary kątowe → Kąty i trójkąty → Temat 71
 (6) Wielkości w jednostkach pola, np. w metrach kwadratowych [m²], decymetrach kwadratowych [dm²], centymetrach kwadratowych [cm²] itp.
 (7) Liczby niemianowane (bez jednostki).
 (8) Wielkości w jednostkach objętości, np. w metrach sześciennych [m³], decymetrach sześciennych [dm³] (litrach), centymetrach sześciennych [cm³] (mililitrach) itp.
 Kup ksi k Pole ksi k

A

Alternatywa → [Temat 1](#)
 Argument funkcji → [Temat 14](#)
 Argument liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Asymptoty → [Temat 64](#)

B

Badanie funkcji → [Temat 64](#)
 Badanie funkcji wymiernych → [Temat 37](#)
 Badanie przebiegu zmienności wielomianów → [Temat 32](#)
 Badanie wielomianów → Badanie przebiegu zmienności wielomianów
 Błędy przybliżeń → [Temat 7](#)
 Bryły obrotowe → [Temat 74](#)
 Budowa twierdzenia → [Temat 1](#)

C

Całki nieoznaczone → [Temat 65](#)
 Całki oznaczone → [Temat 66](#)
 Całkowanie oznaczone przez części → [Temat 66](#)
 Całkowanie oznaczone przez podstawianie → [Temat 66](#)
 Całki podstawowe → [Temat 65](#)
 Całkowanie przez części → [Temat 65](#)
 Całkowanie przez podstawianie → [Temat 65](#)
 Cechy podzielności liczb całkowitych → [Temat 3](#)
 Ciąg malejący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg monotoniczny → [Temat 51](#)
 Ciąg monotoniczny na przedziałach → [Temat 51](#)
 Ciąg niemalejący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg nierosnący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg ograniczony → Własności ciągów liczbowych
 Ciąg okresowy → Własności ciągów liczbowych
 Ciąg rosnący → Ciąg monotoniczny
 Ciąg rozbieżny → [Temat 52](#)
 Ciąg różnowartościowy → Własności ciągów liczbowych
 Ciąg stały → Ciąg monotoniczny
 Ciąg zbieżny → [Temat 52](#)
 Ciągi arytmetyczne → [Temat 53](#)
 Ciągi geometryczne → [Temat 53](#)
 Ciągi liczbowe → [Temat 51](#)
 Ciąg sum częściowych → Szeregi geometryczne
 Ciągi szczególne → [Temat 53](#)
 Ciągłość funkcji → [Temat 58](#)
 Ciągłość funkcji w punkcie → Ciągłość funkcji
 Cięciwa → [Temat 72](#)
 Cosecans → [Temat 43, 45](#)
 Cosinus → [Temat 43, 45](#)
 Cotangens → [Temat 43, 45](#)
 Część rzeczywista liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Część urojona liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Część wspólna zbiorów → Iloczyn zbiorów
 Czworokąt → [Temat 73](#)
 Czworoscian → [Temat 74](#)

D

Deltoid → [Temat 73](#)
 Długość wektora → [Temat 75](#)
 Dodawanie → Działania
 Dodawanie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Dodawanie macierzy → Działania na macierzach
 Dodawanie ułamków → Działania na ułamkach
 Dodawania wielomianów → Działania na wielomianach
 Dopełnienie dopełnienia zbioru → [Temat 2](#)
 Dopełnienie iloczynu zbioru i jego dopełnienia → [Temat 2](#)
 Dopełnienie zbioru → [Temat 2](#)
 Dopełnienie iloczynu zbiorów → Prawa de Morgana
 Dopełnienie sumy zbiorów → Prawa de Morgana
 Doświadczenie losowe → [Temat 68](#)

Dowolna potęga różnicy → [Temat 10](#)
 Dowolna potęga sumy → [Temat 10](#)
 Działania → [Temat 8](#)
 Działania logiczne → [Temat 1](#)
 Działania na liczbach zespolonych → [Temat 11](#)
 Działania na macierzach → [Temat 19](#)
 Działania na ułamkach → [Temat 5](#)
 Działania na wektorach → [Temat 75](#)
 Działania na wielomianach → [Temat 29](#)
 Działania na zbiorach → [Temat 2](#)
 Dziedzina funkcji → [Temat 14, 64](#)
 Dzielenie → Działania
 Dzielenie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Dzielenie ułamków → Działania na ułamkach
 Dzielenie wielomianów → Działania na wielomianach

E

Eksperyment losowy → Doświadczenie losowe
 Ekstrema funkcji → [Temat 64](#)
 Ekstrema lokalne → [Temat 61](#)
 Element należący do zbioru → [Temat 2](#)
 Element nie należący do zbioru → [Temat 2](#)
 Element zbioru → [Temat 2](#)
 Elementy geometrii analitycznej → [Temat 79](#)
 Elementy statystyki → [Temat 70](#)
 Elementarne równania trygonometryczne → [Temat 46](#)
 Elipsa → [Temat 77, 78](#)

F

Falsz → [Temat 1](#)
 Figury planimetrii → [Temat 73](#)
 Figury w kole → [Temat 72](#)
 Forma zdaniowa → [Temat 1](#)
 Funkcja zdaniowa → Forma zdaniowa
 Funkcja → Funkcje
 Funkcja liniowa z parametrem → [Temat 15](#)
 Funkcja malejąca → Własności funkcji
 Funkcja niemalejąca → Własności funkcji
 Funkcja nieparzysta → Własności funkcji
 Funkcja nierosnąca → Własności funkcji
 Funkcja odwrotna → Własności funkcji
 Funkcja odwzorowująca „na” → Własności funkcji
 Funkcja odwzorowująca „w” → Własności funkcji
 Funkcja ograniczona → Własności funkcji
 Funkcja okresowa → Własności funkcji
 Funkcja parzysta → Własności funkcji
 Funkcja pierwotna → Całki nieoznaczone
 Funkcja pierwszego stopnia → Funkcje liniowe
 Funkcja rosnąca → Własności funkcji
 Funkcja różniczkowalna → Różniczkowalność funkcji
 Funkcja różniczkowalna w przedziale → Różniczkowalność funkcji
 Funkcja różniczkowalna w punkcie → Różniczkowalność funkcji
 Funkcja różnowartościowa → Własności funkcji
 Funkcja stała → Funkcje liniowe, Własności funkcji
 Funkcja wielokrotnie złożona → [Temat 63](#)
 Funkcja wklęsła → Własności funkcji
 Funkcja wypukła → Własności funkcji
 Funkcje → [Temat 14](#)
 Funkcje homograficzne → [Temat 35](#)
 Funkcje kwadratowe → [Temat 24](#)
 Funkcje liniowe → [Temat 15](#)
 Funkcje logarytmiczne → [Temat 42](#)
 Funkcje „na” → [Temat 47](#)
 Funkcje odwrotne → [Temat 48](#)
 Funkcje potęgowe → [Temat 39](#)
 Funkcje trygonometryczne → [Temat 45](#)
 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta → [Temat 43](#)

Funkcje trygonometryczne kąta podwojonego → *Temat 44*
 Funkcje trygonometryczne połowy kąta → *Temat 44*
 Funkcje trygonometryczne sumy/różnicy kątów → *Temat 44*
 Funkcje „w” → *Temat 47*
 Funkcje wielomianowe → Wielomiany
 Funkcje wykładnicze → *Temat 40*
 Funkcje wymierne → *Temat 37*
 Funkcje z wartością bezwzględną → *Temat 50*

G

Geometria analityczna → Elementy geometrii analitycznej
 Gradus → Miara gradusowa kąta
 Gniastostłup prawidłowy → *Temat 74*
 Gniastostłup prawidłowy, trójkątny → *Temat 74*
 Granica iloczynu ciągów → Własności granic ciągu
 Granica iloczynu ciągu przez liczbę → Własności granic ciągu
 Granica iloczynu funkcji → Własności granic funkcji
 Granica ilorazu ciągów → Własności granic ciągu
 Granica ilorazu różnicowego → Pochodna funkcji w punkcie
 Granica ilorazu funkcji → Własności granic funkcji
 Granica różnicy ciągów → Własności granic ciągu
 Granica różnicy funkcji → Własności granic funkcji
 Granica sumy ciągów → Własności granic ciągu
 Granica sumy funkcji → Własności granic funkcji
 Granica właściwa ciągu liczbowego → Granice ciągów
 Granice ciągów → *Temat 52*
 Granice funkcji → *Temat 64*
 Granice funkcji lewostronne w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji niewłaściwe → *Temat 55*
 Granice funkcji niewłaściwe w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji obustronne w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji prawostronne w punkcie → Granice funkcji w punkcie
 Granice funkcji w minus nieskończoności → *Temat 55*
 Granice funkcji w punkcie → *Temat 56*
 Granice funkcji w nieskończoności → *Temat 55*
 Granice funkcji właściwe → *Temat 55*
 Granice funkcji właściwe w punkcie → Granice funkcji w punkcie

H

Hierarchia inkluzji zbiorów liczbowych → *Temat 8*
 Hiperbola → *Temat 77, 78*

I

Iloczyn kartezjański → Produkt kartezjański
 Iloczyn skalarny wektorów → Działania na wektorach
 Iloczyn wektora przez liczbę → Działania na wektorach
 Iloczyn zbiorów → *Temat 2*
 Iloczyn zdarzeń losowych → *Temat 68*
 Iloraz ciągu geometrycznego → *Temat 53*
 Iloraz różnicowy → *Temat 59*
 Implikacja → *Temat 1*
 Indukcja matematyczna → *Temat 3, 4*
 Indukcja zupełna → Indukcja matematyczna
 Infimum → Kresy zbiorów
 Inkluzja zbiorów → *Temat 2*
 Inkluzja zbiorów liczbowych → Hierarchia inkluzji zbiorów liczbowych
 Inkluzja zdarzeń losowych → Zdarzenie losowe pociągające inne zdarzenie
 Interpretacja geometryczna liczb zespolonych → *Temat 11*
 Interpretacje geometryczne szeregów geometrycznych, zbieżnych → *Temat 54*
 Interpretacja graficzna całek oznaczonych → *Temat 66*
 Interpretacja graficzna pochodnej funkcji w punkcie → *Temat 59*
 Interpretacja graficzna równań i nierówności wymiernych → *Temat 38*
 Interpretacja graficzna różniczkowalności → *Temat 60*
 Interpretacja graficzna wektora → *Temat 75*
 Interpretacje graficzne opisu prostych → *Temat 76*
 Izometria → Przekształcenie izometryczne płaszczyzny

J

Jednokładności → *Temat 80*
 Jednokładność → Jednokładności
 Jednostka urojona → *Temat 11*
 Jedyńska trygonometryczna → *Temat 44*
 Język prawdopodobieństwa → *Temat 68*

K

Kąt nachylenia prostej → *Temat 15*
 Kąt środkowy → *Temat 72*
 Kąt wpisany → *Temat 72*
 Kąty → *Temat 71*
 Kąty w okręgu/kole → *Temat 72*
 Klasy abstrakcji → *Temat 13*
 Koło → *Temat 72, 73*
 Kombinacja → *Temat 67*
 Kombinacja liniowa wersorów → *Temat 75*
 Kombinatoryka → *Temat 67*
 Koniunkcja → *Temat 1*
 Kontrapozycja twierdzenia → *Temat 1*
 Kresy zbiorów → *Temat 7*
 Krotność pierwiastka wielomianu → *Temat 30*
 Krzywe stożkowe → *Temat 77, 78*
 Kula → *Temat 74*
 Kwadrat → *Temat 73*
 Kwadrat różnicy → *Temat 10*
 Kwadrat sumy → *Temat 10*
 Kwantyfikator duży → Kwantyfikatory
 Kwantyfikator mały → Kwantyfikatory
 Kwantyfikator ogólny → Kwantyfikatory
 Kwantyfikator szczegółowy → Kwantyfikatory
 Kwantyfikatory → *Temat 1*

L

Liczba e → *Temat 7*
 Liczba Nepera → Liczba e
 Liczba pi → *Temat 7*
 Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych → *Temat 68*
 Liczba wszystkich zdarzeń losowych → *Temat 68*
 Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia → *Temat 68*

Liczby całkowite → *Temat 3*
 Liczby naturalne → *Temat 3*
 Liczby niewymierne → *Temat 7*
 Liczby pierwsze → *Temat 3*
 Liczby rzeczywiste → *Temat 8*
 Liczby wymierne → *Temat 5*
 Liczby zespolone → *Temat 11*
 Logarytmowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Logarytmy → *Temat 41*
 Logika → Rachunek zdań

Ł

Łączność alternatywy → *Temat 2*
 Łączność koniunkcji → *Temat 2*

M

Macierz dopełnień algebraicznych → *Temat 19*
 Macierz jednostkowa → *Temat 19*
 Macierz kwadratowa → *Temat 19*
 Macierz odwrotna → *Temat 19*
 Macierz transponowana → *Temat 19*
 Macierz uzupełniona → *Temat 22*
 Macierze → *Temat 19*
 Maksimum → *Temat 7*
 Maksimum lokalne funkcji → Ekstrema lokalne
 Metoda grupowania → *Temat 33*

- Metoda macierzowa rozwiązywania układów Cramera → *Temat 21*
 Metoda wyznaczkowa rozwiązywania układów Cramera → *Temat 21*
 Miara gradusowa kąta → *Temat 71*
 Miara kąta między prostymi → *Temat 76*
 Miara łukowa kąta → *Temat 71*
 Miara stopniowa kąta → *Temat 71*
 Miary kątowe → *Temat 71*
 Miejsce zerowe → *Temat 14*
 Minimum → *Temat 7*
 Minimum lokalne funkcji → Ekstrema lokalne
 Minor macierzy → *Temat 20*
 Mnożenie → Działania
 Mnożenie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Mnożenie macierzy przez liczbę → Działania na macierzach
 Mnożenie macierzy przez macierz → Działania na macierzach
 Mnożenie ułamków → Działania na ułamkach
 Mnożenie wielomianów → Działania na wielomianach
 Moc przestrzeni zdarzeń elementarnych → *Temat 68*
 Moc zdarzenia losowego → *Temat 68*
 Moduł liczby zespolonej → *Temat 11*
 Moduł wektora → Długość wektora
 Moivre'a wzory → Wzory de Moivre'a
 Monotoniczność funkcji → *Temat 47, 61, 64*
 Monotoniczność funkcji logarytmicznych
 → Własności funkcji logarytmicznych
 Monotoniczność funkcji potęgowych → Własności funkcji potęgowych
 Monotoniczność funkcji trygonometrycznych w przedziałach
 → *Temat 45*
 Monotoniczność funkcji wykładniczych
 → Własności funkcji wykładniczych
- N**
 Nadzbiór zbioru → Zbiór zawierający się w innym zbiorze
 Nadzieja matematyczna → Wartość oczekiwana
 Najmniejsza wspólna wielokrotność → *Temat 3*
 Największy wspólny dzielnik → *Temat 3*
 Negacja → Zaprzeczenie
 Negacja alternatywy → Prawa de Morgana
 Negacja koniunkcji → Prawa de Morgana
 Nierówności homograficzne → *Temat 36*
 Nierówności kwadratowe → *Temat 26*
 Nierówności kwadratowe z parametrem → *Temat 28*
 Nierówności liniowe z jedną niewiadomą → *Temat 16*
 Nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi → *Temat 17*
 Nierówności logarytmiczne → *Temat 42*
 Nierówności trygonometryczne → *Temat 46*
 Nierówności wielomianowe → *Temat 34*
 Nierówności wykładnicze → *Temat 40*
 Nierówności wymierne → *Temat 38*
 Nierówność liniowa z jedną niewiadomą → Nierówności liniowe
 Nierówność liniowa z parametrem → *Temat 16*
 Nierówność pierwszego stopnia → Nierówności liniowe
 Nierówność sprzeczna → *Temat 16, 34*
 Nierówność tożsamościowa → *Temat 16, 34*
- O**
 Obraz dziedziny funkcji → *Temat 14*
 Obroty → *Temat 80*
 Odchylenie standardowe → *Temat 70*
 Odcinek koła → *Temat 72, 73*
 Odejmnowanie → Działania
 Odejmnowanie liczb zespolonych → Działania na liczbach zespolonych
 Odejmnowanie macierzy → Działania na macierzach
 Odejmnowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Odejmnowanie wielomianów → Działania na wielomianach
 Odległość między punktami → *Temat 79*
 Odległość punktu od prostej → *Temat 76, 79*
- Odwracalność funkcji → *Temat 47*
 Ograniczenia zbiorów → *Temat 7*
 Ograniczoność funkcji → *Temat 47*
 Ograniczoność funkcji trygonometrycznych
 → Własności funkcji trygonometrycznych
 Okrąg → *Temat 72, 77, 78*
 Okrąg opisany na czworokącie → *Temat 72*
 Okrąg opisany na trójkącie → *Temat 72*
 Okrąg wpisany w czworokąt → *Temat 72*
 Okrąg wpisany w trójkąt → *Temat 72*
 Okresowość funkcji → *Temat 47*
 Okresowość funkcji trygonometrycznych
 → Własności funkcji trygonometrycznych
 Operacje na ułamkach → *Temat 5*
 Opis słowny funkcji → Sposoby opisu funkcji
 Opis wektora → *Temat 75*
 Opis werbalny funkcji → Sposoby opisu funkcji
 Opisy ciągów liczbowych → *Temat 51*
 Ostrosłup prawidłowy → *Temat 74*
 Ostrosłup prawidłowy, czworokątny → *Temat 74*
 Ostrosłup prawidłowy, trójkątny → *Temat 74*
 Ostrosłupy proste → *Temat 74*
 Ośmiokąt foremny → *Temat 73*
 Otoczenie punktu → *Temat 59*
- P**
 Para uporządkowana → *Temat 13*
 Parabola → Wykresy funkcji kwadratowych, → *Temat 77, 78*
 Parzystość funkcji potęgowych → Własności funkcji potęgowych
 Parzystość funkcji trygonometrycznych
 → Własności funkcji trygonometrycznych
 Permutacja → *Temat 67*
 Pęk prostych → *Temat 79*
 Pierścień → *Temat 72, 73*
 Pierwiastek arytmetyczny → *Temat 8*
 Pierwiastek podwójny wielomianu
 → Pierwiastek wielokrotny wielomianu
 Pierwiastek pojedynczy wielomianu
 → Pierwiastek wielokrotny wielomianu
 Pierwiastek potrójny wielomianu
 → Pierwiastek wielokrotny wielomianu
 Pierwiastek wielokrotny wielomianu → *Temat 30*
 Pierwiastek z liczby ujemnej → *Temat 8*
 Pierwiastki → *Temat 9*
 Pierwiastki całkowite i wymierne wielomianów
 → Pierwiastki wielomianów
 Pierwiastki równania kwadratowego → *Temat 25*
 Pierwiastki wielomianów → *Temat 30*
 Pierwiastkowanie liczb zespolonych → Wzory de Moivre'a
 Pierwiastkowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Pięciokąt foremny → *Temat 73*
 Piramida → Ostrosłup prawidłowy, czworokątny
 Planimetria → Wybrane figury planimetrii
 Pochodna funkcji jako funkcja → Pochodne funkcji
 Pochodna funkcji w punkcie → *Temat 59*
 Pochodne funkcji → *Temat 61, 64*
 Pochodne funkcji cyklometrycznych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji elementarnych → *Temat 62*
 Pochodne funkcji logarytmicznych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji nieelementarnych → *Temat 63*
 Pochodne funkcji odwrotnych → *Temat 63*
 Pochodne funkcji potęgowych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji trygonometrycznych
 → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji wielomianowych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji wykładniczych → Pochodne funkcji elementarnych
 Pochodne funkcji wymiernych → Pochodne funkcji elementarnych

Pochodne funkcji złożonych → [Temat 63](#)
 Pochodne iloczynu funkcji → [Temat 63](#)
 Pochodne ilorazu funkcji → [Temat 63](#)
 Pochodne różnicy funkcji → [Temat 63](#)
 Pochodne sumy funkcji → [Temat 63](#)
 Podmacierz → [Temat 20](#)
 Podobieństwo trójkątów → [Temat 71](#)
 Podstawowe wzory logarytmiczne → [Temat 41](#)
 Podzbiór zbioru → Zbiór zawierający się w innym zbiorze
 Pojęcia trygonometryczne → [Temat 43](#)
 Pola figur pod krzywymi → Interpretacja graficzna całek oznaczonych
 Pole trójkąta → [Temat 71](#)
 Postać iloczynowa funkcji kwadratowych → [Temat 24](#)
 Postać kanoniczna funkcji homograficznych → Funkcje homograficzne
 Postać kanoniczna funkcji kwadratowych → [Temat 24](#)
 Postać kanoniczna liczby zespolonej → [Temat 11](#)
 Postać kierunkowa prostej → [Temat 15, 76](#)
 Postać odcinkowa prostej → [Temat 76](#)
 Postać ogólna funkcji homograficznych → Funkcje homograficzne
 Postać ogólna funkcji kwadratowych → [Temat 24](#)
 Postać ogólna funkcji potęgowych → Funkcje potęgowe
 Postać ogólna funkcji wymiernych → Funkcje wymierne
 Postać ogólna nierówności wielomianowych
 → Nierówności wielomianowe
 Postać ogólna prostej → [Temat 17, 76](#)
 Postać ogólna półpłaszczyzny → [Temat 17](#)
 Postać ogólna równań wielomianowych → Równania wielomianowe
 Postać ogólna strony prostej → [Temat 17](#)
 Postać parametryczna prostej → [Temat 76](#)
 Postać trygonometryczna liczb zespolonych → [Temat 11](#)
 Postać wyznacznikowa prostej → [Temat 76](#)
 Potęga → [Temat 8, 9](#)
 Potęgi → [Temat 9](#)
 Potęgowanie liczb zespolonych → Wzory de Moivre'a
 Potęgowanie ułamków → Działania na ułamkach
 Powinowactwa → [Temat 80](#)
 Powinowactwa wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji
 Powinowactwo prostokątne → Powinowactwa
 Półpłaszczyzna → [Temat 17](#)
 Prawa de Morgana → [Temat 2](#)
 Prawda → [Temat 1](#)
 Prawdopodobieństwo → [Temat 68, 69](#)
 Prawdopodobieństwo całkowite → [Temat 69](#)
 Prawdopodobieństwo klasyczne → Prawdopodobieństwo
 Prawdopodobieństwo warunkowe → [Temat 69](#)
 Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego → Prawdopodobieństwo
 Prawo logiczne → [Temat 1](#)
 Prawo podwójnego zaprzeczenia → [Temat 2](#)
 Prawo sprzeczności → [Temat 2](#)
 Prawo wyłączonego środka → [Temat 2](#)
 Prawo zaprzeczenia implikacji → [Temat 2](#)
 Procent składany → [Temat 6](#)
 Procenty → [Temat 6](#)
 Produkt kartezjański → [Temat 13](#)
 Promile → [Temat 6](#)
 Proporcjonalność prosta → Funkcje liniowe
 Prosta → [Temat 17](#), → Proste na płaszczyźnie
 Prosta przechodząca przez dwa punkty → [Temat 79](#)
 Proste → [Temat 79](#)
 Proste i punkty → Punkty i proste
 Proste i wektory → [Temat 79](#)
 Proste na płaszczyźnie → [Temat 76](#)
 Proste w postaci kierunkowej → [Temat 79](#)
 Proste w postaci ogólnej → [Temat 79](#)
 Prostokąt → [Temat 73](#)
 Prostopadłościan → [Temat 74](#)
 Prostopadłościan prawidłowy, czworokątny → [Temat 74](#)

Prostopadłość wektorów → [Temat 75](#)
 Przeciwdziedzina funkcji → [Temat 14](#)
 Przedział domknięty → Przedziały liczbowe
 Przedział lewostronnie domknięty → Przedziały liczbowe
 Przedział otwarty → Przedziały liczbowe
 Przedział prawostronnie domknięty → Przedziały liczbowe
 Przedziały liczbowe → [Temat 8](#)
 Przedziały nieograniczone → Przedziały liczbowe
 Przekroje stożka → [Temat 78](#)
 Przekrój zdarzeń losowych → Iloczyn zdarzeń losowych
 Przekształcenia płaszczyzny → [Temat 80](#)
 Przekształcenia wykresów funkcji → [Temat 49](#)
 Przekształcenie izometryczne płaszczyzny → [Temat 80](#)
 Przemienność alternatywy → [Temat 2](#)
 Przemienność iloczynu zbiorów → [Temat 2](#)
 Przemienność koniunkcji → [Temat 2](#)
 Przemienność sumy zbiorów → [Temat 2](#)
 Przesunięcia → [Temat 80](#)
 Przesunięcia wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji
 Przestrzeń → [Temat 2](#)
 Przestrzeń zdarzeń elementarnych → [Temat 68](#)
 Przybliżenia liczb → [Temat 7](#)
 Przypadki szczególne funkcji kwadratowych → [Temat 23](#)
 Punkty → [Temat 79](#)
 Punkty i proste → [Temat 79](#)
 Punkty przegięcia funkcji → [Temat 61, 64](#)

R

Rachunek zbiorów → [Temat 2](#)
 Rachunek zdań → [Temat 1](#)
 Radian → Miara łukowa kąta
 Reguła de l'Hospitala → [Temat 57](#)
 Relacja → Relacje
 Relacja liniowego porządku → Własności relacji
 Relacja równoważności → Własności relacji
 Relacje → [Temat 13](#)
 Relacje na zbiorach → [Temat 2](#)
 Reszta z dzielenia wielomianu → [Temat 31](#)
 Romb → [Temat 73](#)
 Rozdzielność alternatywy względem koniunkcji → [Temat 2](#)
 Rozdzielność iloczyn względem sumy zbiorów → [Temat 2](#)
 Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy → [Temat 2](#)
 Rozdzielność sumy względem iloczynu zbiorów → [Temat 2](#)
 Rozkład asymetryczny → Rozkład dwumianowy
 Rozkład Bernoulliego → Rozkład dwumianowy
 Rozkład dwumianowy → [Temat 70](#)
 Rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze → [Temat 3](#)
 Rozkład symetryczny → Rozkład dwumianowy
 Rozkład wielomianu → Twierdzenie o rozkładzie wielomianu
 Rozkład zmiennej losowej → [Temat 70](#)
 Rozszerzanie ułamków → Operacje ułamkach
 Rozwiązanie nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)
 Rozwiązanie równania kwadratowego → [Temat 25](#)
 Rozwiązanie równania liniowego z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)
 Rozwiązywanie równań i nierówności homograficznych → [Temat 36](#)
 Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych → [Temat 38](#)
 Rozwiązywanie równań zespolonych → [Temat 12](#)
 Rozwiązywanie układów równań liniowych 2 na 2 → [Temat 18](#)
 Równania algebraiczne → Równania wielomianowe
 Równania kwadratowe → [Temat 25](#)
 Równania kwadratowe na dziedzinie zespolonej → Równania zespolone
 Równania kwadratowe z parametrem → [Temat 28](#)
 Równania kwadratowe ze zmienną zespoloną → Równania zespolone
 Równania kwadratowe, zespolone → Równania zespolone
 Równania liniowe → [Temat 16](#)
 Równania liniowe z dwiema niewiadomymi → [Temat 17](#)
 Równania liniowe z jedną niewiadomą → [Temat 16](#)

Równania liniowe z parametrem → *Temat 16*

Równania logarytmiczne → *Temat 42*

Równania nieoznaczone → *Temat 16*

Równania homograficzne → *Temat 36*

Równania oznaczone → *Temat 16*

Równania pierwszego stopnia → Równania liniowe

Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą →

Równania liniowe

Równania sprzeczne → *Temat 16*

Równania tożsamościowe → *Temat 16*

Równanie tożsamościowe → *Temat 33*

Równania trygonometryczne → *Temat 46*

Równania wielomianowe → *Temat 33*

Równania wykładnicze → *Temat 40*

Równania wymierne → *Temat 38*

Równania zespolone → *Temat 12*

Równoległobok → *Temat 73*

Równoległość wektorów → *Temat 75*

Równość wektorów → *Temat 75*

Równość zbiorów → *Temat 2*

Równoważność → *Temat 1*

Różnica ciągu arytmetycznego → *Temat 53*

Różnica kwadratów → *Temat 10*

Różnica wektorów → Działania na wektorach

Różnica zbiorów → *Temat 2*

Różnica zdarzeń losowych → *Temat 68*

Różnice funkcji trygonometrycznych → *Temat 44*

Różniczkowalność funkcji → *Temat 60*

Różniczkowalność funkcji w punkcie → *Temat 59*

Różniczkowalność jednostronna funkcji w punkcie → *Temat 60*

Różniczkowalność lewostronna funkcji w punkcie → *Temat 60*

Różniczkowalność prawostronna funkcji w punkcie → *Temat 60*

Różnowartościowość funkcji → *Temat 47*

S

Sąsiedztwo lewostronne punktu → Sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwo prawostronne punktu → Sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwo punktu → *Temat 56*

Schemat Hornera → *Temat 33*

Schemat rozwiązywania zadań z kombinatoryki → *Temat 67*

Schemat rozwiązywania zadań z prawdopodobieństwa → *Temat 69*

Secans → *Temat 43, 45*

Silnia → *Temat 67*

Sinus → *Temat 43, 45*

Skracanie ułamków → Operacje ułamkach

Sposoby opisu funkcji → *Temat 14*

Sprowadzanie wielomianów do postaci iloczynowej → *Temat 33*

Stereometria → Wybrane figury stereometrii

Stopień → Miara stopniowa kąta

Stopień równania wielomianowego → *Temat 33*

Stożek → *Temat 74*

Strona prostej → *Temat 17*

Styczna do wykresu funkcji → *Temat 59*

Suma kwadratów → *Temat 10*

Suma → początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego → *Temat 53*

Suma → początkowych wyrazów ciągu geometrycznego → *Temat 53*

Suma nieskończonej liczby wyrazów ciągu arytmetycznego → *Temat 53*

Suma nieskończonej liczby wyrazów ciągu geometrycznego → *Temat 53*

Suma wektorów → Działania na wektorach

Suma zbiorów → *Temat 2*

Suma zbioru i jego dopełnienia → *Temat 2*

Suma zdarzeń losowych → *Temat 68*

Sumy funkcji trygonometrycznych → *Temat 44*

Superpozycja funkcji → *Temat 63*

Supremum → Kresy zbiorów

Symbol Newtona → *Temat 67*

Symbole granic ciągów → *Temat 52*

Symbole granic funkcji → *Temat 57*

Symetria osiowa → Powinowactwa

Symetria środkowa → Jednokładności

Symetrie funkcji logarytmicznych →

Własności funkcji logarytmicznych

Symetrie funkcji wykładniczych → Własności funkcji wykładniczych

Symetrie wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji

Szeregi geometryczne → *Temat 54*

Sześcian → *Temat 74*

Sześcian różnicy → *Temat 10*

Sześcian sumy → *Temat 10*

Sześcioąt foremny → *Temat 73*

Ś

Średnica → *Temat 72*

T

Tabela funkcji → Sposoby opisu funkcji, → Badanie funkcji

Tabela pojęć i symboli z prawdopodobieństwa → *Temat 68*

Tangens → *Temat 43, 45*

Tautologia → *Temat 1*

Teza → *Temat 1*

Torus → *Temat 74*

Tożsamości trygonometryczne → *Temat 44*

Transformacje wzorów funkcji homograficznych → *Temat 35*

Translacja → Przesunięcia

Translacje wykresów funkcji → Przekształcenia wykresów funkcji

Translacje wykresów funkcji homograficznych → *Temat 35*

Trapez → *Temat 73*

Trójkąt → *Temat 71, 73*

Trójkąt Pascala → *Temat 10, 67*

Trójkąt prostokątny → *Temat 73*

Trójkąt równoboczny → *Temat 73*

Trójkąt równoramienny → *Temat 73*

Trójkąty podobne → Podobieństwo trójkątów

Trygonometria → *Temat 43, 44, 45, 46*

Twierdzenia na indukcję, geometryczne → *Temat 4*

Twierdzenia na indukcję z podzielnością → *Temat 4*

Twierdzenia na indukcję z sumami ciągów → *Temat 4*

Twierdzenia o wielomianach → *Temat 31*

Twierdzenie → Budowa twierdzenia

Twierdzenie Bézouta → *Temat 31*

Twierdzenie cosinusów → *Temat 71*

Twierdzenie Kroneckera-Capelli → *Temat 22*

Twierdzenie o postaci iloczynowej wielomianu → *Temat 30*

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu → *Temat 31*

Twierdzenie odwrotne → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie Pitagorasa → *Temat 71*

Twierdzenie proste → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie przeciwne → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie przeciwstawne → Kontrapozycja twierdzenia

Twierdzenie sinusów → *Temat 71*

Twierdzenie Talesa → *Temat 71*

U

Układ nieoznaczony → *Temat 18, 22*

Układ niesprzeczny → *Temat 22*

Układ oznaczony → *Temat 18, 21, 22*

Układ sprzeczny → *Temat 18, 22*

Układ tożsamościowy → Układ nieoznaczony

Układy Cramera → *Temat 21*

Układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi → *Temat 18*

Układy n równań z n niewiadomymi → Układy Cramera

Układy równań Cramera → Układy Cramera

Układy równań liniowych → *Temat 22*

Ułamki dziesiętne → *Temat 5*

Ułamki okresowe → *Temat 5*

Ułamki zwykłe → Liczby wymierne

Usuwanie niewymierności z mianownika → *Temat 7*

W

Walec → *Temat 74*

Wariacja bez powtórzeń → *Temat 67*

Wariacja z powtórzeniami → *Temat 67*

Wariancja zmiennej losowej → *Temat 70*

Wartości trygonometryczne wybranych kątów → *Temat 43*

Wartość bezwzględna → *Temat 8*

Wartość funkcji → *Temat 14*

Wartość oczekiwana → *Temat 70*

Wartość średnia → Wartość oczekiwana

Wartość przeciętna → Wartość oczekiwana

Warunek prostokątności prostych → *Temat 79*

Warunek równoległości prostych → *Temat 79*

Wektor → *Temat 75*

Wektor jednostkowy → Wersory

Wektor prostopadły do prostej → *Temat 76, 79*

Wektor równoległy do prostej → *Temat 76, 79*

Wektory na płaszczyźnie → *Temat 75*

Wektor normalny do prostej → Wektor prostopadły do prostej

Wektor zerowy → *Temat 75*

Wektory i proste → Proste i wektory

Wersory → *Temat 75*

Wielokąt foremny → *Temat 73*

Wielomian zerowy → *Temat 29*

Wielomiany → *Temat 29*

Wielomiany w postaci iloczynowej → *Temat 30*

Wielomiany w postaci ogólnej → *Temat 29*

Własności całek → *Temat 65*

Własności całek oznaczonych → *Temat 66*

Własności ciągów liczbowych → *Temat 51*

Własności funkcji → *Temat 47*

Własności funkcji logarytmicznych → *Temat 42*

Własności funkcji potęgowych → *Temat 39*

Własności funkcji trygonometrycznych → *Temat 45*

Własności funkcji wykładniczych → *Temat 40*

Własności granic ciągu → *Temat 52*

Własności granic funkcji → *Temat 57*

Własności logarytmów → *Temat 41*

Własności prawdopodobieństwa → *Temat 69*

Własności relacji → *Temat 13*

Własności symbolu Newtona → Symbol Newtona

Własności wyznaczników → *Temat 20*

Włączanie całości do ułamka → Operacje ułamkach

Współczynnik kierunkowy prostej → *Temat 15, 76, 79*

Współczynnik kierunkowy wektora → *Temat 75*

Wybrane figury planimetrii → *Temat 73*

Wybrane figury stereometrii → *Temat 74*

Wybrane granice ciągów liczbowych → *Temat 52*

Wybrane granice funkcji → *Temat 57*

Wycinek koła → *Temat 72, 73*

Wykonalność działań → *Temat 8*

Wykres ciągu liczbowego → *Temat 51*

Wykres dyskretny → Wykres ciągu liczbowego

Wykres funkcji → Sposoby opisu funkcji, → *Temat 64*

Wykres funkcji liniowej → *Temat 15*

Wykres nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi → *Temat 17*

Wykres równań liniowych z dwiema niewiadomymi → *Temat 17*

Wykresy funkcji kwadratowych → *Temat 24, 27*

Wykresy funkcji odwrotnych → *Temat 48*

Wykresy funkcji potęgowych → *Temat 39*

Wykresy funkcji wymiernych → *Temat 37*

Wykresy wielomianów → *Temat 32, 34*

Wykresy wielomianów z dokładnością do znaków → *Temat 34*

Wyłączanie całości przed ułamek → Operacje ułamkach

Wypukłość funkcji → *Temat 47, 61, 64*

Wyraz wolny → *Temat 15*

Wyznacznik 2 na 2 → *Temat 18*

Wyznacznik macierzy kwadratowej → Wyznaczniki

Wyznaczniki → *Temat 20*

Wzory funkcji odwrotnych → *Temat 48*

Wzory de Moivre'a → *Temat 11*

Wzory redukcyjne → *Temat 45*

Wzory Viète'a → *Temat 24*

Wzór dwumianowy Newtona → *Temat 10*

Wzór funkcji → Sposoby opisu funkcji

Wzajemne położenie okręgów → *Temat 72*

Wzór Herona → Pole trójkąta

Wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego → *Temat 53*

Wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego → *Temat 53*

Wzór na n -ty wyraz ciągu liczbowego → Opisy ciągów liczbowych

Wzór rekurencyjny ciągu arytmetycznego → *Temat 53*

Wzór rekurencyjny ciągu geometrycznego → *Temat 53*

Wzór rekurencyjny ciągu liczbowego → Opisy ciągów liczbowych

Z

Zależności trygonometryczne w trójkącie prostokątnym → *Temat 43*

Założenie → *Temat 1*

Zamiana postaci prostych → *Temat 79*

Zaprzeczenie → *Temat 1*

Zaprzeczenie kwantyfikatora → *Temat 1*

Zasada indukcji → Indukcja matematyczna

Zawieranie się zbiorów → Inkluzja zbiorów

Zbieżność szeregu geometrycznego → *Temat 54*

Zbiór → *Temat 2*

Zbiór jednoelementowy → *Temat 2*

Zbiór skończony → *Temat 2*

Zbiór nieskończony, przeliczalny → *Temat 2*

Zbiór pusty → *Temat 2*

Zbiór wartości funkcji → *Temat 14*

Zbiór zawierający się w innym zbiorze → *Temat 2*

Zbiór zdarzeń elementarnych → *Temat 68*

Zdania logiczne → *Temat 1*

Zdania proste → Zdania logiczne

Zdania złożone → Zdania logiczne

Zdarzenia losowe wykluczające się → *Temat 68*

Zdarzenie elementarne → *Temat 68*

Zdarzenie elementarne sprzyjające zajściu zdarzenia losowego

→ *Temat 68*

Zdarzenie losowe → *Temat 68*

Zdarzenie losowe pociągające inne zdarzenie losowe → *Temat 68*

Zdarzenie losowe przeciwne → *Temat 68*

Zdarzenie niemożliwe → *Temat 68*

Zdarzenie pewne → *Temat 68*

Złożenie funkcji → *Temat 63*

Zmiana podstawy logarytmu → Własności logarytmów

Zmienna losowa → *Temat 70*

Zmienna losowa dyskretna → Zmienna losowa

Zmienna losowa skokowa → Zmienna losowa

Zmienna niezależna → *Temat 14*

Zmienna zależna → *Temat 14*


Znaki funkcji trygonometrycznych w przedziałach → *Temat 45*

Związki między funkcjami trygonometrycznymi → *Temat 44*

Związki między rachunkiem zdań, a rachunkiem zbiorów → *Temat 2*

PROGRAM PARTNERSKI

— GRUPY HELION —

- 
1. ZAREJESTRUJ SIĘ
 2. PREZENTUJ KSIĄŻKI
 3. ZBIERAJ PROWIZJĘ

Zmień swoją stronę WWW w działający bankomat!

Dowiedz się więcej i dołącz już dzisiaj!

<http://program-partnerski.helion.pl>

GRUPA
Helion

ATLAS MATEMATYCZNY

Twój przewodnik po krainie matematyki

- Przygotowujesz się do matury lub egzaminu?
- Chcesz szybko i sprawnie powtórzyć materiał?
- Nie lubisz wertować opastych podręczników?

Ta książka jest właśnie dla Ciebie!

Atlas matematyczny to kompendium wiedzy matematycznej na poziomie szkoły średniej, w którym łatwo i szybko znajdziesz wszelkie potrzebne Ci informacje. Na stosunkowo niewielu stronach zgromadzono tu cały materiał niezbędny, aby osiągnąć prawdziwe mistrzostwo w matematyce.

Bogata treść, zwarta forma, praktyczne przykłady zastosowań — wszystko to sprawi, że ten atlas stanie się nieodzowną pomocą w szkole, w trakcie przygotowań do matury z matematyki, a nawet w czasie pierwszych lat studiów. Poza uczniami i studentami z przyjemnością zajrzą do tej publikacji również wszyscy amatorzy matematyki elementarnej. To książka, która pomoże Ci dobrze i komfortowo poznać królową nauk!

- Logika i zbiory
- Liczby i działania na nich
- Relacje i funkcje
- Równania, nierówności i układy równań
- Wyznaczniki i macierze
- Trygonometria
- Ciągi liczbowe i szeregi
- Granice i pochodne funkcji
- Całki nieoznaczone i oznaczone
- Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka
- Planimetria i stereometria
- Geometria analityczna i rachunek wektorowy
- Krzywe stożkowe
- Tablice trygonometryczne i tablice działań

Atlas matematyczny — kompendium na szóstkę!

 Helion	<i>Sprawdź nasze szkolenia!</i> SZKOLENIA  AKADEMIA IT & BUSINESS WWW.SZKOLENIA.HELION.PL	KOD KORZYŚCI Sięgnij po więcej! ▶ 
 helion.pl		ISBN 978-83-283-4760-1  9 788328 347601
 HELION SA ul. Kościuszki 1c 44-100 Gliwice tel.: 32 230 98 63 helion@helion.pl		INFORMATYKA W NAJLEPSZYM WYDANIU
		Cena: 24,90 zł