DOROTA PEKASIEWICZ
KRYSTYNA PRUSKA

Analiza matematyczna
dla ekonomicznych kierunków studiów

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Wydanie II

Analiza matematyczna
dla ekonomicznych kierunków studiów

40 LAT
WYDAWNICTWA
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

DOROTA PEKASIEWICZ
KRYSTYNA PRUSKA

Analiza matematyczna
dla ekonomicznych kierunków studiów

Wydanie II

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

ŁÓDŹ 2013

Dorota Pekasiewicz, Krystyna Pruska – Katedra Metod Statystycznych
Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Uniwersytet Łódzki
90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 41/43

RECENZENT
Grażyna Trzpiot

SKŁAD I ŁAMANIE
Barbara Lebioda

PROJEKT OKŁADKI
Barbara Grzejszczak

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie II. W.06022.13.1.S

ISBN (wersja drukowana) 978-83-7525-968-1
ISBN (ebook) 978-83-7969-326-9

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

Spis treści

Przedmowa

Niniejszy podręcznik powstał na podstawie wykładów i ćwiczeń z analizy matematycznej i matematyki prowadzonych przez autorki na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym Uniwersytetu Łódzkiego.

Elementy analizy matematycznej występują w programach studiów wszystkich kierunków ekonomicznych, ale w różnym zakresie i na ogół w ramach przedmiotu matematyka. Na niektórych kierunkach prowadzony jest przedmiot o nazwie analiza matematyczna.

W podręczniku tym podjęto próbę opracowania takiego zakresu analizy matematycznej, aby mogli z niego korzystać studenci z różnych kierunków ekonomicznych i o różnym stopniu zaawansowania wymagań matematycznych. Czytelnik sam powinien dokonać wyboru odpowiednich fragmentów tekstu zgodnie ze swoimi oczekiwaniami.

Zagadnienia wstępne zawierają elementy logiki, teorii mnogości i topologii. Przedstawione są tu także zbiory liczb rzeczywistych i zespolonych oraz relacje.

W kolejnych rozdziałach zaprezentowane są ciągi liczb rzeczywistych i punktów z wielowymiarowych przestrzeni rzeczywistych, rzeczywiste funkcje jednej i wielu zmiennych oraz rachunek różniczkowy w tym zakresie, ciągi funkcji rzeczywistych, szeregi liczb rzeczywistych i funkcji rzeczywistych oraz rachunek całkowy rzeczywistych funkcji jednej i wielu zmiennych. W podręczniku zaprezentowane są również równania różniczkowe zwyczajne i metody ich rozwiązywania oraz elementy równań różnicowych.

Książka zawiera rozważania teoretyczne, przykłady o charakterze matematycznym i ekonomicznym oraz zadania do samodzielnego rozwiązania przez Czytelnika, do których podane są odpowiedzi.

Mamy nadzieję, że podręcznik ten spotka się z zainteresowaniem środowisk akademickich.

Autorki

1. Zagadnienia wstępne

1.1. Elementy logiki

Logika matematyczna jest działem matematyki, którego przedmiotem jest analiza zasad rozumowania oraz pojęć z nim związanych z wykorzystaniem metod i narzędzi matematycznych. Podstawowymi pojęciami są: zdanie, forma zdaniowa, funkcja zdaniowa i kwantyfikatory.

Definicja 1.1.1. Zdaniem nazywamy każde wyrażenie, któremu można przypisać jedną z ocen: prawdę lub fałsz. Prawda i fałsz to wartości logiczne zdania.

Zdania oznaczamy zwykle małymi literami, np. p, q, zaś wartość logiczną zdania – symbolem „1”, gdy jest ono prawdziwe oraz symbolem „0”, gdy jest fałszywe.

Wśród zdań wyróżniamy zdania proste i złożone. Zdania złożone składają się ze zdań prostych połączonych funktorami zdaniotwórczymi (spójnikami zdaniowymi). Do najczęściej stosowanych funktorów zdaniotwórczych należą: negacja (~), alternatywa ($\vee$), koniunkcja ($\wedge$), implikacja ($\Rightarrow$) i równoważność ($\Leftrightarrow$).

Przykłady 1.1.1. Przykładami zdań są następujące wyrażenia:

- Liczba $\sqrt{3}$ jest niewymierna.
- Romb jest kwadratem.
- Liczba 126 jest podzielna przez sześć i liczba 360 jest podzielna przez sześć.

Pierwsze i drugie wyrażenie to zdania proste, przy czym pierwsze jest prawdziwe, a drugie – fałszywe. Trzecie wyrażenie jest przykładem zdania złożonego, prawdziwego.

Definicja 1.1.2. Zdanie zawsze prawdziwe nazywamy tautologią.

Przykładami tautologii są zdania:

1) $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ (prawo podwójnego przeczenia),
2) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ (prawo de Morgana),
3) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ (prawo de Morgana),
4) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (prawo transpozycji),
5) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ (prawo implikacji),
6) $[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$,
7) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.

Istotnym zagadnieniem rachunku zdań jest sprawdzanie, czy dane zdanie jest tautologią. W tym celu rozważa się różne układy wartości logicznych zdań prostych, wchodzących w skład rozpatrywanego zdania i wyznacza się wartość logiczną tego zdania.

Podstawowe zasady określania wartości logicznej zdań złożonych są przedstawione w tabl. 1.1.1.

Tablica 1.1.1. Wartości logiczne negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności zdań p i q

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Źródło: opracowanie własne.

Przykłady 1.1.2.

- Zdanie $p \vee \sim p$ jest tautologią. Sprawdzenie wartości logicznej tego zdania związane jest z rozważeniem możliwych wariantów wartości logicznej zdania p, co przedstawione jest w tabl. 1.1.2.

Tablica 1.1.2. Wartości logiczne zdania $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
0	1	1
1	0	1

Źródło: opracowanie własne.

Zdanie $p \vee \sim p$ jest prawdziwe bez względu na wartość logiczną zdania p, czyli jest tautologią.

- Prawdziwość zdania $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$ sprawdzamy analogicznie. Wyniki zaprezentowane są w tabl. 1.1.3.

Tablica 1.1.3. Wartości logiczne zdania $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge \sim q)]$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Źródło: opracowanie własne.

Ostatnia kolumna tabl. 1.1.3. świadczy o prawdziwości rozważanego zdania bez względu na wartości logiczne zdań p i q, zatem jest ono tautologią.

Definicja 1.1.3. Wyrażenie, któremu nie można przypisać wartości logicznej, nazywamy formą zdaniową.

Definicja 1.1.4. Funkcją zdaniową określoną na zbiorze X nazywamy wyrażenie zawierające zmienne, które staje się zdaniem, jeśli za zmienne podstawimy konkretne wielkości. Zbiór X nazywamy dziedziną funkcji zdaniowej.

Funkcja zdaniowa jest formą zdaniową.

Przykłady 1.1.3.

- Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in R$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych R. Dla $x \in \{-2, 2\}$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \notin \{-2, 2\}$ – wartość logiczną 0.
- Wyrażenie $x^2 - 1 = 3$, gdzie $x \in N$, jest funkcją zdaniową, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych N. Dla $x = 2$ ma ono wartość logiczną 1, a dla $x \in N \setminus \{2\}$ – wartość logiczną 0.

- Wyrażenie $x^2 + y^2 = 0$, gdzie $x, y \in R$ to funkcja zdaniowa określona na zbiorze R. Dla $(x, y) = (0, 0)$ ma ono wartość logiczną 1, natomiast dla $(x, y) \neq (0, 0)$ – wartość logiczną 0.

W zapisie funkcji zdaniowych wykorzystuje się symbole zwane kwantyfikatorami.

Wyróżniamy:

- kwantyfikator ogólny (duży): $\forall$ – „ dla każdego…”,
- kwantyfikator szczegółowy (mały): $\exists$ – „istnieje…”.

Kwantyfikatory umożliwiają skrócenie zapisu funkcji zdaniowych.

Przykłady 1.1.4.

- Funkcję zdaniową „liczba naturalna x jest liczbą parzystą” można zapisać w postaci: $\underset{y\in N}{\exists} \quad (x = 2y)$.
- Funkcję zdaniową „liczba rzeczywista x jest liczbą pierwszą” można zapisać w postaci: $\underset{\substack{y,z\in R\\ y\neq x,\ z\neq x}}{\forall} \quad (x \neq y \cdot z)$.

Rachunek kwantyfikatorów charakteryzuje się następującymi własnościami:

1) $\sim\left(\underset{x\in X}{\exists} p(x)\right) \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\forall}(\sim p(x))$ (prawo de Morgana),

2) $\sim\left(\underset{x\in X}{\forall} p(x)\right) \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\exists}(\sim p(x))$ (prawo de Morgana),

3) $\underset{x\in X}{\exists}(p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\exists} p(x) \vee \underset{x}{\exists} q(x)$,

4) $\underset{x\in X}{\exists}(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \underset{x\in X}{\exists} p(x) \wedge \underset{x\in X}{\exists} q(x)$,

5) $\underset{x\in X}{\forall}(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \underset{x\in X}{\forall} p(x) \wedge \underset{x\in X}{\forall} q(x)$,

6) $\left(\underset{x\in X}{\forall} p(x)\right) \vee \left(\underset{x\in X}{\forall} q(x)\right) \Rightarrow \underset{x\in X}{\forall}(p(x) \vee q(x))$,

7) $\underset{x\in X}{\forall}(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow \left(\underset{x\in X}{\forall} p(x) \Rightarrow \underset{x\in X}{\forall} q(x)\right)$,

8) $\underset{x\in X}{\exists}\ \underset{y\in Y}{\forall} u(x, y) \Rightarrow \underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{x\in X}{\exists} u(x, y)$,

9) $\underset{x\in X}{\forall}\ \underset{y\in Y}{\forall} u(x, y) \Leftrightarrow \underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{x\in X}{\forall} u(x, y)$,

10) $\exists_{x\in X}\exists_{y\in Y} u(x,y) \Leftrightarrow \exists_{y\in Y}\exists_{x\in X} u(x,y)$,

gdzie p i q są funkcjami zdaniowymi zmiennej x o zakresie zmienności $X \neq \emptyset$ oraz u jest funkcją zdaniową zmiennych x i y o wartościach ze zbioru odpowiednio $X \neq \emptyset$ i $Y \neq \emptyset$.

Kwantyfikatory znajdują zastosowanie w wielu zapisach matematycznych. Korzysta się z nich przy formułowaniu definicji i twierdzeń.

1.2. Elementy teorii mnogości

Teoria mnogości jest działem matematyki zajmującym się badaniem ogólnych własności zbiorów, niezależnie od elementów, z których zbiory te są utworzone.

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, niedefiniowanym. Zbiory oznaczamy dużymi literami (np. $A, B, C, \ldots$) lub przedstawiamy, wypisując ich elementy (np. $\{2, 4, 6, 8\}$) albo podając funkcję zdaniową, którą muszą spełniać ich elementy np. $\left(\left\{x \in R : x^2 - 1 < 0\right\}\right)$. Elementy należące do zbiorów zwykle oznaczamy małymi literami: a, b, …

Na zbiorach można wykonywać różne operacje matematyczne. Poniżej przedstawione są podstawowe definicje z nimi związane, przy czym zakładamy, że wszystkie rozpatrywane zbiory są podzbiorami pewnego ustalonego zbioru zwanego przestrzenią i oznaczonego symbolem X.

Definicja 1.2.1. Mówimy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B, co zapisujemy $A \subset B$, jeśli dla każdego elementu x zachodzi warunek: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Znak „$\subset$” nazywamy znakiem inkluzji (zawierania).

Definicja 1.2.2. Dopełnieniem zbioru A w przestrzeni X nazywamy zbiór $A' = \{x \in X : x \notin A\}$.

Definicja 1.2.3. Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$, tzn. zbiór elementów należących przynajmniej do jednego ze zbiorów A i B.

Definicja 1.2.4. Iloczynem (mnogościowym) zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$, tzn. zbiór elementów, które należą zarówno do zbioru *A,* jak i do zbioru *B*.

Definicja 1.2.5. Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$, tzn. zbiór elementów należących do zbioru A i nienależących do zbioru *B*.

Różnicę zbiorów *A* i *B* możemy zapisywać również jako $A - B$.

Definicja 1.2.6. Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Przykłady 1.2.1.

- Niech dane będą zbiory $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $B = \{2, 4, 6, 10\}$. Wówczas $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B \setminus A = \{10\}$, $A \div B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$.
- Niech będą dane zbiory $A = \{x \in R:\ 2x - 1 \le 3\}$ i $B = \{x \in R:\ x^2 - 9 > 0\}$, czyli $A = \{x \in R:\ x \le 2\}$, $B = \{x \in R:\ x < -3 \vee x > 3\}$. Wówczas mamy $A' = \{x \in R:\ x > 2\}$, $B' = \{x \in R:\ -3 \le x \le 3\}$, $A \cup B = R \setminus \{x \in R:\ 2 < x \le 3\}$, $A \cap B = \{x \in R:\ x < -3\}$, $A \div B = \{x \in R:\ -3 \le x \le 2 \ \vee x > 3\}$, (ponieważ $A \setminus B = \{x \in R:\ -3 \le x \le 2\}$ oraz $B \setminus A = \{x \in R:\ x > 3\}$).

Niech *A*, *B*, *C*, *D* będą zbiorami zawartymi w tej samej przestrzeni X.
Działania na zbiorach charakteryzują się następującymi własnościami:

1) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$,
2) $A \cup B = B \cup A$,
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
4) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$,
5) $A \cap B = B \cap A$,
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
9) $A \setminus B \subset A$,

10) $(A \subset B) \wedge (C \subset D) \Rightarrow (A \setminus D) \subset (B \setminus C)$,

$$\left.\begin{array}{l} 11)\ (A \cup B)' = A' \cap B' \\ 12)\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array}\right\} \text{ prawa de Morgana.}$$

Definicja 1.2.7. Sumą uogólnioną zbiorów A_t, $t \in T$, gdzie T jest pewną rodziną (zbiorem) indeksów, nazywamy zbiór postaci $\bigcup_{t \in T} A_t = \left\{ x : \underset{t \in T}{\exists} \ x \in A_t \right\}$.

Definicja 1.2.8. Iloczynem uogólnionym zbiorów A_t, $t \in T$, gdzie T jest pewną rodziną (zbiorem) indeksów, nazywamy zbiór postaci $\bigcap_{t \in T} A_t = \left\{ x : \underset{t \in T}{\forall} \ x \in A_t \right\}$.

Symbolem R będziemy oznaczać zbiór liczb rzeczywistych, a symbolem N – zbiór liczb naturalnych.

Przykłady 1.2.2.

- Niech $A_n = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \right\}$ dla $n \in N$, czyli

$$A_1 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{2} \le x \le 1 \right\},$$

$$A_2 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2} \right\},$$

$$A_3 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{3} \right\},$$

…………………………..

Sumą uogólnioną zbiorów A_n, gdzie $n \in N$, jest zbiór $\bigcup_{t \in N} A_t = \{ x \in R : 0 < x \le 1 \}$, zaś iloczynem uogólnionym jest zbiór $\bigcap_{t \in N} A_t = \emptyset$.

- Niech $A_t = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{t^2+1} \le x \le t^2 + 1 \right\}$ dla $t \in R$ tzn.

$$A_0 = \{1\},$$

$$A_{-1} = A_1 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{2} \le x \le 2 \right\},$$

$A_{-2} = A_2 = \left\{ x \in R : \ \frac{1}{5} \le x \le 5 \right\}$,

……………………….

Sumą uogólnioną zbiorów A_t, gdzie $t \in R$, jest zbiór $\bigcup_{t \in R} A_t = \{x \in R : x > 0\}$,

zaś iloczynem uogólnionym jest zbiór $\bigcap_{t \in R} A_t = \{1\}$.

Poza iloczynem mnogościowym zbiorów określony jest iloczyn (produkt) kartezjański zbiorów.

Definicja 1.2.9. Iloczynem kartezjańskim niepustych zbiorów A i B nazywamy zbiór postaci $A \times B = \{(x, y): \ x \in A \ \wedge \ y \in B\}$.

Iloczyn kartezjański nie jest działaniem przemiennym, tzn. $A \times B \ne B \times A$, gdy $A \ne B$.

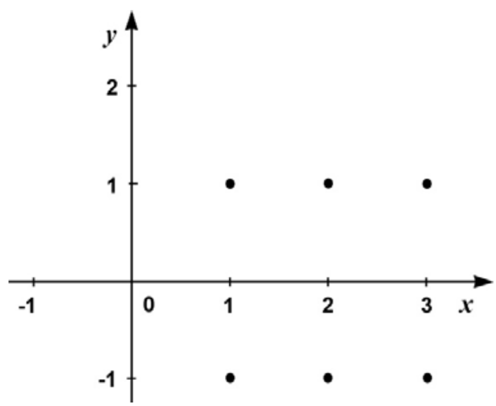
Przykłady 1.2.3.

- Niech $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{-1, 1\}$. Iloczyny kartezjańskie $A \times B$ i $B \times A$ są postaci:

$A \times B = \{(1, -1), (1, 1), (2, -1), (2, 1), (3, -1), (3, 1)\}$,
$B \times A = \{(-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

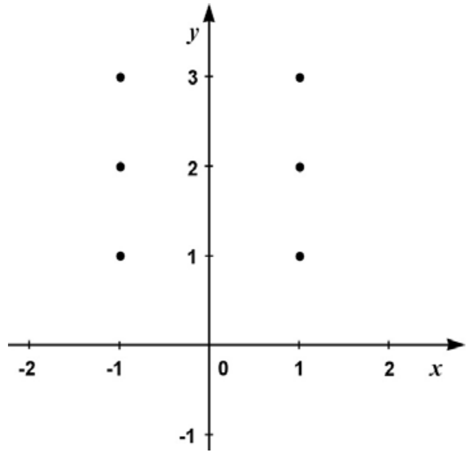
Interpretacja geometryczna tych zbiorów przedstawiona jest na rys. 1.2.1. i 1.2.2.

Rysunek 1.2.1. Interpretacja geometryczna zbioru $\{1, 2, 3\} \times \{-1, 1\}$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1.2.2. Interpretacja geometryczna zbioru $\{-1, 1\} \times \{1, 2, 3\}$



Źródło: opracowanie własne.

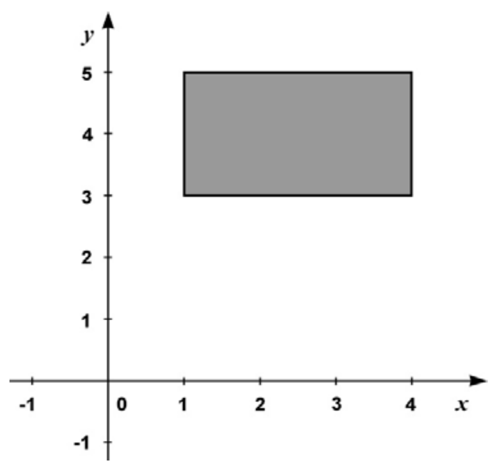
• Niech $A = \{x \in R:\ 1 \le x \le 4\}$ i $B = \{y \in R:\ 3 \le y \le 5\}$. Iloczyny kartezjańskie $A \times B$ i $B \times A$ mają postaci:

$A \times B = \{(x, y) \in R \times R:\ 1 \le x \le 4 \wedge 3 \le y \le 5\}$,

$B \times A = \{(x, y) \in R \times R:\ 3 \le x \le 5 \wedge 1 \le y \le 4\}$.

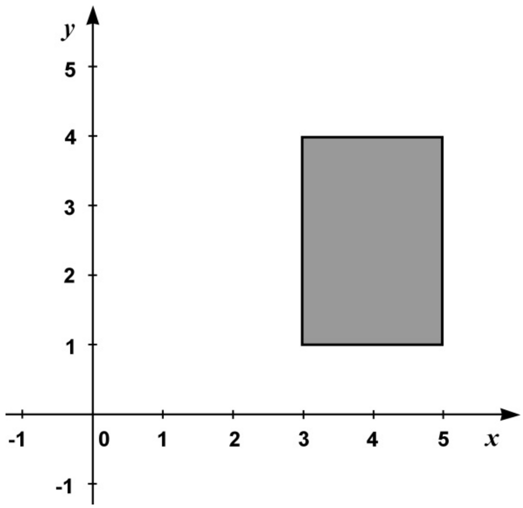
Interpretacje geometryczne zbiorów $A \times B$ i $B \times A$ przedstawione są odpowiednio na rys. 1.2.3 oraz 1.2.4.

Rysunek 1.2.3. Interpretacja geometryczna zbioru
$\{x \in R:\ 1 \le x \le 4\} \times \{y \in R:\ 3 \le y \le 5\}$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1.2.4. Interpretacja geometryczna zbioru
$\{x \in R:\ 3 \le x \le 5\} \times \{y \in R:\ 1 \le y \le 4\}$



Źródło: opracowanie własne.

1.3. Relacje

Podzbiór A ustalonej przestrzeni X można utożsamiać z własnością, którą posiada każdy element tego podzbioru i której nie posiada żaden element przestrzeni X nienależący do zbioru A. Wówczas zamiast pisać $x \in A$, gdzie $A \subset X$, piszemy $A(x)$ i mówimy, że „x ma własność A".

Na przykład, jeśli X jest zbiorem liczb całkowitych, a symbol A oznacza zbiór liczb podzielnych przez pięć, to zamiast „$x \in A$" możemy powiedzieć „x jest liczbą podzielną przez pięć".

Własność, jaką posiada każdy element wyróżnionego zbioru, identyfikujemy z tym zbiorem.

Definicja 1.3.1. Relacjami jednoczłonowymi (jednoargumentowymi) w przestrzeni X nazywamy podzbiory tej przestrzeni.

Definicja 1.3.2. Relacjami dwuczłonowymi (dwuargumentowymi) w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$, gdzie X i Y są pewnymi przestrzeniami, nazywamy podzbiory tego iloczynu kartezjańskiego.

Niech ρ będzie relacją dwuczłonową w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Jeżeli $(x, y) \in \rho$, to zapisujemy to w postaci $x \rho y$ i odczytujemy jako „x jest w relacji ρ z y”.

Definicja 1.3.3. Parę (x, y), gdzie $x \in A$, $y \in B$, nazywamy parą uporządkowaną, jeśli istotna jest kolejność jej elementów. Pierwszy element (x) nazywamy poprzednikiem, a drugi element (y) nazywamy następnikiem.

Definicja 1.3.4. Zbiór poprzedników par uporządkowanych (x, y) należących do relacji ρ nazywamy dziedziną tej relacji.

Definicja ta oznacza, że dziedziną relacji ρ jest zbiór takich elementów x zbioru X, dla których istnieje $y \in Y$ taki, że $x \rho y$.

Definicja 1.3.5. Przeciwdziedziną relacji $\rho \subset X \times Y$ nazywamy zbiór następników par uporządkowanych należących do ρ.

Oznacza to, że element $y \in Y$ należy do przeciwdziedziny relacji $\rho \subset X \times Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $x \in X$ takie, że $x \rho y$.

Przykłady 1.3.1.

- Relacją dwuczłonową w iloczynie kartezjańskim $N \times N$ jest zbiór $\rho = \{(x, y) \in N \times N : \ y = x^3\}$, tzn. punkt $x \in N$ jest w relacji ρ z punktem x^3.
- Relacją dwuczłonową w iloczynie kartezjańskim $R \times (R^+ \cup \{0\})$, gdzie R^+ to zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, jest zbiór $\rho = \{(x, y) \in R \times R^+ \cup \{0\} : \ y = x^4\}$.

Uogólnienie pojęcia relacji dwuczłonowej prowadzi do definicji relacji wieloczłonowej (wieloargumentowej).