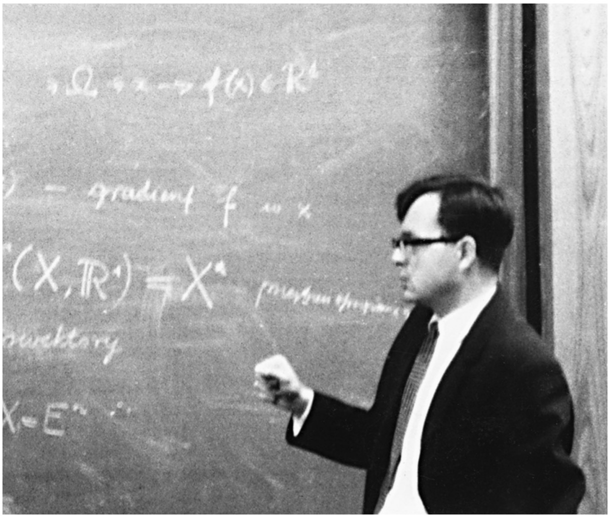
Krzysztof MAURIN

ANALIZA

część III

BM

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN



Profesor Krzysztof Maurin

Krzysztof Maurin (ur. 1923) jest wybitnym polskim uczonym, matematykiem i fizykiem matematycznym, profesorem zwyczajnym na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (obecnie na emeryturze), specjalistą w zakresie metod przestrzeni Hilberta i teorii reprezentacji grup, autorem wielu prac naukowych, monografii matematycznych oraz trzyczęściowego podręcznika *Analiza*. Bardzo ważnym Jego dziełem jest także stworzenie Katedry Metod Matematycznych Fizyki na Uniwersytecie Warszawskim. Sposób prowadzenia wykładu i traktowania matematyki, różnorodność zainteresowań Profesora, wielki wkład pracy i troska o wykształcenie i wychowanie uczniów zaowocowały powstaniem matematycznej szkoły naukowej i dydaktycznej, znacznie przekraczającej ramy organizacyjne KMMF. Zainteresowania i działalność naukowa Profesora Maurina to nie tylko matematyka i fizyka; od wielu lat prowadzi interdyscyplinarne seminarium, którego tematyka, związana początkowo z metodami i znaczeniem nauk przyrodniczych, z czasem obejmowała szersze obszary, takie jak język, symbol, triada człowiek–świat–Bóg, sztuka, religia. Podobnie ewoluowała tematyka wykładów monograficznych Profesora – od czysto matematycznych do takich, których głównym tematem była filozofia i teologia.

Profesor Krzysztof Maurin jest jedną z najwybitniejszych postaci Uniwersytetu Warszawskiego. Jego działalność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna pozostawia trwały ślad w nauce polskiej i dziejach Uniwersytetu Warszawskiego.

Zdjęcie publikujemy dzięki uprzejmości Katedry Metod Matematycznych Fizyki UW

ANALIZA

Krzysztof MAURIN

ANALIZA

część III

Analiza zespolona, dystrybucje, analiza harmoniczna

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2010

Książka jest reprintem wydania z 1991 r.,
które ukazało się nakładem Wydawnictwa Naukowego PWN
jako tom 71 Biblioteki Matematycznej

Z wydania angielskiego przetłumaczył
Tomasz Szapiro

Projekt okładki i stron tytułowych
Małgorzata Podziomek

Redaktor
Janina Solarska

ISBN 978-83-01-16231-3 cz. III
ISBN 978-83-01-16232-0 cz. I–III

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 22 69 54 321
faks 22 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

PRZEDMOWA DO CZĘŚCI III WYDANIA POLSKIEGO

W rozdziale XII, Ogólne struktury matematyki (cz. II) starałem się pokazać Czytelnikowi *panoramę* współczesnej matematyki i opowiedzieć historię rodzenia się jej podstawowych pojęć i struktur. Struktury te wyrosły przecież z potrzeb *klasycznej* matematyki: analizy zespolonej, geometrii różniczkowej i analizy harmonicznej.

W niniejszej części, która w zasadzie zakłada jedynie znajomość elementów topologii ogólnej i całkowania form różniczkowych, wnikamy najpierw głębiej w analizę zespoloną. Idziemy drogą Riemanna, dla którego teoria potencjału, na powierzchniach związanych nierozerwalnie z jego imieniem, była głównym narzędziem. Teoria potencjału (funkcje harmoniczne, pod- (i nad) harmoniczne) osiągnęła w naszym stuleciu formę doskonałą dzięki pracom Lebesgue'a, Perrona, Brelota, Frostmana i innych. Zagadnienia Dirichleta, tzn. problem istnienia i przyjmowania zadanych wartości brzegowych przez funkcję harmoniczną, doprowadził do pojęcia miary harmonicznej i przestrzeni harmonicznej (Brelot, H. Bauer i inni). Niewątpliwie jest to kontynuacja i dalszy rozwój idei Riemanna.

Jak wiemy, grupa podstawowa $\pi_1(M)$ rozmaitości M i jej badanie w związku z grupą nakryć Deck $(\tilde{M} \to M)$ jest dziełem Poincarégo i ma bliskie analogie z teorią Galois (rozwiniętą w części II). Kulminacyjnym punktem teorii powierzchni Riemanna jest twierdzenie o uniformizacji (Koebe–Poincaré), koronujące wysiłki wielu wielkich matematyków — przede wszystkim Felixa Kleina i Henri Poincarégo.

Z teorią powierzchni nakrywających $\tilde{M} \to M$ powierzchni Riemanna jest nierozerwalnie związana teoria funkcji (i form) *automorficznych*, gdy $\Gamma = \text{Deck}(\tilde{M} \to M)$ jest grupą nakryć, wtedy funkcja meromorficzna f na powierzchni M podnosi się do funkcji (meromorficznej) $\tilde{f}$: $\tilde{M} \to \boldsymbol{C}$, Γ-niezmienniczej: $\tilde{f}(\gamma\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$, $\gamma \in \Gamma$, $\tilde{x} \in \tilde{M}$. Funkcje te stanowią ciało i właśnie badanie ich było głównym impulsem powstania ogólnej teorii ciał. Najlepiej zbadanymi funkcjami automorficznymi są funkcje *eliptyczne* (czyli funkcje meromorficzne na torusach), których powstanie zawdzięczamy Abelowi i Jacobiemu. Cudowna eliptyczna funkcja modułowa Dedekinda–Kleina ma olbrzymie znaczenie także w teorii liczb. Charakterystycznym jest, że Klein uważał znajomość „figury modułowej" za podstawę wykształcenia matematyka.

Jak wiemy, *twierdzenie Riemanna–Rocha* jest fundamentem teorii zwartych powierzchni Riemanna (poznaliśmy dwa jego dowody w części II). W rozdziale XVI podajemy, bez dowodu, jego sformułowanie i przytaczamy wiele zastosowań. Twierdzenie Abela, rozwiązanie problemu odwrotnego Jacobiego oraz pojęcie torusa Jacobiego (*jakobianu*) zwartej powierzchni Riemanna zamykają ten rozdział. W dodatku, grupy trójkątne (Schwarza) nawiązują do prastarej idei ciał platońskich.

Jak wspomnieliśmy w wykładzie teorii Dedekinda i Webera (rozdz. XIII), konstrukcja Dedekinda i Webera abstrakcyjnej powierzchni Riemanna ciała funkcji algebraicznych (jako zbiorów ideałów maksymalnych odpowiedniego pierścienia waluacyjnego) jest prekursorem teorii ideałów maksymalnych Gelfanda. Jak się wydaje, wielki Gelfand nie znał wtedy teorii Dedekinda i Webera! Teoria Gelfanda naszkicowana jest w rozdziale XVII. Niestety, nie mogliśmy rozwinąć ogólnej analizy harmonicznej na tej bazie, ale „na otarcie łez" podajemy dowód twierdzenia spektralnego Hilberta według Gelfanda–Najmarka i jego związek z mechaniką kwantową.

Rozdział XVIII poświęcony jest nieskończonym iloczynom tensorowym miar i ich granicom rzutowym. Fundamentalne twierdzenia Kołmogorowa i Prochorowa podane są w §4 rozdziału XVIII.

Teoria całki (Daniella–Stone'a–Radona) ma naturalne rozszerzenie do teorii dystrybucji Laurenta Schwartza, wyrosłej z analizy harmonicznej, której poświęcony jest rozdział ostatni. Teoria całki Haara — tzn. niezmienniczej całki Radona na grupie lokalnie zwartej — i wstęp do teorii reprezentacji grup lokalnie zwartych oraz Dodatek kończą naszą książkę.

Lektura niniejszego tomu powinna raz jeszcze przekonać Czytelnika, że „konkretne problemy są krwią serdeczną matematyki" (Weyl) i że to w nich tkwią *główne trudności*. Ogólne struktury i pojęcia są *Logosem*, który łączy ogrom zjawisk matematycznych w cudowny organizm matematyki. Logos ten bez ustawicznego zgłębiania tych podstawowych, konkretnych problemów usechłby i stał się martwym szkieletem.

*

* *

Ta trzyczęściowa *Analiza* powstawała przez lat 20. Różne jej partie obrazują pogląd autora na matematykę zmieniającą się z biegiem lat. Stąd zmiana stylu wykładu, który w niektórych miejscach przybierał charakter eseju. Historii matematyki nie można oddzielić od jej formy i treści! Ta niejednorodność ujęcia była gehenną dla doc. Tomasza Szapiro i redaktora pani Janiny Solarskiej. Ich pełna oddania i wyrzeczenia praca jest źródłem mej niewymownej wdzięczności i poczucia zażenowania, że nie byłem w stanie oddać lepszego rękopisu.

Kierownikowi Redakcji Matematyki PWN redaktorowi Włodzimierzowi Muszyńskiemu wdzięczny jestem za wielką cierpliwość i wyrozumiałość (niedotrzymywanie terminów i nieprzewidziany rozrost tekstu) dla Jego starego nauczyciela.

Krzysztof Maurin

Warszawa, Boże Narodzenie 1988 r.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ XV

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI FUNKCJI HOLOMORFICZNYCH WIELU ZMIENNYCH. FUNKCJE HARMONICZNE

Niniejszy rozdział składa się z dwóch części. W pierwszej dowodzimy kilku podstawowych własności odwzorowań holomorficznych oraz zespolonych (to znaczy o wartościach w zbiorze liczb zespolonych) form różniczkowych na rozmaitościach zespolonych.

Najważniejszym twierdzeniem tej części jest zapewne twierdzenie Montela–Stieltjesa–Vitalego, które mówi, że przestrzeń $A(\mathcal{O})$ funkcji holomorficznych (na dziedzinie $\mathcal{O} \in C^n$) jest przestrzenią Montela. Głębsze twierdzenia analizy zespolonej będziemy rozważali w rozdziale XVI i w części IV książki.

Rzeczywista i urojona część funkcji holomorficznej są funkcjami harmonicznymi; zatem funkcje harmoniczne mają wiele własności funkcji holomorficznych: są analityczne, spełniają zasadę maksimum, posiadają własność wartości średniej (na sferach), a przestrzeń $\mathscr{H}(\mathcal{O})$ funkcji harmonicznych jest przestrzenią Montela. Stąd druga część (paragrafy 5-7) tego rozdziału poświęcona jest formom harmonicznym, które są także nazywane *funkcjami potencjałowymi.*

Całkowy wzór Poissona (paragraf 6) jest bardzo skutecznym narzędziem badania form harmonicznych. Zasada maksimum jest prawdziwa dla szerszej klasy funkcji $\underline{\mathscr{H}}(\mathcal{O})$ — funkcji podharmonicznych. Funkcje te oraz *zasada Harnacka* umożliwiły Oskarowi Perronowi rozwinąć piękną, prostą i ogólną metodę rozwiązywania problemu Dirichleta dla stosunkowo ogólnych dziedzin w $\boldsymbol{R}^m$ (paragraf 7). Ta część obecnego rozdziału może być traktowana jako pierwsze wstępne wprowadzenie do teorii potencjału.

§ 1. Odwzorowania holomorficzne. Równania Cauchy'ego–Riemanna

Przypomnijmy kilka podstawowych pojęć algebry liniowej.

Owzorowanie liniowe i antyliniowe. Niech E i F będą zespolonymi przestrzeniami wektorowymi.

DEFINICJA. 1° Odwzorowanie u: $E \to F$ jest *C-liniowe*, jeśli
$$u(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha u(e_1) + \beta u(e_2)$$
dla $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$, $e_1, e_2 \in E$.

2° Odwzorowanie v: $E \to F$ jest *antyliniowe*, jeśli
$$v(\alpha e_1 + \beta e_2) = \bar{\alpha} v(e_1) + \bar{\beta} v(e_2)$$
dla $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$, $e_1, e_2 \in E$.

3° Odwzorowanie w: $E \to F$ jest *R-liniowe*, jeśli
$$w(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha w(e_1) + \beta w(e_2)$$
dla dowolnych $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $e_1, e_2 \in E$.

Będziemy oznaczać przez $L_{\boldsymbol{C}}(E, F)$ (odpowiednio $L_{\bar{\boldsymbol{C}}}(E, F)$ i $L_{\boldsymbol{R}}(E, F)$) *przestrzeń C-liniowych* (odpowiednio *antyliniowych* i *R-liniowych*) odwzorowań $E \to F$.

Zachodzi następujący prosty lemat:

LEMAT XV.1.1. *Niech E i F będą przestrzeniami wektorowymi nad $\boldsymbol{C}$. Dla dowolnego R-liniowego odwzorowania u: $E \to F$ oznaczmy*

(1) $$\begin{aligned} u'(e) &:= \tfrac{1}{2}\big(u(e) - iu(ie)\big), \quad e \in E, \\ u''(e) &:= \tfrac{1}{2}\big(u(e) + iu(ie)\big), \quad e \in E. \end{aligned}$$

Wówczas u' jest C-liniowe, a u'' jest antyliniowe. Ponadto zachodzi kanoniczny rozkład na sumę prostą

(2) $$L_{\boldsymbol{R}}(E, F) = L_{\boldsymbol{C}}(E, F) \oplus L_{\bar{\boldsymbol{C}}}(E, F).$$

Uwaga. Gdy E i F są zespolonymi przestrzeniami Banacha, wtedy przez $L_{\boldsymbol{R}}(E, F)$, $L_{\boldsymbol{C}}(E, F)$, $L_{\bar{\boldsymbol{C}}}(E, F)$ oznaczymy przestrzenie Banacha odpowiednich odwzorowań ograniczonych, więc i ciągłych — wówczas (2) jest rozkładem na sumę prostą przestrzeni Banacha.

Dowód. Sprawdzimy tylko, że u'' jest antyliniowe. Wystarczy wykazać, że $u''(ie) = -iu''(e)$; $2u''(ie) = u(ie) + iu(iie) = u(ie) - iu(e) = -i\big(u(e) + iu(ie)\big) = -2u''(e)$. ∎

Odwzorowanie holomorficzne. Niech E i F będą zespolonymi przestrzeniami Banacha. Można je traktować jako przestrzenie wektorowe nad $\boldsymbol{R}$. Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni E oraz u: $U \to F$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym na U. Wówczas dla każdego $x \in U$ pochodna $d_x u$ odwzorowania u w punkcie x jest ciągłym $\boldsymbol{R}$-liniowym odwzorowaniem $E \to F$, a zatem z lematu XV.1.1 wynika, że możemy rozłożyć d_x na część $\boldsymbol{C}$-liniową $(d_x u)'$ i część antyliniową $(d_x u)''$, mianowicie
$$d_x u = d_x u' + d_x u'' \quad \text{dla dowolnego } x \in U.$$
Ponieważ zapisujemy $du' \equiv d'u$, $du'' \equiv d''u$, więc dla dowolnego odwzorowania różniczkowalnego u: $U \to F$ mamy

(3) $$d_x u = d'_x u + d''_x u,$$

gdzie $d'_x u \in L_{\boldsymbol{C}}(E, F)$, $d''_x u \in L_{\bar{\boldsymbol{C}}}(E, F)$.

Uwaga. Operator d'' nazywamy *operatorem Cauchy'ego–Riemanna*; w literaturze amerykańskiej operator Cauchy'ego–Riemanna jest oznaczany przez $\bar{\partial}$ (a operator d' przez ∂).

Możemy teraz wprowadzić podstawowe pojęcie holomorficzności.

DEFINICJA. Niech U będzie otwartym podzbiorem zespolonej przestrzeni Banacha E i niech F będzie również zespoloną przestrzenią Banacha; odwzorowanie $u\colon E \to F$ jest *holomorficzne*, jeśli

1° $u \in C^1(U, F)$,

2° pochodna $d_x u$ odwzorowania u jest C-liniowa dla każdego $x \in U$.

Warunek 2° oznacza, że $du = d'u$, a zatem $d''u$ — antyliniowa część du — znika, możemy więc zastąpić 2° przez

2°′ $d''_x u = 0$ tożsamościowo dla $x \in U$.

Można to wyrazić krótko:

WNIOSEK XV.1.2. *Odwzorowanie $u\colon U \to F$ klasy C^1 jest holomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna*

$$d''u = 0 \text{ (lub } \bar{\partial}u = 0 \text{ w innej notacji)}. \tag{4}$$

Przestrzeń odwzorowań holomorficznych będziemy oznaczać przez $A(U, F)$ lub $\mathrm{Hol}(U, F)$ lub $\mathcal{O}(U, F)$. Gdy $F = C$, funkcje holomorficzne oznacza się przez $A(U)$ lub $\mathcal{O}(U)$.

Z twierdzenia o pochodnej superpozycji i z definicji wynika twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE XV.1.3. 1° *Złożenie odwzorowań holomorficznych $u \circ v$ jest odwzorowaniem holomorficznym.*

2° *Odwzorowanie odwrotne u^{-1} do holomorficznego dyfeomorfizmu jest odwzorowaniem holomorficznym.*

3° *Jeżeli $F = C^m$ oraz $u = (u_1, \ldots, u_m)$*, gdzie *$u_1, \ldots, u_m$ są składowymi odwzorowania u, to $u\colon U \to C^m$ jest holomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składowe $u_1, \ldots, u_m$ są funkcjami holomorficznymi.*

Możemy utożsamić $R^{2n} = R^n \times R^n$ z C^n za pomocą R-liniowego izomorfizmu $\lambda\colon R^n \times R^n \to C^n$,

$$\lambda(x, y) := x + iy, \qquad \lambda^{-1}(z) := \left(\tfrac{1}{2}(z+\bar{z}),\ \tfrac{1}{2}(z-\bar{z})\right),$$

gdzie $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $z = (z^1, \ldots, z^n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, $i = \sqrt{-1}$.

Zdefiniujemy teraz następujące operatory różniczkowe w C^n:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{5}$$

we współrzędnych: $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{6}$$

we współrzędnych: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$.

Natychmiast sprawdza się, że

$$d'u = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad d''u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}. \tag{7}$$

Zatem $\operatorname{Re} u_\mu$ i $\operatorname{Im} u_\mu$ są funkcjami harmonicznymi.

Otrzymujemy w ten sposób „inną" definicję holomorficzności.

STWIERDZENIE XV.1.4. *Niech U będzie otwartym podzbiorem $\boldsymbol{C}^n$. Odwzorowanie klasy C^1 jest holomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia układ równań Cauchy'ego–Riemanna*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{C-R}$$

lub we współrzędnych

$$\frac{\partial u}{\partial x^k} = -i\frac{\partial u}{\partial y^k}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Rozważmy jeszcze bardziej szczególny przypadek; niech $F = \boldsymbol{C}^m$. Utożsamiając $\boldsymbol{R}^{2m}$ i $\boldsymbol{C}^m$ za pomocą izoformizmu λ i zapisując $u\colon U \to \boldsymbol{C}^m$ w postaci $u = u' + iu''$, gdzie $u'_\mu = \operatorname{Re} u_\mu$, $u''_\mu = \operatorname{Im} u_\mu$, otrzymujemy wzór (8) w postaci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x} + i\frac{\partial u''}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial y} + i\frac{\partial u''}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + i\frac{\partial u''}{\partial x} = -i\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial u''}{\partial y}.$$

Stąd porównując części urojone i rzeczywiste mamy następujący wniosek.

WNIOSEK XV.1.5 (RZECZYWISTA POSTAĆ RÓWNAŃ CAUCHY'EGO–RIEMANNA). *Niech U będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\boldsymbol{C}^n$, wówczas odwzorowanie $u\colon U \to \boldsymbol{C}^m$ klasy C^1 jest holomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy u' oraz u'' spełniają układ równań pierwszego rzędu Cauchy'ego–Riemanna* (C-R)

$$\frac{\partial \operatorname{Re} u}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re} u}{\partial y} \tag{9}$$

lub we współrzędnych

$$\frac{\partial u'_\mu}{\partial x^k} = \frac{\partial u''_\mu}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial u''_\nu}{\partial x^l} = -\frac{\partial u'_\nu}{\partial y^l}, \tag{9'}$$

$$k, l = 1, \ldots, n; \quad \mu, \nu = 1, \ldots, m.$$

Zatem

$$\sum \frac{\partial^2 u'_\mu}{(\partial x^k)^2} + \sum \frac{\partial^2 u'_\mu}{(\partial y^k)^2} = 0 = \sum \frac{\partial^2 u''_\mu}{(\partial x^k)^2} + \sum \frac{\partial^2 u''_\mu}{(\partial y^k)^2} = 0. \tag{10}$$ ■

Uwaga. Równania (8) i (9) nazywane są również *układami równań Cauchy'ego–Riemanna*. W przypadku gdy $m = n = 1$ znali je już d'Alembert i Gauss. (Równania (10) nazywamy *równaniami Laplace'a*.)

Niech $u \in A(U, C^m)$, $U \in C^n$. Korzystając z równań Cauchy'ego–Riemanna (9'), możemy przedstawić w następującej postaci macierz Jacobiego pochodnej du odwzorowania u:

$$\frac{\partial(u)}{\partial(x)} = d(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u'_1}{\partial x^n} & -\frac{\partial u''_1}{\partial x^1} & \ldots & -\frac{\partial u''_1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u'_m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u'_m}{\partial x^n} & -\frac{\partial u''_m}{\partial x^1} & \ldots & -\frac{\partial u''_m}{\partial x^n} \\ \frac{\partial u''_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u''_1}{\partial x^n} & \frac{\partial u'_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u'_1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u''_m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u''_m}{\partial x^n} & \frac{\partial u'_m}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u'_m}{\partial x^n} \end{bmatrix}.$$

Gdy $m = n$, otrzymujemy jakobian

$$\frac{\partial(u'_1, \ldots, u'_n, u''_1, \ldots, u''_n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u'_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u'_1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u'_n}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u'_n}{\partial x^n} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial u''_1}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u''_1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u''_n}{\partial x^1} & \ldots & \frac{\partial u''_n}{\partial x^n} \end{vmatrix}^2 \geqslant 0.$$

STWIERDZENIE XV.1.6. *Niech u będzie biholomorfizmem, tzn. dyfeomorfizmem holomorfizmu, $U \xrightarrow{u} V \subset C^n$. Wówczas jakobian odwzorowania u jest dodatni.*

Mamy następujący wniosek:

WNIOSEK XV.1.7. *Każda zespolona rozmaitość wymiaru n jest orientowalna.*

Holomorficzne odwzorowania rozmaitości zespolonych. Przypomnijmy, że rozmaitość topologiczną M modelowaną na zespolonej przestrzeni Banacha nazywamy rozmaitością *holomorficzną* lub *zespoloną*, gdy istnieje holomorficzny atlas $(u_i, M_i)_{i\in I}$ rozmaitości M, gdzie każde u_i: $M_i \to E$ jest homeomorfizmem oraz dla każdego i, $k \in I$ odwzorowania

$$u_k \circ (u_i | M_i \cap M_k)^{-1}: u_i(M_i \cap M_k) \to u_k(M_k \cap M_i)$$

są holomorficzne. Możemy teraz rozszerzyć pojęcie odwzorowania holomorficznego w ten sam sposób jak w przypadku odwzorowań różniczkowalnych.

DEFINICJA. Niech M będzie rozmaitością zespoloną modelowaną na przestrzeni E wyposażoną w holomorficzny atlas $\{(u_i, M_i): i \in I\}$, niech N będzie rozmaitością zespoloną modelowaną na zespolonej przestrzeni Banacha F i niech $\{(v_j, N_j): j \in J\}$ będzie holomorficznym atlasem rozmaitości N. Odwzorowanie f: $M \to N$ jest odwzorowaniem *holomorficznym*, jeśli dla dowolnych dwóch map u_i, v_j, $(i, j) \in I \times J$

$$f_{u_i, v_j} := v_j \circ f \circ u_i^{-1}: u_i(M_i) \to v_j(N_j)$$

jest odwzorowaniem holomorficznym (otwartego podzbioru $u_i(M_i)$ przestrzeni E w otwarty podzbiór $v_j(N_j)$ przestrzeni E).

Uwaga. Oczywiście każda zespolona rozmaitość M jest z definicji klasy C^1. Dokładniej, na M istnieje rzeczywista struktura różniczkowalna klasy C^1. Aby uniknąć pomyłek, oznacza się przez $M^{\mathbf{R}}$ rozmaitość M wyposażoną w tę rzeczywistą strukturę różniczkowalną.

Zatem wnioskiem ze stwierdzenia XV.1.6 jest twierdzenie następujące:

TWIERDZENIE XV.1.8. *Niech M będzie rozmaitością zespoloną o zespolonym wymiarze n. Wówczas rozmaitość $M^{\mathbf{R}}$ jest rozmaitością rzeczywistą o rzeczywistym wymiarze $2n$; $M^{\mathbf{R}}$ jest orientowalna i posiada naturalną orientację.*

Twierdzenie o odwzorowaniach uwikłanych. Z twierdzenia VIII.3.1 otrzymujemy następującą holomorficzną wersję twierdzenia Gravesa:

TWIERDZENIE XV.1.9. *Niech E i F będą zespolonymi przestrzeniami Banacha i niech h będzie odwzorowaniem otwartego podzbioru V iloczynu $E \times F$ w F. Załóżmy, że istnieje punkt $(e_0, f_0) \in V$ taki, że $h(e_0, f_0) = 0$, i otwarte otoczenie $U \subset V$ punktu (e_0, f_0). Załóżmy, że $h \in A(U, F)$.*

Jeśli $\nabla_F h(e_0, f_0) \in L_C(E, F)$ jest odwracalne i odwzorowanie odwrotne jest ograniczone, to istnieją r_1, $r_2 > 0$ takie, że h generuje odwzorowanie uwikłane G: $K(e_0, r_1) \to K(f_0, r_2) \subset F$. Odwzorowanie G jest holomorficzne, a jego pochodna dana jest wzorem

$$(*) \qquad \nabla G(e) = -(\nabla_F h(e, f))^{-1} \circ \nabla_E h(e, f).$$