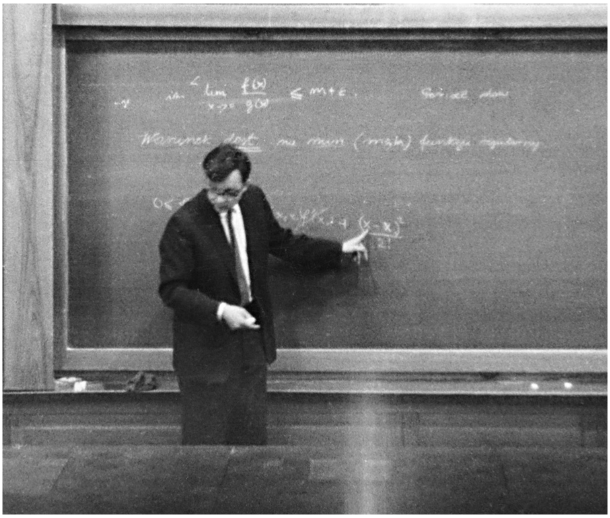
Krzysztof MAURIN

ANALIZA

część II

BM

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN



Profesor Krzysztof Maurin

Krzysztof Maurin (ur. 1923) jest wybitnym polskim uczonym, matematykiem i fizykiem matematycznym, profesorem zwyczajnym na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego (obecnie na emeryturze), specjalistą w zakresie metod przestrzeni Hilberta i teorii reprezentacji grup, autorem wielu prac naukowych, monografii matematycznych oraz trzyczęściowego podręcznika *Analiza*. Bardzo ważnym Jego dziełem jest także stworzenie Katedry Metod Matematycznych Fizyki na Uniwersytecie Warszawskim. Sposób prowadzenia wykładu i traktowania matematyki, różnorodność zainteresowań Profesora, wielki wkład pracy i troska o wykształcenie i wychowanie uczniów zaowocowały powstaniem matematycznej szkoły naukowej i dydaktycznej, znacznie przekraczającej ramy organizacyjne KMMF. Zainteresowania i działalność naukowa Profesora Maurina to nie tylko matematyka i fizyka; od wielu lat prowadzi interdyscyplinarne seminarium, którego tematyka, związana początkowo z metodami i znaczeniem nauk przyrodniczych, z czasem obejmowała szersze obszary, takie jak język, symbol, triada człowiek–świat–Bóg, sztuka, religia. Podobnie ewoluowała tematyka wykładów monograficznych Profesora – od czysto matematycznych do takich, których głównym tematem była filozofia i teologia.

Profesor Krzysztof Maurin jest jedną z najwybitniejszych postaci Uniwersytetu Warszawskiego. Jego działalność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna pozostawia trwały ślad w nauce polskiej i dziejach Uniwersytetu Warszawskiego.

Zdjęcie publikujemy dzięki uprzejmości Katedry Metod Matematycznych Fizyki UW

ANALIZA

Krzysztof MAURIN

ANALIZA

część II

Ogólne struktury matematyki, funkcje algebraiczne, całkowanie, analiza tensorowa

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2010

Książka jest reprintem wydania drugiego zmienionego z 1991 r.,
które ukazało się nakładem Wydawnictwa Naukowego PWN
jako tom 70 BIBLIOTEKI MATEMATYCZNEJ

Do wydania drugiego adaptował
i fragmenty z wydania angielskiego przetłumaczył
TOMASZ SZAPIRO

Projekt okładki i stron tytułowych
MAŁGORZATA PODZIOMEK

Redaktor
JANINA SOLARSKA

ISBN 978-83-01-16230-6 cz. II
ISBN 978-83-01-16232-0 cz. I–III

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 22 69 54 321
faks 22 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie trzecie
Arkuszy drukarskich 40,0
Druk ukończono w lutym 2010 r.
Druk i oprawa: Rzeszowskie Zakłady Graficzne SA
36-062 Zaczernie, Miłocin 181

Moim Uczniom

Avant tout, je pense que, si l'on veut faire des progrès en Mathématiques, il faut étudier des maîtres et non les élèves.(1)

N. H. Abel

Die Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis und eine unendliche Verfeinerung der Sprache. Sie erhebt sich aus der gewöhnlicher Sprache und Vorstellungswelt wie eine Pflanze aus dem Erdreich und ihre Wurzeln sind Zahlen und einfache räumliche Vorstellungen. Wir wissen nicht welcher Inhalt die Mathematik als die ihm allein angemessene Sprache verlangt, wir können nicht ahnen in welche Ferne und Tiefe dieses geistige Auge Mathematik den Menschen noch blicken lässt.(2)

E. Kähler

The mathematical universe is inhabited not only by important species but also by interesting individuals.(3)

C. L. Siegel

A truly realistic mathematics should be conceived, in line with physics, as branch of the theoretical construction of the one real world, and should adopt the same sober and cautious attitude toward hypothetic extensions of its foundations as is exhibited by physics.(4)

H. Weyl

---

(1) Przede wszystkim, jak sądzę, gdy myśli się o postępie w matematyce, trzeba czytać mistrzów, a nie ich uczniów.

(2) Matematyka jest organem poznania i nieskończonym usubtelnieniem języka. Wyrasta ona z potocznego języka i świata wyobraźni jak roślina z gleby, a jej korzeniami są liczby i proste wyobrażenia przestrzenne. Nie wiemy jakie treści dopuszcza matematyka jako jedynie adekwatny im język, nie potrafimy sobie nawet wyobrazić głębi i dali, w które pozwala ludziom wejrzeć duchowe oko jakim jest matematyka.

(3) Świat matematyczny zamieszkiwany jest nie tylko przez ważne gatunki, lecz również przez interesujących osobników.

(4) Prawdziwie realistyczna matematyka powinna być uprawiana łącznie z fizyką, jako gałąź teoretycznej konstrukcji jednego rzeczywistego świata, i powinna sobie przyswoić ten sam trzeźwy i ostrożny sposób hipotetycznego rozszerzania swych podstaw, który cechuje fizykę.

Z PRZEDMOWY DO CZĘŚCI II *Analizy* WYDANIA ANGIELSKIEGO

Niniejsza książka jest jedynym podręcznikiem, który wychodząc od zera — dokładniej mówiąc od liczb wymiernych — dochodzi do dystrybucji, całek prostych, analizy na rozmaitościach zespolonych, przestrzeni Kählera, teorii snopów, wiązek wektorowych itd.

Podczas gdy dominującym obiektem w pierwszej części książki była pochodna i jej zastosowanie, w części drugiej centralnym pojęciem jest całka.

Nowoczesna analiza wymaga pojęcia przestrzeni topologicznej — nie wystarczają już przestrzenie metryczne i dlatego część II książki rozpoczyna systematyczny wykład topologii ogólnej([1]). Korzystałem ze wspaniałej, zwięzłej monografii G. Köthego, jednego z twórców współczesnej teorii przestrzeni lokalnie wypukłych.

Rozdział XIII poświęcony jest ogólnej teorii całki przedstawionej zgodnie z podejściem Daniella–Stone'a. Jak wiadomo, istnieją dwa podejścia *od miary do całki* i *od całki do miary*.

Z następujących powodów wybrałem to drugie: 1° jest ono nieco ogólniejsze; 2° prowadzi szybciej do podstawowych dla zastosowań twierdzeń o przejściu z granicą pod znak całki i zmianie kolejności całkowania (twierdzenia Fubiniego, Tonellego); 3° najważniejszy w analizie typ całki — całka Radona — jest szczególnym przypadkiem całki Daniella–Stone'a; 4° przy takim podejściu naturalne staje się przejście do dystrybucji; dystrybucje są naturalnym rozszerzeniem całki Radona. Oczywiście, nie pokazać młodemu Czytelnikowi drogi *od miary do całki* oznaczałoby popadanie w grzech fanatyzmu; droga ta pokazana jest w paragrafie 30. Znakomite skryptowe wydanie wykładów profesora J. G. Mikusińskiego pt. *Całka* okazało się bardzo pomocne przy pisaniu rozdziału o całce; z wielką przyjemnością pragnę tu wyrazić serdeczne podziękowania memu byłemu Szefowi. Naturalnym uogólnieniem całki z funkcji o wartościach wektorowych jest *całka prosta* — pojęcie wprowadzone przez von Neumanna i niezależnie, nieco później (za to bardziej elegancko), przez R. Godementa dla potrzeb teorii reprezentacji grup niezwartych i teorii kwantów.

([1]) W obecnym wydaniu rozdział XII został bardzo istotnie rozszerzony o paragrafy 14-90 (*przyp. red.*).

W konsekwencji, całki proste i ich związek z mechaniką kwantową kończą rozdział o całkowaniu. Interesujące zastosowania tego pojęcia można będzie znaleźć w części trzeciej albo, wraz z głębokim uzasadnieniem, w mych poprzednich monografiach: *Metody przestrzeni Hilberta* i *General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups.*

Rozdział XIV zawiera dział nazywany niegdyś *całkami powierzchniowymi wraz z zastosowaniami,* który obecnie nosi nazwę *teorii form różniczkowych i ich całek na rozmaitościach z brzegiem.* Podstawowy fakt to oczywiście twierdzenie Stokesa-Poincarégo, reszta — to zastosowania tego twierdzenia, kulminujące w twierdzeniach de Rhama i teoriach form harmonicznych Hodge'a i Kodairy oraz form niezmienniczych na grupach Liego. Ponieważ źródła tych teorii można odnaleźć w elektrodynamice, dał temu wyraz de Rham, wprowadzając pojęcie *prądu* — nie mogłem powstrzymać się od dopisania krótkiego paragrafu o elektrodynamice.

Byłoby mi niezmiernie trudno wyliczyć wszystkie wspaniałe prace, z których korzystałem, pisząc niniejszy tom *Analizy.* Wspomnę tylko o podręcznikach Henri Cartana, S. Langa, H. Nickersona-D. Spencera-N. Steenrooda oraz o monografiach L. Ahlforsa, R. Nevanlinny, A. Pflügera, O. Forstera i G. Shimury.

Gdy czytałem te błyskotliwe książki i próbowałem z nich korzystać przygotowując własną, często nawiedzała mnie wątpliwość, czy ma sens zniekształcanie dzieł tak wysokiej rangi przez wyjmowanie ich fragmentów z kontekstu. Wszak z pewnością były to dzieła doskonałe. Moja książka ma jednak znacznie skromniejsze cele...

Niniejsza część — w jeszcze większym stopniu niż część I — zawdzięcza wiele tym, którzy byli dawniej moimi uczniami, a dziś są kolegami. Brak mi słów, by wyrazić wdzięczność za pracowite i staranne czytanie, z ich własnej inicjatywy, tysięcy stron mych rękopisów i doprowadzenie ich do stanu umożliwiającego publikację. K. Gawędzki napisał od nowa obszerne partie rozdziału XIV. Wspomnę tylko, *sapienti sat,* nazwiska innych: J. Komorowski i A. Strasburger (rozdział o topologii), K. Napiórkowski (teoria całki), A. Wawrzyńczyk i P. Urbański (teoria dystrybucji i analiza harmoniczna)([1]), A. Strasburger (jednowymiarowa analiza zespolona)([2]), W. Pusz, J. Kijowski (liczne, bezcenne uwagi krytyczne).

Im wszystkim dedykuję ten tom.

Krzysztof Maurin

Zakopane, sierpień 1978

([1]) Rozdział ten znajduje się obecnie w części II (*przyp. red.*).
([2]) Rozdział ten znajduje się obecnie w części III (*przyp. red.*).

PRZEDMOWA DO WYDANIA ZMIENIONEGO

Matematyka jest — obok astronomii — najstarszą nauką([1]), ale jest wiecznie młoda, tzn. co pewien czas przeżywa okres bujnego rozwoju, a nawet kilkakrotnie przechodziła coś w rodzaju rewolucji. Przeżywała co prawda także długie, nieraz wielowiekowe okresy zastoju, skamienienia, nawet regresu — np. w Europie, po okresie hellenizmu, nieomal do renesansu wiodła matematyka żywot niewesoły.

Od epoki renesansu do dziś przeżywamy niewiarygodnie szybko pędzący, coraz bardziej wzbierający okres życia tej nauki. Nie myślę tu o zalewie prac matematycznych (artykułów, książek, encyklopedii), o tysiącach pism fachowych — co kilka tygodni powstaje przecież nowe czasopismo matematyczne. Przeżywamy ostatnio wielkie sukcesy: co roku niemal zostaje rozwiązany wielki problem matematyczny, który nieraz przez dziesiątki lat opierał się próbom rozwiązania, a którego pokonanie wymagało współpracy pokoleń. Co kilka lat powstaje nowa „teoria" matematyczna, nowy „dział". Matematyka staje się coraz bardziej ezoteryczna, tylko najwięksi potrafią w tym gąszczu, w tej dżungli tropikalnej, widzieć jedność, znajdować drogę, rozumieć problemy odległych specjalności.

W starożytności matematykę „dzielono" (Pitagorejczycy) na trzy dziedziny: arytmetykę (tzn. teorię liczb), geometrię i harmonikę. I dziś gigantyczne działy współczesnej algebry i teorii liczb, analizy harmonicznej wraz z teorią reprezentacji grup i geometrii z topologią stanowią główne, cntralne ośrodki życia organizmu zwanego *matematyką*. Ale czymże jest matematyka? Na pytanie to nie trzeba oczekiwać odpowiedzi w postaci definicji — jedyną odpowiedzią może być: „Przyjdź i zobacz, jak żyję, włącz się w me życie, naucz się tego języka, którym jestem, spróbuj nim mówić...".

Bo matematyka jest językiem, jest sztuką. Ale cóż to jest język, *Logos*? Cóż to jest sztuka? Nie ma sensu definiować (to znaczy odgraniczać, kroić) — tylko coś, co nie żyje, można zdefiniować, twory żywe należy charakteryzować. Jeden z największych malarzy naszego stulecia, Paul Klee, powiedział — myśląc o sztukach plastycznych: „Sztuka sprawia, że niewidzialne staje się widzialne" — „Kunst macht sichtbar".

([1]) Największy matematyk naszego stulecia — Hermann Weyl uważał, że matematyka i fizyka stanowią jeden organizm!

Można by kontynuować myśli Kleego, powiadając: muzyka czyni niesłyszalne słyszalnym... ale co czyni matematyka widziana jako sztuka? Może odpowiedzi należy szukać w kierunku wskazanym przez słynny napis u wejścia do Akademii Platońskiej: „Niech nie wchodzi tu nikt, kto nie zna geometrii"?

Dla ówczesnych Greków „geometria" znaczyło: „matematyka". Bo przecież nie ma chyba innej działalności ludzkiej, która mogłaby równać się z matematyką w pokazywaniu realności, rzeczywistości świata idei. Przecież nikt, kto zagłębił się w ten świat, np. w ideę powierzchni Riemanna, nie wątpi o rzeczywistości tego świata, przy czym nie myślę tu tylko o zastosowaniach tej idei do fizyki (i techniki). Znajomość historii powstawania i rozwoju tej przepięknej teorii, jej powiązań ze wszystkimi (nieomal) działami matematyki jest nie tylko fascynująca i napawająca szczęściem, ale pozwala, jak mi się zdaje, wniknąć głęboko i prawdziwie w filozofię. Zrozumiałym, niemal oczywistym jest nakaz Platona. Bo przecież Platon wiedział, że matematyka jest najpewniejszą drogą do świata *Idei* – choć nie jedyną. Ale, jak pamiętamy ze Wstępu części I, matematyka jest językiem, *Logosem*. By to pojąć, trzeba zagłębić się w to, co nazywa się „symbolową teorią języka". Pokazuje ona, że główną funkcją języka nie jest rola informująca, komunikująca (co jest oczywistością), lecz jego rola kosmotwórcza. „Bez języka nie ma rzeczywistości, nie ma świata, nie ma kosmosu". Nie mogę tu rozwijać i „dowodzić" tej tezy (zainteresowanych odsyłam do mych publikacji filozoficznych), lecz samo istnienie i życie matematyki jest przekonywającym argumentem...: Matematyka pozwala zobaczyć życie idei, pozwala „usłyszeć harmonię sfer", jednocześnie jest tworzeniem, ożywianiem świata idei, jest muzyką sfer... Podobnie jak wielki poeta otwiera nam nowe wymiary rzeczywistości, jak genialny obraz, „ikona" pozwala nam zobaczyć to, co niewidzialne, tak matematyka niesłychanie wzbogaca nasz język, staje się nowym organem poznawczym, który jak każdy organ zmysłów nie jest czymś (jedynie) biernym, ale wytwarza, współtworzy „widzianą" przez siebie rzeczywistość (Goethe). A więc pojęcia i teorie matematyczne są organami poznawczymi ludzkości. Organy te rosną i rozwijają się powoli; każdy z nas, kto uczy się matematyki i ją uprawia, wchodzi w nieraz bolesny, długi proces rozwoju, wzrostu. Tego procesu i tych wysiłków poznawczych nie wolno przerywać (na dłuższy czas), bo delikatny ten organ obumiera, podobnie jak nie używany mięsień wiotczeje, jak nie podlewana, nie opromieniona słońcem roślina więdnie i usycha. Bo pamięć to nie jest magazyn czy muzeum, pamięć – to gleba, w którą pada nasienie i, by kiełkowało, potrzebuje starannej, mądrej pielęgnacji...

Nie padło tu jeszcze słowo „analiza" – w przedmowie do książki, która nosi tytuł *Analiza*. Po tym co mówiłem powyżej, Czytelnik nie będzie oczekiwał definicji – a opis to przecież sama książka... Analiza matematyczna to zespół teorii, bardzo wielu teorii – to nie jest tylko jakiś dział matematyki. Dlatego każdy matematyk co innego rozumie przez „analizę", zależnie od swej wiedzy czy raczej ignorancji. Porównywano analizę matematyczną do królowej (czy też raczej władczyni) matematyki (bo od czasu Gaussa matematykę zwą królową nauki): opiera się ona na wszystkich („innych") działach matematyki, ale też je zatrudnia, stawiając niezliczone problemy. Ileż teorii matematycznych powstało, by rozwiązać np. *zagadnienie Dirichleta* w teorii równań o pochodnych cząstkowych: równania całkowe, rachunek wariacyjny, analiza funkcjonalna, teoria dystrybucji, topologia ogólna – by wymienić tylko najważniejsze. Ileż pomysłowości, genialnych idei potrzeba było, by po stu latach (w pełni) rozwiązać problem Riemanna (zwany też problemem Riemanna–Hilberta) z teorii liniowych równań różniczkowych zwyczajnych z punktami osobliwymi!... Powstały całe działy algebry i arytmetyki, by w pełni rozwiązać problem Riemanna–Rocha... A więc analiza matematyczna to nie tylko „całki i różniczki", choć teoria całki i teoria form różniczkowych stanowią niezbywalne narzędzie i język analizy.

Książka niniejsza ma długą (przeszło ćwierćwieczną) historię, ale to może interesować jedynie autora, jego przyjaciół i stanowi nieraz bolesne doświadczenie redaktorów i tłumacza *Analizy*, którym w tym miejscu składam podziękę za ich bezinteresowną pracę i cierpliwość. Nie będę wyliczał w Przedmowie, jakie rozdziały i paragrafy zawiera niniejsza praca – od tego jest obszerny Spis rzeczy.

Starałem się tok dowodów co pewien czas przerywać uwagami historycznymi – nie są to miejsca odpoczynku, postoju (*Raststätte*) na autostradzie – stanowią one istotną składową wykładu. Częste powtórzenia czy przypominane definicje mają na celu tylko ułatwienie lektury i uczynienie niektórych rozdziałów bardziej niezależnymi od poprzednich. Czasami wybiegałem naprzód, opowiadając o sprawach, które dokładniej traktowane są w późniejszych rozdziałach: przeczucie i nadzieja są istotnym elementem życia.

Krzysztof Maurin

SPIS RZECZY

Rozdział XII. **Ogólne struktury matematyki**

Pamięci
Bernharda Riemanna
Richarda Dedekinda
Kurta Hensla
Évarista Galois

ROZDZIAŁ XII

OGÓLNE STRUKTURY MATEMATYKI

Niniejszy wstęp kontynuuje — w pewnym sensie — Przedmowę: rozdział XII ma inny charakter niż pozostałe — mówi o tym już jego tytuł i dedykacja utworu tak różnym ludziom!

O strukturach matematyki mówi się stale od czasu programowego tomiku Bourbakiego (1940), ale strukturalne widzenie matematyki jest znacznie dawniejsze: zainicjował je i rozwijał młodszy kolega, przyjaciel i wydawca dzieł Riemanna, wielki Richard Dedekind. Trudno przecenić rewolucyjny wpływ, jaki wywarły prace tego cichego, nieśmiałego człowieka. Interesującym i wiele mówiącym o charakterze Dedekinda faktem jest „ukrycie" przez niego swych epokowych myśli w słynnym „XI Suplemencie" do wydawanych przez siebie *Wykładów z teorii liczb Dirichleta.* Księgę tę czytano przez dziesiątki lat głównie ze względu na ów słynny (ponad stustronicowy) „Supplement". Emmy Noether — kontynuatorka *abstrakcyjnej algebry Dedekinda* — w swych wykładach często mówiła (po udowodnieniu któregoś z jej znanych twierdzeń): „Das alles steht bei Dedekind" (to wszystko jest już u Dedekinda!). Nawiasem mówiąc, E. Noether (córka wielkiego geometry, inicjatora współczesnej geometrii algebraicznej, Maxa Noethera) była z kolei wydawcą dzieł Dedekinda. Mamy tu przykład filiacji jakże częstej w matematyce!

Często powiada się, nie bez pewnej słuszności, że „matematyka jest nauką o strukturach". Ale matematyka jest czymś (dużo) więcej: jest także badaniem, jest teorią reprezentacji, a więc oglądem, widzeniem, jak różne struktury *działają* w swych przestrzeniach reprezentacji. I tu widzimy dwie główne drogi rozumienia rzeczywistości.

Pierwszą taką drogą jest poszukiwanie elementów pierwszych, a więc nie dających się (w pewnym kontekście) już dalej rozłożyć. W fizyce przykładem takich elementów są atomy, cząstki elementarne itd., w matematyce zaś liczby pierwsze, ideały i dywizory pierwsze. Wyrazem takich poszukiwań w fizyce i analizie jest analiza harmoniczna (tzn. rozkładanie drgań i funkcji na drgania czy funkcje elementarne — harmoniczne).

Poszukiwanie reprezentacji nierozkładalnych (nieprzywiedlnych) oraz próby wykazywania jednoznaczności takich rozkładów doprowadziło do takich epokowych teorii, jak teoria dywizorów w pierścieniach Dedekinda (por. ostatnią partię niniejszego rozdziału) czy też teoria faktorów w teorii reprezentacji grup.

Człowiekowi zdawało się, już od czasów Demokryta, że gdy znajdzie i pozna te „atomy", „monady" (Leibniz), wtedy będzie znał rzeczywistość i mógł nią „władać". Jest to właśnie głównym motywem badań struktur (także w matematyce).

Drugą, nie mniej ważną drogą poznania jest metoda reprezentacji, której zasadą jest: „chcesz poznać jakąś istotę, badaj, jak istota ta *działa*, jak się reprezentuje". Bardziej drastycznie zasadę tę wyrażono słowami: „istoty nikt nigdy nie widział, możemy (jedynie) poznawać jej ślady w świecie, poznawać ciała i organy, które ona sobie buduje" — „Rzecz sama w sobie jest niepoznawalna — w swych działaniach, reprezentacjach wyraża się ona w sposób pełny". Wielki protestancki teolog XVIII stulecia Otinger wyraził to językiem swej epoki, mówiąc: „Leiblichkeit ist Ende der Wege Gottes". Metodzie tej poświęciłem paragraf, zatytułowany „Zasada Galois–Weyla". Zasada ta mówi: „chcesz poznać jakieś pojęcia (matematyczne), badaj grupę jego automorfizmów". Właśnie grupa Aut (L/K) rozszerzenia $L \supset K$ ciała K jest tym cudownym tworem, który pozwala głęboko wejrzeć w naturę rozszerzenia $L \supset K$. W tymże paragrafie zastanawiam się nad innymi przykładami zasady Galois–Weyla. (Jak wspomina C. Chevalley w interesującym wywiadzie dla pisma *Mathematical Intelligencer*, jego mentor i przyjaciel, André Weil, radził mu zwykle, gdy zachodził do niego (Weila) z jakąś trudnością, mówiąc: „znajdź odpowiednią grupę". Hermann Weyl podkreślał często (np. w swym uroczym dziełku, pięknie na polski przetłumaczonym przez mego mistrza Stefana Kulczyckiego), że było wielkim szczęściem matematyki, że grupa Galois jest grupą *skończoną* i dzięki temu ówczesna matematyka mogła się z nią uporać!

W rozdziale niniejszym będziemy mówić głównie o wielkim bogactwie struktur matematycznych, choć w niektórych momentach będzie przeświecać też myślenie o poznawaniu rzeczywistości przez teorię reprezentacji, mianowicie w związku z grupą Galois (rozszerzenia $L \supset K$ ciał) i jej ścisłym (izomorficznym) odpowiednikiem w teorii nakryć zwartych powierzchni Riemanna.

A więc rozdział niniejszy ma inny charakter niż pozostałe partie tej książki: zbiera i pogłębia doświadczenia zdobyte w części I książki w rozdziale poświęconym strukturom topologicznym i ogólnej teorii zbieżności (ciągi uogólnione i filtry). Część ta kulminuje w najpożyteczniejszym chyba twierdzeniu topologicznym: twierdzeniu Tichonowa o produkcie przestrzeni (lokalnie) zwartych. Omówienie tej teorii jest kontynuowane w paragrafach poświęconych *teorii struktur jednorodnych* i granic rzutowych przestrzeni topologicznych — niezbywalnych narzędziach analizy funkcjonalnej; a także kontynuowana jest w rozdziale XVII.

W tym miejscu chciałbym podkreślić, że ogólne pojęcie przestrzeni topologicznej (Hausdorffa) narodziło się w związku z kodyfikacją przez Hermanna Weyla *Idei powierzchni Riemanna.* W swej fundamentalnej monografii (z roku 1910) pod powyższym tytułem Weyl określa topologię (powierzchni Riemanna) i podaje po raz pierwszy aksjomaty bazy otoczeń — co chętnie przyznaje wielki Felix Hausdorff w swej klasycznej monografii z roku 1912.

Z teorii powierzchni Riemanna, z teorii przedłużenia analitycznego, wyrosło także inne, fundamentalne dla współczesnej analizy i geometrii różniczkowej globalnej, pojęcie snopa (kiełków). Teoria snopów jest niezbywalnym narzędziem badającym związki między *częścią* a *całością* – możliwość przejścia od związków lokalnych do globalnych. Nic więc dziwnego, że partię centralną naszego rozdziału stanowi teoria zwartych powierzchni Riemanna — paragraf nazwany przeze mnie „Riemanna teoria funkcji algebraicznych". Bo przecież ta najważniejsza dla całej nowszej matematyki teoria wyrosła z genialnej wizji Bernharda Riemanna, starającego się głęboko zrozumieć funkcje algebraiczne i ich całki, zwane przez niego słusznie „całkami Abela" — na cześć wielkiego Norwega, będącego prekursorem zarówno Galois, jak i Riemanna. Podobnie jak Riemann, Abel był synem pastora luterańskiego i, podobnie jak on, zmarł młodo na gruźlicę.

Nasz wiek (w matematyce) można nazwać „wiekiem algebry": algebra dominuje i przenika wszystkie działy matematyki. „Odgrywa podobną rolę dla matematyki jak matematyka dla fizyki", jak mówił wielki arytmetyk i algebraik (współtwórca Bourbakiego) Claude Chevalley. Chciałoby się powiedzieć: „algebra jest logosem matematyki". Ale *algebra*, tzn. teoria grup, pierścieni, modułów, ciał i ich rozszerzeń wyrosła z potrzeb analizy i jest dzieckiem teorii liczb, z którą zrosła się nierozerwalnie. Najciekawsze, najważniejsze ciała to ciała liczb algebraicznych i ciała funkcyjne. Dlatego w monumentalnej trzytomowej monografii Heinricha Webera (1912) *Lehrbuch der Algebra* (stosunkowo niedawno przedrukowano to dzieło), a także i w późniejszym podręczniku Frickego (wzorowanym na dziele Webera) pokaźną rolę odgrywa teoria funkcji mudułowych i automorficznych, które to teorie traktuje się dziś jako rozdziały analizy (por. część III, rozdział XVI). Dlatego też w niniejszym rozdziale sporo miejsca zajmują ciała i ich rozszerzenia, z najpiękniejszym fragmentem tej teorii — *teorią Galois*. Sam Galois począł swą teorię w związku z problemem rozwiązywania równań algebraicznych przez pierwiastniki (twierdzenie Abela–Ruffiniego) — i jest odkrywcą tak fundamentalnego pojęcia, jakim jest *grupa Galois wielomianu*. Pierwszym, który spojrzał na tę grupę jako na grupę automorfizmów rozszerzenia ciał $L \supset K$, był R. Dedekind; jako młody docent w Getyndze tak właśnie traktował teorię Galois w swych wykładach. Dedekindowi i Weberowi zawdzięcza się także nowe rewolucyjne spojrzenie na teorię funkcji na powierzchni Riemanna jako na teorię rozszerzeń ciał funkcyjnych. Teoria Dedekinda–Webera była poprzedniczką teorii funkcji algebraicznych nad *dowolnymi* ciałami, nie tylko nad (najważniejszym dla analizy) ciałem liczb zespolonych. Teorię tę rozwijali przede wszystkim „teorioliczbowcy" (tzn. arytmetycy), od czasu L. Kroneckera bowiem istniała tęsknota za unifikacją teorii ciał algebraicznych i funkcji algebraicznych. (Arytmetyce potrzebne były ciała funkcji algebraicznych nad ciałami skończonymi — tzw. polami Galois.) Drogę tę utorował, obok Dedekinda, uczeń Kroneckera i Weierstrassa, Kurt Hensel, twórca liczb p-adycznych (i „peadyki"). Liczby p-adyczne były przez długi czas uważane za kuriozum, dopiero prace Aleksandra Ostrowskiego, Wolfganga Krulla (ogólna teoria waluacji) i wielkiego ucznia Hensla — Helmuta Hassego sprawiły, iż peadyka jest dziś niezbywalnym narzędziem i językiem nie tylko arytmetyki, lecz i analizy. Sprawy te stanowią główny temat drugiej części niniejszego rozdziału.

Interesujące i wręcz fascynujące jest to, że ten zwycięski pochód rozpoczął Edward Kummer (nauczyciel Kroneckera), a jeden z najpiękniejszych rozdziałów matematyki stanowi właśnie *algebraiczna* czy też *arytmetyczna* — *teoria funkcji algebraicznych*, której głównym architektem był F. K. Schmidt i jego kontynuator, André Weil. Teoria ta jest zakończeniem drogi rozpoczętej przez Dedekinda i Webera i kulminuje w tzw. ogólnym twierdzeniu Riemanna–Rocha, którego dowód według F. K. Schmidta i A. Weila podaję także w niniejszym rozdziale.

Fundamentem tych rozważań jest teoria (dyskretnych) waluacji, zwanych też wykładnikami, na ciele $\boldsymbol{K}$ funkcji algebraicznych, bo w przypadku ciała funkcji meromorficznych $\boldsymbol{K} \equiv \mathscr{M}(X)$ na zwartej powierzchni Riemanna X teoria waluacji przyporządkowuje każdemu punktowi $x \in X$ odwzorowanie $\boldsymbol{K} \ni f \to \mathrm{ord}_x(f) \in \boldsymbol{Z}$, czyli rząd (zera czy bieguna) funkcji f w punkcie. Dedekind i Weber wykazali, że nie ma innych (równoważnych) waluacji dyskretnych ciała $\mathscr{M}(X)$. Było to punktem wyjścia ogólnej teorii waluacji (i norm) w ciałach przemiennych, zapoczątkowanej przez Hensla, a kontynuowanej i doprowadzonej do doskonałości przez jego uczniów (i uczniów uczniów!). Idea jest genialnie prosta — ponieważ ciało $\boldsymbol{K}$ funkcji algebraicznych jest skończonym rozszerzeniem ciała $\boldsymbol{k}(t)$ funkcji wymiernych jednej zmiennej, należy najpierw zbadać waluacje ciała $\boldsymbol{k}(t)$, a (później) rozwinąć teorię skończonych rozszerzeń dyskretnych waluacji. Prowadzi to do pojęcia pierścienia waluacyjnego. Zbiór $\boldsymbol{K}(a)$ równoważnych waluacji ciała $\boldsymbol{K}$ to właśnie pierścienie waluacji. Są one punktami „przyszłej" powierzchni Riemanna $X = X_{\boldsymbol{K}}$ ciała $\boldsymbol{K}$. W naturalny sposób określa się (na wzór teorii Riemanna) pojęcie dywizora i rozwija się teorię dywizorów na X. Wykazuje się, że gdy ciało $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{C}$, wtedy na zbiorze $X_{\boldsymbol{K}}$ można w naturalny sposób wprowadzić topologię przestrzeni zwartej, następnie zaś strukturę analityczną i wtedy abstrakcyjny twór $X_{\boldsymbol{K}}$ staje się zwartą powierzchnią Riemanna, a ciało algebraiczne $\boldsymbol{K}$ jest izomorficzne z ciałem $\mathscr{M}(X_{\boldsymbol{K}})$ funkcji meromorficznych na $X_{\boldsymbol{K}}$. Idea twierdzenia Riemanna–Rocha jest też bardzo klarowna. Oczywiście, szczegóły powyższych konstrukcji, twierdzeń i dowodów wymagają sporo miejsca — szczegóły te zawdzięczamy inwencji i geniuszowi wielkich matematyków naszego stulecia od Hensla przez Ostrowskiego, F. K. Schmidta do André Weila. Klasyczna „Riemanna teoria" była im nieodłącznym przewodnikiem!

Te skąpe uwagi o historii teorii, naszkicowanych w niniejszym rozdziale (a które są rozszerzone w trakcie wykładu!) wykazują rolę „Wielkiej Czwórki", której dedykowany jest ten rozdział. Niewątpliwie, Riemann jest największym matematykiem wszystkich czasów (jeśli chodzi o głębię i śmiałość wizji, genialność przeczuć i nieomylną intuicję). Genialny chłopiec, który by może dorównał Riemannowi, gdyby dane mu było żyć dłużej, ale został zamordowany (przez swą lekkomyślność i pasję) w wieku lat 20 i zostawił nam swój „testament" — list pisany gorączkowo w nocy przed fatalnym porankiem — pojedynki, tak jak egzekucje, odbywały się zawsze rankiem! Évarist Galois nie miał żadnych złudzeń, że zostanie zamordowany w tym „pojedynku": świadczą o tym dwa krótkie liściki (pisane też w tę straszną noc!) do przyjaciół i ciotki. Ten „zwariowany chłopak” przebacza swym przyszłym mordercom, „bo uważają oni, że działają słusznie...” List Galois do (jego) przyjaciela — to — jak nieraz powtarzał największy matematyk naszego stulecia, Hermann Weyl — „najbardziej skondensowany wśród znanych mi tekstów literatury światowej — nie tylko matematycznej!...”. A Weyl był nie tylko wielkim matematykiem, fizykiem i filozofem — był człowiekiem bardzo, bardzo oczytanym...

Bardzo systematyczny pełny wykład tej teorii znajdzie Czytelnik w monografii J. Browkina, *Teoria ciał* (1978), której sam wiele zawdzięczam. Zachęcam też w razie potrzeby do lektury pięknej książki Balcerzyka i Józefiaka *Pierścienie przemienne* (1985). Wiele też nauczyłem się z niezrównanej monografii van der Waerdena (która od 55 lat uczy pokolenia matematyków wszystkich krajów). Mądra, taktowna, bardzo przystępnie napisana monografia Helmuta Kocha *Einführung in die klassische Mathematik* (1986) stanie się zapewne dziełem klasycznym.

§ 1. Przestrzenie topologiczne

W rozdziale II widzieliśmy jak olbrzymią rolę odgrywa rodzina $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ wszystkich otwartych zbiorów przestrzeni metrycznej. Wiele podstawowych pojęć, takich jak ciągłość czy spójność, zdefiniowano za pomocą zbiorów otwartych. Narzuca się myśl, aby stworzyć teorię przestrzeni, w których ma sens mówienie o zbiorach otwartych, a dokładniej, pomysł badania klasy przestrzeni, w których aksjomatycznie wyróżniona jest rodzina zbiorów posiadająca pewne własności zbiorów otwartych. Teorię taką zawdzięczamy wielkiemu niemieckiemu matematykowi Hausdorffowi (inne aksjomaty wprowadził Kuratowski, zajmując się operacją domknięcia zbioru: por. ćwiczenie, rozdział II, § 5). W niniejszym rozdziale zajmiemy się tymi przestrzeniami i ich odwzorowaniami.

Rodzina $\mathcal{T} = \{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ zbiorów otwartych w przestrzeni metrycznej (X, d) ma następujące własności:

(0.1) *Cała przestrzeń X i zbiór pusty $\emptyset$ są zbiorami otwartymi.*

(0.2) *Suma $\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{O}_\alpha$ (dowolnej mocy) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

(0.3) *Część wspólna skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.*

Własność (0.1) wynika natychmiast z definicji zbioru otwartego w przestrzeni metrycznej, własności (0.2) i (0.3) były dowodzone jako twierdzenie II.4.1.

Można teraz podać definicję przestrzeni topologicznej.

DEFINICJA. *Przestrzeń topologiczna* to para $(X, \mathcal{T})$, gdzie $\mathcal{T} = \{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ jest rodziną podzbiorów niepustego zbioru X, spełniającą aksjomaty (0.1)-(0.3). Rodzinę $\mathcal{T}$ nazywamy *topologią* (*strukturą topologiczną*), a jej elementy to *zbiory otwarte* $\mathcal{O}_\alpha$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Jeśli nie będziemy zainteresowani oznaczaniem topologii w przestrzeni topologicznej, będziemy pisali po prostu X zamiast $(X, \mathcal{T})$.

Podamy listę podstawowych pojęć topologicznych — wszystkie są bezpośrednimi uogólnieniami pojęć, z którymi zetknęliśmy się w kontekście przestrzeni metrycznych.

Zbiór $F \subset X$ jest *domknięty*, jeśli jego dopełnienie jest zbiorem otwartym. Można łatwo sprawdzić, że część wspólna dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym oraz że suma dowolnej skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Także zbiór pusty $\emptyset$ i X są zbiorami domkniętymi.

Gdy dany jest punkt $x \in X$ (lub zbiór $Z \subset X$), wtedy dowolny zbiór $U(x)$ $\big(U(Z)\big)$ taki, że istnieje otwarty zbiór $\mathcal{O}$ taki, że $x \in \mathcal{O} \subset U(x)$ $\big(Z \subset \mathcal{O} \subset U(Z)\big)$ nazywamy *otoczeniem punktu x (zbioru Z)*.

Domknięcie $\bar{A}$ zbioru A to część wspólna wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A. Jest to oczywiście najmniejszy zbiór domknięty, który zawiera A.

Pojęciem dualnym jest *wnętrze* $\operatorname{Int} A$ *($\mathring{A}$) zbioru $A \subset X$* — największy zbiór otwarty zawarty w A. Zauważmy, że dla zbiorów niepustych ich domknięcie nie jest nigdy puste, podczas gdy wnętrze może być, i często jest, zbiorem pustym. Podzbiór przestrzeni topologicznej nazywamy *gęstym*, jeśli jego domknięciem jest cała przestrzeń.

Inne, często spotykane pojęcie *brzeg ∂A podzbioru A* przestrzeni topologicznej X definiuje się jako część wspólną domknięcia A i domknięcia dopełnienia, tzn.

$$\partial A := \bar{A} \cap \overline{(X - A)}.$$

Tak szerokie pojęcie przestrzeni topologicznej jest zbyt ogólne dla zastosowań. Dlatego Hausdorff wprowadził dodatkowy aksjomat, który jest oczywisty w przypadku przestrzeni metrycznych:

(0.4) *Dla dowolnych dwóch różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieją zbiory otwarte $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ takie, że $x_i \in \mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ i $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$.*

Przestrzeń topologiczna spełniająca aksjomat (0.4) nazywana jest *przestrzenią Hausdorffa* lub *przestrzenią typu T_2*.

W przyszłości będziemy się zajmowali najczęściej przestrzeniami Hausdorffa. Później wprowadzimy inne mocniejsze niż (0.4) aksjomaty oddzielania, prowadzące do ważnych klas przestrzeni topologicznych (np. przestrzeni regularnych, normalnych i innych).

Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T})$ nazywamy *przestrzenią metryzowalną*, jeśli można w niej wprowadzić odległość d zgodną z topologią $\mathcal{T}$, tzn. gdy otwarte zbiory przestrzeni (X, d) tworzą topologię $\mathcal{T}$. Wielu przestrzeni funkcyjnych dopuszczających interesujące struktury topologiczne nie można zmetryzować. W zbiorze ograniczonych funkcji $B(X, \mathbf{R})$ wprowadziliśmy odległość d, zbieżność w tej metryce nazwaliśmy *zbieżnością jednostajną*. Ale już tak proste pojęcie jak zbieżność punktowa (prosta) funkcji $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ prowadzi na ogół do topologii, która (na ogół) nie jest metryzowalna.

Inne sposoby wprowadzania topologii. W przestrzeni metrycznej (X, d) topologię definiowaliśmy poprzez rodzinę $\mathcal{B}$ otwartych kul, $\mathcal{B} = \{K(x, r)\colon\ x \in X,\ r \in \mathbf{R}\}$, każdy otwarty zbiór jest sumą pewnej ilości kul otwartych, innymi słowy otwarte kule tworzą „bazę" topologii przestrzeni metrycznej. Przyjmiemy następującą definicję:

DEFINICJA. Rodzina $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ nazywa się *bazą topologii* $\mathscr{T}$, jeśli każdy element $\mathscr{T}$ jest sumą zbiorów z rodziny $\mathscr{B}$. Rodzina $\mathscr{P} \subset \mathscr{T}$ nazywa się natomiast *podbazą topologii* $\mathscr{T}$, jeśli rodzina wszystkich skończonych iloczynów $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{O}_k$, gdzie $\mathcal{O}_i \subset \mathscr{P}$, $i = 1, \ldots, k$, stanowi bazę topologii $\mathscr{T}$.

Zatem, jeśli dana jest baza (podbaza), to wyznaczona jest też topologia. Czytelnik może łatwo sprawdzić, że $\mathscr{B}$ jest bazą topologii wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x\in X} \bigwedge_{U-\text{otoczenia}\, x} \bigvee_{\mathcal{O}\in\mathscr{B}} x \in \mathcal{O} \subset U.$$

Można łatwo wykazać, że każdą bazę $\mathscr{B}$ charakteryzują dwie następujące własności (które można zatem przyjąć za aksjomaty bazy):

$$\text{(B.1)} \quad \bigwedge_{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in B} \bigwedge_{x\in \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2} \bigvee_{\mathcal{O}\in\mathscr{B}} x \in \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2.$$

$$\text{(B.2)} \quad \bigwedge_{x\in X} \bigvee_{\mathcal{O}\in\mathscr{B}} x \in \mathcal{O}.$$

D o w ó d. Aksjomat (B.1) wynika z faktu, że $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ jest zbiorem otwartym; (B.2) to konsekwencja otwartości zbioru X.

Przypuśćmy teraz, że przeciwnie, rodzina $\mathscr{B}$ spełnia aksjomaty (B.1) i (B.2). Konstruujemy wówczas topologię $\mathscr{T}$, dla której $\mathscr{B}$ jest bazą, następująco:

$$(\mathcal{O} \in \mathscr{T}) \Leftrightarrow (\mathcal{O} = \bigcup_{s\in S} \mathcal{O}_s \text{ dla pewnej podrodziny } \{\mathcal{O}_s\}_{s\in S} \subset \mathscr{B}).$$

Biorąc za $\{\mathcal{O}_s\}_{s\in S}$ rodzinę pustą i całą rodzinę $\mathscr{B}$ widzimy, że $\emptyset$ i X (por. (B.2)) należą do $\mathscr{T}$. Podobnie spełniony jest aksjomat (0.2). Nieco trudniej sprawdzić (0.3). Przypuśćmy, że $\mathcal{O}, \mathcal{O}' \subset \mathscr{T}$. Mamy więc

$$\mathcal{O} = \bigcup_{s\in S} \mathcal{O}_s, \quad \mathcal{O}' = \bigcup_{t\in T} \mathcal{O}_t, \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{O}_s, \mathcal{O}_t \in \mathscr{B} \text{ dla } s\in S,\ t \in \mathscr{T}.$$

Ale

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \bigcup_{(s,t)\in S\times T} \mathcal{O}_s \cap \mathcal{O}_t,$$

więc wystarczy wykazać, że każdy niepusty zbiór $\mathcal{O}_s \cap \mathcal{O}_t$ jest sumą zbiorów rodziny $\mathscr{B}$. Przypuśćmy, że $x \in \mathcal{O}_s \cap \mathcal{O}_t$, z warunku (B.1) wynika, że istnieje zbiór $\mathcal{O}(x) \in \mathscr{B}$ taki, że $x \in \mathcal{O}(x) \subset \mathcal{O}_s \cap \mathcal{O}_t$. Ale

$$\mathcal{O}_s \cap \mathcal{O}_t = \bigcup_{x\in\mathcal{O}_s\cap\mathcal{O}_t} \mathcal{O}(x),$$

a więc aksjomat (0.3) jest spełniony. ∎

§ 2. Bazy otoczeń. Aksjomaty przeliczalności

Najczęściej topologię wprowadza się przez podanie pełnego układu otoczeń, czyli bazy otoczeń każdego punktu $x \in X$.

DEFINICJA. Jeśli $(X, \mathscr{T})$ jest przestrzenią topologiczną, to *baza topologii* $\mathscr{T}$ *w punkcie* $x \in X$ (*bazą otoczeń punktu* x) nazywamy rodzinę $\mathscr{B}(x)$ otoczeń punktu x, mającą tę własność, że dla dowolnego zbioru otwartego $\mathcal{O} \ni x$ istnieje otoczenie $U \in \mathscr{B}(x)$ takie, że $x \in U \subset \mathcal{O}$. Łatwo widać, że jeżeli $\mathscr{B}$ jest bazą topologii $\mathscr{T}$, to rodzina złożona ze wszystkich elementów bazy $\mathscr{B}$ zawierających x jest bazą topologii $\mathscr{T}$ w punkcie x.

Nietrudno także wykazać, że jeśli rozważymy w każdym punkcie x bazę otoczeń $\mathscr{B}(x)$ tego punktu, to rodzina $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ spełnia następujące trzy warunki (pochodzące także od Hausdorffa):

(H.1) $$\bigwedge_{x \in X} \mathscr{B}(x) \neq \emptyset, \qquad \bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{U \in \mathscr{B}(x)} x \in U,$$

czyli *każdy punkt* x *ma co najmniej jedno otoczenie z* $\mathscr{B}(x)$ *oraz leży w każdym ze swych otoczeń*.

(H.2) $$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)} \bigvee_{U \in \mathscr{B}(x)} U \subset U_1 \cap U_2.$$

(H.3) $$\bigwedge_{x \in X} \bigwedge_{U \in \mathscr{B}(x)} \bigvee_{V \in \mathscr{B}(x)} \bigwedge_{y \in V} \bigvee_{W \in \mathscr{B}(x)} W \subset U.$$

DEFINICJA. Rodzinę $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$, gdzie każde $\mathscr{B}(x)$ jest bazą topologii $\mathscr{T}$ w punkcie x (przestrzeni topologicznej $(X, \mathscr{T})$), nazywa się *pełnym układem otoczeń przestrzeni* $(X, \mathscr{T})$ *lub topologii* $\mathscr{T}$ (czasem krótko: *bazą otoczeń przestrzeni* $(X, \mathscr{T})$).

Analogicznie jak wyżej, wykazuje się, że baza otoczeń przestrzeni wyznacza jej topologię.

Niech dany będzie zbiór X i rodzina $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ spełniająca warunki (H.1)-(H.3). Oznaczmy przez $\mathscr{T}$ rodzinę wszystkich zbiorów, które są sumami podrodzin rodziny $\bigcup_{x \in X} \mathscr{B}(x)$. Wtedy rodzina $\mathscr{T}$ ma własności (0.1)-(0.3), czyli jest topologią przestrzeni X. Klasa $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ stanowi pełny układ otoczeń przestrzeni $(X, \mathscr{T})$. Ponadto, jeśli wyjściowa rodzina $\{\mathscr{B}(x)\}_{x \in X}$ jest bazą otoczeń pewnej topologii $\mathscr{T}'$, to skonstruowana wyżej topologia $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$, dlatego właśnie mówimy, że baza otoczeń przestrzeni topologicznej wyznacza jej topologię.

Hausdorff wprowadził także następujące dwa ważne aksjomaty:

AKSJOMATY PRZELICZALNOŚCI. I. *Każdy punkt ma pewną przeliczalną bazę otoczeń.*

II. *Przestrzeń ma przeliczalną bazę topologii* (*pełny układ otoczeń*).

Jeśli $(X, \mathscr{T})$ zawiera przeliczalny zbiór gęsty, to mówi się, że przestrzeń $(X, \mathscr{T})$ jest *ośrodkowa*. Nietrudno wykazać, że (($X, \mathscr{T}$) spełnia drugi aksjomat przeliczalności) $\Rightarrow$ (($X, \mathscr{T}$) jest ośrodkowa), ponieważ biorąc po jednym punkcie z każdego elementu przeliczalnej bazy, otrzymujemy zbiór przeliczalny gęsty. Twierdzenie odwrotne na