

Tomasz Dominik Gwiazda

# ALGORYTMY GENETYCZNE

## kompedium

**TOM II**

Operator mutacji  
dla problemów numerycznych



**TOMASZ DOMINIK GWIAZDA**

**ALGORYTMY  
GENETYCZNE**

**KOMPENDIUM**

**TOM 2**

**OPERATOR MUTACJI**

**DLA PROBLEMÓW NUMERYCZNYCH**



Projekt okładki: **Michał Rosiński**  
Redakcja: **Krystyna Knap**  
Skład komputerowy: **Tomasz Dominik Gwiazda**

Zastrzeżonych nazw firm i produktów użyto w książce wyłącznie w celu identyfikacji.

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Warszawa 2007

ISBN 978-83-01-15381-6

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
00-251 Warszawa, ul. Miodowa 10  
tel. (0 22) 69 54 321  
faks (0 22) 69 54 031  
e-mail: [pwn@pwn.com.pl](mailto:pwn@pwn.com.pl)  
[www.pwn.pl](http://www.pwn.pl)

Wydawnictwo Naukowe PWN SA  
Wydanie pierwsze  
Arkuszy drukarskich 17,25  
Druk ukończono w październiku 2007 r.  
Druk i oprawa ZWP HEL,  
04-007 Warszawa,  
ul. Grenadierów 77

# Spis treści

---

<b>1. Wstęp.....</b>	<b>9</b>
<b>2. Standardowe operatory mutacji.....</b>	<b>13</b>
Wymiana/odwrócenie bitu (Bit-flip/Invert a Bit/Bit Substitution) (B).....	13
Wstawienie bitu (Bit Insertion) (B).....	14
Usunięcie bitu (Bit Deletion) (B).....	14
Wstawienie genu (Gene Insertion) (B).....	15
Usunięcie genu (Gene Deletion) (B).....	16
Inwersja genu (Gene Inversion) (B).....	16
Transpozycja genu (Gene Transposition) (B).....	17
Retrotranspozycja genu (Gene Retro Transposition) (B).....	18
Losowa wartość bitu (Random Bit Value) (B).....	19
Losowa (z zaburzeniem) wartość bitu (Random Bit Value With a Bias) (B).....	20
Wymiana pary bitów (Swap Two Bits) (B).....	21
Mutacja pełzająca (Creep Mutation) (B).....	21
<b>3. Kontrola parametrów – podejście deterministyczne statyczne i dynamiczne.....</b>	<b>23</b>
Sugestia i formuła De Jonga (B, R)(P).....	23
Sugestia Grefenstette’a (B, R)(P).....	23
Sugestia i formuła Schaffera i in. (B, R)(P).....	23
Formuła Bäcka (B, R)(P).....	24
Formuła Mühlenbeina (B, R)(P).....	24
Sugestia i formuła Fogarty’ego (B, R)(P).....	25
Sugestia i formuła Hessera i Manneri (B, R)(P).....	25
Formuła Greenwella i in. (B, R)(P).....	26
Formuła Bäcka i Schütza (B, R)(P).....	26
Formuła Beasleya (B, R)(P).....	27
Formuła Leite’a i Toppinga (B, R)(P).....	28
Formuła Senga i in. (B, R)(P).....	28
Formuła Nguyena i Wonga (B, R)(MS).....	29
Formuła Srivastavy i in. (B, R)(P).....	29
Formuła Madeline (B, R)(P).....	30
Reguła odmładzania populacji (Population Rejuvenation Rule) (B, R).....	31
<b>4. Kontrola parametrów – podejście adaptacyjne dynamiczne.....</b>	<b>32</b>
Reguła Rechenberga (B, R)(P).....	32
Formuła Bäcka (B, R)(P).....	33
Formuła Fullera i in. (B)(P).....	33
Formuła Chena i in. (B, R)(P).....	34
Formuła prognozy błędów Ochoi i in. (B, R).....	34
Formuła Elhadefa i Ayeba (B, R)(P).....	35

Reguła Droste'a i in. (B, R)(P).....	36
Formuła He i in. (B, R)(P).....	37
Formuła Chenga i in. (B, R)(P).....	37
Formuły Metcalfe'a i Charbonneau (B, R)(P).....	38
Formuła Tana i in. (B, R)(P).....	39
Formuła Chana i Liu (B, R)(P).....	40
Formuła Minqianga i Jisonga (B, R)(P).....	41
Formuła Kamoia i Iwaia (B, R)(P).....	41
Formuła Liu i Fenga (B, R)(P).....	42
Formuła Quirina i Korczaka (B, R)(P).....	43
Uaktywniana hipermutacja (Triggered Hypermutation) (B, R)(P).....	44
Adaptacja prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji-1 (Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation-1) (B, R)(P).....	46
Metoda Zhu i Changa (B, R)(P).....	49
Prawdopodobieństwo bazujące na stopniu koncentracji (Concentration Degree-based Operator Probabilities) (B, R)(P).....	51
Metoda Zhuanga i in. (B, R)(P).....	53
Adaptywne prawdopodobieństwo operatora (Adaptive Operator Probabilities) (B, R)(P).....	54
COBRA (B, R)(P).....	57
Mutacja kontrolowana logiką rozmytą (Fuzzy Logic Controlled Mutation) (B, R)(P).....	59
Model adaptacyjny bazujący na regule probabilistycznej (Probabilistic Rule-based Adaptive Model) (B, R)(P).....	60
Adaptywna asymetryczna mutacja (Adaptive Asymmetric Mutation) (B, R)(P).....	65
Adaptacja prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji-2 (Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation-2) (B, R)(P).....	67
Adaptacja prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji-3 (Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation-3) (B, R)(P).....	70
Adaptywna alleliczna mutacja (Adaptive Allelic Mutation) (B, R) (P).....	72
Adaptywna mutacja metodą stałego przyrostu i redukcji (Constant Gain & Declining Adaptive Mutation) (B, R) (P).....	74
Adaptacja prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji-4 (Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation-4) (B, R)(P).....	77
Adaptacja prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji-5 (Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation-5) (B, R)(P).....	80
Adaptacja prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji-6 (Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation-6) (B)(P).....	82
Adaptacja prawdopodobieństwa krzyżowania i mutacji-7 (Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation-7) (B, R)(P).....	84
Adaptywna strategia gonitwy (Adaptive Pursuit Strategy) (B, R)(P).....	87
Ochrona przed grzęźnięciem (Guarding Against Stalling) (B, R)(P).....	90
Lokalne dostrojenie z efektem głównym (Main Effect Fine Tuning) (B, R)(P).....	91
Mutacja bazująca na znormalizowanym dystansie przystosowania (Normalized Fitness-based Mutation) (B, R) (P).....	94
Adaptacja liczby punktów krzyżowania i mutacji (Adaptive Number of Mutation Points) (B)(MP).....	96

Mutacja bazująca na wektorze etykiet (Labeled Chromosome-based Mutation) (B, R)(P) .....	98
Adaptywna mutacja ukierunkowana na geny (Gene-based Adaptive Mutation) (B) (P) .....	101
Mutacja bazująca na statystykach pozycji (Locus Statistics-based Mutation) (B, R, D)(P) .....	103
<b>5. Kontrola parametrów – podejście samoadapttywne.....</b>	<b>106</b>
Mutacja bazująca na SE-1 (ES-based Mutation-1) (B, R)(P) .....	106
Mutacja bazująca na SE-2 (ES-based Mutation-2) (R)(MS) .....	108
Mutacja bazująca na SE-3 (ES-based Mutations-3) (R)(MS) .....	111
<b>6. Operatory mutacji dla problemów kodowanych liczbami binarnymi.....</b>	<b>115</b>
Mutacja infekcją wirusową (Virus Infection Operators) (B, R) .....	115
Mutacja zliczająca-1 (Count-preserving Mutation-1) (B) .....	118
Mutacja lokalnie zachłanna (Local Greedy Mutation) (B, R) .....	120
Aproksymacja techniki największego spadku gradientu (Gradient-descent Techniques Approximation) (B) .....	122
Mutacja najlepszym schematem (Best Schema Mutation) (B) .....	124
Ekstrakcja bitów (Gene Extraction) (B) .....	127
Mutowanie z decydem (Half Sibling and Clone) (B) .....	130
Mutacja zliczająca-2 (Count-preserving Mutation-2) (B) .....	131
Samoadaptywne mutacja Gaussa (Self-adaptive Gaussian Mutation) (B) .....	133
Mutacja Mijn (Co-mutation Mijn operator) (B) .....	135
Mutacja dynamiczna (Dynamic Mutation) (B, R) .....	138
Mutacja różnicowaniem lub naśladowaniem (Mutation by Differentiation or Imitation) (B) .....	141
Mutacja uciekająca (Flee Mutation) (B) .....	144
Mutacja rotacją (Rotation Mutation) (B) .....	147
$\lambda$ -Mutacja ( $\lambda$ -Mutation – Self-directed Chaos) (B) .....	149
Mutacja bazująca na pozycji i liczbie (Location-based & Number-based Mutation) (B) .....	151
Mutacja bazująca na różnorodności genów (Gene Diversity-based Mutation) (B)(P) .....	154
Mutacja bazująca na modelu niewspółmierności (Disparity Model-based Mutation) (B, R) .....	156
Mutacja dwuargumentowa wektorów liczb binarnych (Dyadic Mutation) (B, R) .....	160
Mutacja heurystyczna z zanikającym prawdopodobieństwem (Heuristic Mutation with Final-zero-rate) (B) (P) .....	162
Mutacja upodabniająca (Softmax Mutation) (B) .....	164
Mutacja indywidualna (Specific Part of Chromosome Mutation) (B, R) .....	166
Mutacje horyzontalne/transpozycje (Jumping Gene/Horizontal Mutation/Transposition) (B, R, D) .....	168
Mutacja kierowana (Guided Mutation) (B) .....	174
1-bitowa mutacja sterowana wiekiem (Age-driven 1-bit Mutation) (B) .....	177
Mutacja warunkowa (Conditional Mutation) (B) .....	179

<b>7. Operatory mutacji dla problemów kodowanych liczbami rzeczywistymi.....</b>	<b>182</b>
Mutacja równomierna (Uniform Mutation) (R) .....	182
Mutacja brzegowa (Boundary Mutation) (R) .....	184
Mutacja nierównomierna (Non-uniform Mutation) (R) .....	185
Mutacja zmienna w czasie (Time-Variant Mutation) (R).....	187
Mutacja bazująca na gradiencie ważonym (Weighted Gradient Direction-based Mutation) (R).....	189
Mutacja Deba i Goyal (Deb & Goyal Mutation) (R).....	193
Mutacja bazująca na entropii (Entropy-based Mutation) (R).....	194
Operatory dla problemów optymalizacji dynamicznej (Operators for Dynamic Optimization Problems) (R).....	197
Mutacja bazująca na symulowanym wyżarzaniu-1 (Simulated Annealing based Mutation-1) (R).....	200
Mutacja bazująca na symulowanym wyżarzaniu-2 (Simulated Annealing based Mutation-2) (R).....	203
Mutacja w hipersześcianie (Breeder GA Mutation) (R).....	205
Makromutacja z wspinaczką (Macromutational Hillclimbing) (B, R) .....	207
Mutacja bazująca na minimum konfliktu (Min-conflict based Mutation) (B, D).....	210
Mutacja kontrolowana wiekiem (Age-controlled Mutation) (B, D, R) .....	213
Mutacja zorientowana i z imigracją (Orientated Mutation and Immigration Mutation) (R).....	215
Mutacja sferyczna (Sphere Mutation) (R).....	217
Mutacja z wektorem różnic (Differential Evolution Mutation) (R).....	219
Mutacja bazująca na modelach zredukowanych (Reduced Models-based Mutation) (B, R).....	221
Mutacja bakteryjna (Bacterial Mutation) (B, R).....	222
Poprawiona mutacja nierównomierna (Improved Non-uniform Mutation) (R) .....	224
Zmodyfikowana mutacja równomierna (Modified Uniform Mutation) (R).....	226
Mutacja logarytmiczna (Logarithmic Mutation) (R).....	228
Mutacja z wyszukiwaniem kierunkowym/dopasowaniem parabolicznym (1-D Parabolic Search Mutation) (R).....	230
Mutacja podążająca za selekcją (Selection Follower) (R).....	232
Mutacja chaosem, mutacja chaosem z wyżarzaniem (Chaotic Mutation, Annealing Chaotic Mutation) (R) .....	234
Mutacja brzegowa, przesuująca i wygładzająca (Boundary, Push, and Smooth Mutations) (R).....	237
Mutacja nieliniowa-1 (Nonlinear Mutation-1) (R).....	240
Mutacja lamarkowska (Lamarckian Mutation) (R).....	242
Mutacja nieliniowa-2 (Nonlinear Mutation-2) (R).....	244
Mutacja ułomna (Imperfect Mutation) (R).....	245
Zmodyfikowana mutacja nierównomierna (Modified Non-uniform Mutation) (R).....	247
Mutacja dwuargumentowa wektorów liczb rzeczywistych (Dyadic Floating-Point Mutation) (R).....	250
Adaptywna mutacja Kamala (Kamal's Adaptive Mutation) (B, R) .....	251
Wielogenowa mutacja nierównomierna (Multi Non-uniform Mutation) (R).....	253
Metoda przełączająca (Improved Crossover and Mutation) (B, R).....	256
Kombinacja wypukła (Convex Combination) (R).....	258

---

Mutacje kierunkowe (Directional Mutations) (R) .....	259
Mutacja symetryczna i procentowa (Mirror & Percentage Mutations) (R) .....	264
Mutacja bazująca na modelach socjologicznych (Mutation for Continuous Adaptive Culture Model) (B, R).....	266
Mutacja falowa/oscyłująca (Wavelet Mutation) (R) .....	268
<b>Indeks słów kluczowych, autorów i funkcji testowych.....</b>	<b>270</b>





# 1. Wstęp

---

Książka ta jest kontynuacją serii *Algorytmy genetyczne – kompendium*, której pierwszy tom był poświęcony operatorom krzyżowania. Bieżący, drugi tom, przedstawia operatory mutacji przeznaczone do rozwiązywania problemów optymalizacji numerycznej.

Układ książki nawiązuje do układu poprzedniego tomu, jednak tym razem prosty podział na operatory dedykowane do rozwiązywania problemów kodowanych liczbami binarnymi i liczbami rzeczywistymi już nie wystarczał. Prace badawcze poświęcone operatorowi mutacji nie sprowadzają się bowiem do opracowania jego nowej, często dedykowanej, postaci. Jednym z głównych pytań stawianych w kontekście tego operatora jest pytanie o prawdopodobieństwo jego stosowania i o skalę perturbacji wnoszonej przez ten operator, dlatego też trzy spośród siedmiu rozdziałów książki poświęcone są właśnie tej kwestii.

Ostatecznie układ książki jest następujący. Pierwsze trzy rozdziały prezentują sugestie, formuły i metody stosowane w określaniu wartości parametrów sterujących procesem mutacji. Zastosowałem tu najbardziej popularny podział<sup>1</sup> na podejście deterministyczne statyczne i dynamiczne, podejście adaptywne dynamiczne i podejście samoadaptywne. Dwa ostatnie rozdziały przedstawiają operatory mutacji opracowane z myślą o problemach kodowanych liczbami binarnymi i rzeczywistymi.

Podobnie jak to miało miejsce w tomie pierwszym, podział na metody dedykowane dla problemów kodowanych liczbami binarnymi lub rzeczywistymi jest tutaj trochę sztuczny i wynika najczęściej z treści tekstu źródłowego. Ponieważ jednak wiele z prezentowanych sugestii, reguł i metod może być stosowanych dla różnych klas problemów, stąd każda z nich jest oznaczona jednym lub wieloma następującymi symbolami określającymi zakres ich zastosowania:

- (B) – problemy kodowane liczbami binarnymi;
- (R) – problemy kodowane liczbami rzeczywistymi;
- (D) – problemy kodowane liczbami całkowitymi;
- (P) – wyznaczanie wartości prawdopodobieństwa mutacji;
- (MS) – wyznaczanie długości kroku mutacji;
- (MP) – wyznaczanie liczby punktów mutacji.

Za wyjątkiem pierwszego rozdziału, we wszystkich kolejnych zastosowałem ten sam co w tomie pierwszym schemat prezentacji. Zależenie od tego, czy prezentowana jest sugestia, reguła, czy też pełna metoda, schemat ten składa się ze wszystkich lub tylko z kilku następujących elementów:

- Słowa kluczowe – mają pomóc w przeszukiwaniu książki i wzajemnym kojarzeniu prezentowanych w niej operatorów.
- Motywacja – wskazanie motywacji leżącej u podstaw opracowania danego operatora; motywacja ta była albo formułowana przez autorów *explicite*, albo wskazana jest przeze mnie w sposób *arbitralny*.

---

<sup>1</sup> zob: R. Hinterding, Z. Michalewicz, A. E. Eiben (1997). *Adaptation in evolutionary computation: A survey*. <http://citeseer.ist.psu.edu/hinterding97adaptation.html>

- Źródło – tekst źródłowy wraz ze wskazaniem adresu serwisu internetowego, skąd można ten tekst pobrać; w większości serwisy te są serwisami publicznymi – bezpłatnymi.
- Czytaj także – zalecane dodatkowe teksty, których tematyka jest bezpośrednio związana z omawianym operatorem; wybór tych tekstów, aczkolwiek dokonywany przeze mnie arbitralnie, opiera się głównie na liście bibliograficznej zawartej w tekście źródłowym lub też wskazuje teksty omawiające dalszy rozwój danego operatora lub innych operatorów ideowo z nim związanych; zalecanym tekstom także towarzyszą adresy serwisów, skąd można je pobrać.
- Patrz także – inne operatory, z którymi w mojej opinii warto się zapoznać w kontekście danego operatora.
- Algorytm – prezentuje w formie pseudokodu omawiany operator, nierzadko w kilku wariantach; zdecydowałem się na tę formę prezentacji operatora, ponieważ w większości przypadków umożliwia ona natychmiastowe zastosowanie operatora w praktyce, z drugiej zaś strony nie chciałem stosować konkretnego języka programowania, ponieważ dodatkowo pojawiające się w kodzie elementy wynikające z gramatyki języka mogłyby utrudnić zrozumienie demonstrowanego operatora. Prezentowany algorytm często może odbiegać od swej oryginalnej postaci przedstawionej w tekście źródłowym. Dzieje się tak wtedy, gdy postać ta miała ścisły związek z problemem, dla którego operator został opracowany, jednak w każdym wypadku kluczowa idea operatora została tu zaprezentowana.
- Komentarze – komentarze lub opis prezentowanego operatora, zależnie od tego, czy w mojej opinii pseudokod algorytmu stanowi wystarczający opis operatora, czy nie.
- Funkcje testowe – lista standardowych funkcji lub problemów testowych, o ile takowe zostały zastosowane w toku eksperymentów z użyciem omawianego operatora.
- Porównano z – lista innych operatorów krzyżowania, z którymi porównywany był (w tekście źródłowym) prezentowany operator.

Aczkolwiek może to się spotkać z dezaprobatą, w toku całego tekstu traktuję jako synonimy takie pary pojęć, jak „rekombinacja – krzyżowanie”, „wektor rozwiązania – chromosom”, „gen – zmienna”, „generacja – iteracja”. Ponadto, o ile nie zostanie *explicite* wskazane, że jest inaczej, w całym tekście stosuję następujące oznaczenia:

$t$  – licznik generacji (iteracji, numeru populacji)

$M$  – maksymalna liczba generacji (iteracji) algorytmu

$P()$  – populacja wektorów rozwiązania (chromosomów)

$P(0)$  – początkowa populacja

$P(t)$  – bieżąca populacja (populacja rodziców)

$P(t+1)$  – następna populacja (populacja potomków)

$L_p$  – licznosc populacji (rozmiar populacji)

$p_c$  – prawdopodobieństwo krzyżowania

$p_c^{(t)}$  – prawdopodobieństwo krzyżowania w generacji  $t$

$p_c^{(t)}(X)$  – prawdopodobieństwo krzyżowania wektora  $X$  w generacji  $t$

$p_m$  – prawdopodobieństwo mutacji<sup>2</sup>

$p_m^{(t)}$  – prawdopodobieństwo mutacji w generacji  $t$

$p_m^{(t)}(X)$  – prawdopodobieństwo mutacji wektora  $X$  w generacji  $t$

$n$  – długość wektora rozwiązania (chromosomu)

$N()$  – rozkład normalny/Gausa

$C()$  – rozkład Cauchy'ego

$U()$  – rozkład jednolity/równomierny

$\lfloor a \rfloor$  – część całkowita liczby  $a$

$Rnd$  – losowa liczba rzeczywista,  $Rnd \sim U(0, 1)$ ; jeżeli  $Rnd$  występuje w pętli algorytmu, wtedy w każdym cyklu tej pętli wartość  $Rnd$  wyznaczana jest ponownie

### Operatory dla problemów kodowanych liczbami binarnymi

$A^{(t)} = (a_1^{(t)}, \dots, a_n^{(t)}) \forall i a_i^{(t)} \in \{0, 1\}$  – binarny wektor rozwiązania (wektor kodowany liczbami binarnymi) (chromosom binarny)

$f(A^{(t)})$  – przystosowanie binarnego wektora rozwiązania  $A^{(t)}$

$\{A_1^{(t)}, \dots, A_k^{(t)}\} \in P(t)$  – binarne wektory rozwiązania (chromosomy binarne)

$A_j^{(t)} = (a_{j1}^{(t)}, \dots, a_{jn}^{(t)}) \forall i, j a_{ji}^{(t)} \in \{0, 1\}$

$f(A_j^{(t)})$  – przystosowanie binarnego wektora rozwiązania  $A_j^{(t)}$

### Operatory dla problemów kodowanych liczbami rzeczywistymi

$X^{(t)} = (x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}) \in R^n$  – rzeczywisty wektor rozwiązania (wektor kodowany liczbami rzeczywistymi) (chromosom rzeczywisty)

---

<sup>2</sup> W teorii GA pojęcie *prawdopodobieństwo mutacji* oznacza prawie zawsze prawdopodobieństwo mutacji pojedynczego genu w chromosomie i właśnie tak to będzie rozumiane w całej tej książce; w wypadkach gdy pojęcie to będzie dotyczyło całego chromosomu (a nie pojedynczego genu), będzie to w treści książki wyraźnie zaznaczone.

$\forall i \ x_i^l \leq x_i \leq x_i^u$ , gdzie:

$x_i^l$  – dolne ograniczenie dziedziny  $i$ -tej zmiennej ( $i$ -tego genu)

$x_i^u$  – górne ograniczenie dziedziny  $i$ -tej zmiennej ( $i$ -tego genu)

$f(X^{(t)})$  – przystosowanie rzeczywistego wektora rozwiązania  $X^{(t)}$

$\{X_1^{(t)}, \dots, X_k^{(t)}\} \in P(t)$  – rzeczywiste wektory rozwiązania (chromosomy rzeczywiste)

$\forall i, j \ X_j^{(t)} = (x_{j1}^{(t)}, \dots, x_{jn}^{(t)}) \in R^n, x_i^l \leq x_{ji} \leq x_i^u$ , gdzie:

$x_i^l$  – dolne ograniczenie dziedziny  $i$ -tej zmiennej ( $i$ -tego genu)

$x_i^u$  – górne ograniczenie dziedziny  $i$ -tej zmiennej ( $i$ -tego genu)

$f(X_j^{(t)})$  – przystosowanie rzeczywistego wektora rozwiązania  $X_j^{(t)}$

---

Po wydaniu pełnej serii planowanych kompendiów planuję raz na dwa lata przygotowywać suplementy obejmujące swoją zawartością kolejne dwa lata, licząc od daty wydania danego kompendium. Będę je rozsyłał do każdego chętnego czytelnika. Stąd, jeżeli chcesz w przyszłości otrzymywać taki suplement, daj mi o tym znać e-mailem.

## 2. Standardowe operatory mutacji

### Wymiana/odwrócenie bitu (Bit-flip/Invert a Bit/Bit Substitution) (B)

(BF)

#### Algorytm

1. wybierz rodzica  $A_j^{(t)}$  i utwórz potomka  $A_j^{(t+1)}$  następująco:
2. for  $i = 1$  to  $n$  do
3.     if  $Rnd \leq p_m$  then
4.         if  $a_{ji}^{(t)} = 0$  then
5.              $a_{ji}^{(t+1)} \leftarrow 1$
6.             else
7.              $a_{ji}^{(t+1)} \leftarrow 0$
8.             end if
9.         else
10.              $a_{ji}^{(t+1)} \leftarrow a_{ji}^{(t)}$
11.         end if
12. end do

#### Komentarze

- Operator BF z prawdopodobieństwem  $p_m$  (wiersz 3) wymienia bieżącą (wiersze 4 i 6) wartość bitu na przeciwną (wiersze 5 i 7).

## Wstawienie bitu (Bit Insertion) (B)

### (BI)

#### Algorytm

1. wybierz rodzica  $A_j^{(t)} = (a_1^{(t)}, \dots, a_n^{(t)})$  i utwórz potomka  $A_j^{(t+1)} = (a_1^{(t+1)}, \dots, a_{n+1}^{(t+1)})$  następująco:
2. z równomiernym prawdopodobieństwem wylosuj punkt wstawiania  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$
3.     for  $i = 1$  to  $\alpha - 1$  do
4.          $a_{ji}^{(t+1)} \leftarrow a_{ji}^{(t)}$
5.     end do
6. z równomiernym prawdopodobieństwem wylosuj liczbę binarną  $\beta \in \{0, 1\}$
7.  $a_{j\alpha}^{(t+1)} \leftarrow \beta$
8.     for  $i = \alpha + 1$  to  $n$  do
9.          $a_{ji}^{(t+1)} \leftarrow a_{ji-1}^{(t)}$
10.     end do

#### Komentarze

- Operator BI wstawia na wylosowaną (wiersz 2) pozycję nowy bit o wylosowanej (wiersz 6) wartości.

## Usunięcie bitu (Bit Deletion) (B)

### (BD)

#### Algorytm

1. wybierz rodzica  $A_j^{(t)} = (a_1^{(t)}, \dots, a_n^{(t)})$  i utwórz potomka  $A_j^{(t+1)} = (a_1^{(t+1)}, \dots, a_{n-1}^{(t+1)})$  następująco:
2. z równomiernym prawdopodobieństwem wylosuj punkt usuwania  $\alpha \in \{1, \dots, n\}$
3.     for  $i = 1$  to  $\alpha - 1$  do
4.          $a_{ji}^{(t+1)} \leftarrow a_{ji}^{(t)}$
5.     end do