Algebra macierzy brzegowych

z zastosowaniami

Michał Kolupa
Zbigniew Śleszyński

Wydawnictwo C.H. Beck

Algebra macierzy brzegowych

z zastosowaniami

Algebra macierzy brzegowych

z zastosowaniami

Michał Kolupa
Zbigniew Śleszyński

WYDAWNICTWO C.H. BECK
WARSZAWA 2010

Wydawca: Dorota Ostrowska-Furmanek
Redakcja merytoryczna: Urszula Cielniak
Projekt okładki i stron tytułowych: Maryna Wiśniewska
Ilustracja na okładce: © Mark Evans/iStockphoto.com

Seria: Metody ilościowe

Złożono programem TEX

Wydawnictwo C.H. Beck Sp. z o.o.
ul. Bonifraterska 17, 00-203 Warszawa

Skład i łamanie: Wydawnictwo C.H. Beck
Druk i oprawa: Elpil, Siedlce

ISBN 978-83-255-1123-4

Spis treści

Wstęp

Niniejsza praca składa się z sześciu rozdziałów poświęconych teorii i aplikacjom macierzy brzegowych oraz dwóch dodatków oznaczonych literami A i B. Scharakteryzujemy teraz krótko treść rozdziałów i dodatków.

W rozdziale pierwszym przedstawiamy definicję macierzy brzegowej będącej szczególnym przypadkiem macierzy blokowej oraz podajemy podstawowe twierdzenie dotyczące macierzy brzegowych.

Rozdział drugi zawiera informacje na temat działań wykonywanych na macierzach z wykorzystaniem macierzy brzegowych. Mówimy tu o dodawaniu i odejmowaniu macierzy, przedstawiamy iloczyn Cauchy'ego dwóch macierzy oraz iloczyn liczby przez macierz (macierzy przez liczbę).

Rozdział trzeci jest poświęcony omówieniu zastosowań macierzy brzegowych do obliczania wartości wyznacznika, natomiast w rozdziałach dalszych zaprezentowano zastosowania macierzy brzegowych do wyznaczania macierzy odwrotnej (rozdz. 4), rozwiązywania układów równań liniowych (rozdz. 5) oraz wyznaczania rozwiązań bazowych (rozdz. 6).

Z przedstawionych informacji wynika, że w naszej książce są omawiane podstawowe zagadnienia mieszczące się w programie algebry liniowej wykładanej na różnego rodzaju studiach ekonomicznych w Polsce.

Proponowane ujęcie zapewnia *a priori* jednolite podejście do tematu, a tym samym ułatwia zaprogramowanie metod na komputer. Nadto powoduje, że wykład algebry nie ma cech „książki kucharskiej", tak charakterystycznych w przypadku ujęcia tradycyjnego.

Posługiwanie się macierzami brzegowymi wymaga umiejętności konstruowania odpowiedniej macierzy brzegowej. Mając taką macierz, należy w każdym przypadku wykonać te same, co z mocą podkreślamy, działania elementarne na wierszach macierzy brzegowej.

Pod pojęciem działań elementarnych rozumiemy:

1. Mnożenie wierszy macierzy przez dowolną liczbę różną od zera (oznacza to, że każdy element danego wiersza mnożymy przez tę liczbę, np. jeśli wiersz ma postać $[2\ 3\ 5\ 7]$, a daną liczbą jest 2, to pomnożenie tego wiersza przez 2 powoduje, że mamy nowy wiersz postaci $[4\ 6\ 10\ 14]$.

2. Mnożenie wiersza przez dowolną liczbę różną od zera, a następnie dodanie tak otrzymanego wiersza do innego wiersza (poprzednio pomnożony wiersz $[4\ 6\ 10\ 14]$ dodamy do innego wiersza, np. $[6\ 2\ 8\ -1]$, i otrzymamy $[10\ 8\ 18\ 13]$).
3. Zamiana miejscami dwóch dowolnych wierszy.

Każdy z wymienionych rozdziałów ma jednakową strukturę. Najpierw omawiamy podstawowe fakty tematycznie związane z zagadnieniem wymienionym w tytule rozdziału, następnie ilustrujemy je na przykładach, po czym, w kolejnym podrozdziale, przedstawiamy zadania do samodzielnego rozwiązania przez Czytelnika. Na koniec podajemy odpowiedzi do zadań przeznaczonych do samodzielnego rozwiązania wraz ze wskazówkami.

Na wstępie informowaliśmy, że oprócz wspomnianych sześciu rozdziałów, które można nazwać algebraicznymi, praca zawiera jeszcze dwa dodatki oznaczone literami A i B. One również mają taką samą strukturę, co wymienione rozdziały.

Dodatek A jest poświęcony elementom teorii jednorównaniowych modeli ekonometrycznych.

Dodatek B dotyczy elementów teorii par korelacyjnych.

Powyższe informacje wskazują, że tematyka zamieszczona w dodatkach odpowiada wykładom z ekonometrii realizowanym na kierunku ekonomia.

Dodajmy jeszcze, że w dodatkach A i B podajemy wykorzystanie macierzy brzegowych zarówno w teorii jednorównaniowych modeli ekonometrycznych, jak i w teorii par korelacyjnych.

Niniejsze opracowanie może być więc uznane za podręcznik z zakresu algebry liniowej oraz aplikacji w ekonometrii, przeznaczony głównie, ale nie jedynie, dla słuchaczy studiów ekonomicznych w ramach kierunku ekonomia.

Rozdział 1. Macierz brzegowa i jej podstawowe własności

1.1. Podstawy teoretyczne

Daną macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o wymiarach $m \times n$ dzielimy na bloki A^{ij} przy użyciu $p-1$ linii poziomych i $q-1$ linii pionowych. Blok A^{ij} jest macierzą o wymiarach $m_i \times n_j$, gdzie:

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p = m \tag{1.1}$$

oraz

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_q = n.$$

Mamy zatem:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1q} \\ A^{21} & A^{22} & \dots & A^{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{p1} & A^{p2} & \dots & A^{pq} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Macierz **A** daną wzorem (1.2) nazywamy macierzą blokową. Jej szczególnym przypadkiem jest macierz brzegowa. Jest to bowiem macierz blokowa, w której:

1) blok A^{11} jest macierzą nieosobliwą stopnia S,
2) bloki $A^{12}, \ldots, A^{1q}$ są S-wymiarowymi wektorami kolumnowymi,
3) bloki $A^{21}, \ldots, A^{p1}$ są S-wymiarowymi wektorami wierszowymi,
4) bloki $A^{ij} (i = 2, 3, \ldots, p,\ j = 2, 3, \ldots, q)$ są liczbami, czyli macierzami o wymiarach 1×1.

Macierz blokową zapisaną w postaci macierzy, której bloki spełniają warunki od 1 do 4, nazywamy wielokrotną macierzą brzegową.

Odnotujmy jeszcze, że każda macierz brzegowa jest macierzą blokową, ale nie każda macierz blokowa jest macierzą brzegową. Aby nią być, musi spełniać warunki od 1 do 4.

Przykład 1.1. Macierz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

zapisana w postaci:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right] \tag{1.4}$$

nie jest macierzą brzegową, bo nie jest spełniony postulat 1.

Ta sama macierz **A** zapisana w postaci:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right] \tag{1.5}$$

jest macierzą brzegową, bo są spełnione wszystkie postulaty od 1 do 4.

Istotnie, blok $A^{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ jest macierzą kwadratową, wektory $A^{12} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ oraz $A^{13} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ są wektorami kolumnowymi dwuwymiarowymi, blok $A^{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ jest dwuwymiarowym wektorem wierszowym, pozostałe zaś bloki $A^{22} = [5]$ oraz $A^{23} = [7]$ są macierzami o wymiarach 1×1, czyli liczbami.

Zakładamy, że macierz wyjściowa jest macierzą kwadratową stopnia n, np.:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Wówczas macierz postaci:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \tag{1.7}$$

jest pojedynczą macierzą brzegową (użyliśmy jednej linii poziomej i jednej linii pionowej). Tę samą macierz możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 8 & 2 \\ \hline 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]. \tag{1.8}$$

Tym razem użyliśmy dwóch linii poziomych i tyluż pionowych. Jest to zatem podwójna macierz brzegowa. Wynika z tego, że macierz kwadratowa stopnia n może być zapisana w postaci co najwyżej $(n-1)$-krotnej macierzy brzegowej. Innymi słowy, macierz kwadratową stopnia n możemy przedstawić w postaci k-krotnej macierzy brzegowej $(k < n)$.

Dla dalszych rozważań wygodniej będzie posługiwać się następującym zapisem wielokrotnej macierzy brzegowej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{f}_k \\ \mathbf{g}_1 & & & \\ \dots & & \mathbf{Q}_{rk} & \\ \mathbf{g}_r & & & \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

W formule (1.9) rolę macierzy A^{11} (zob. zapis (1.2)) odgrywa macierz $\mathbf{A}_1$, rolę bloków A^{1j} dla $j = 2, 3, \dots, q$ odgrywają wektory $\mathbf{f}_t$ $(t = 1, 2, \dots, k)$, natomiast rolę bloków A^{i1} dla $i = 2, 3, \dots, p$ (zob. (1.2)) odgrywają wektory $\mathbf{g}_d$ $(d = 1, 2, \dots, r)$.

Na koniec zauważmy, że bloki A^{ij} $(i = 2, 3, \dots, p,\ j = 2, 3, \dots, q)$ tworzą obecnie macierz $\mathbf{Q}_{rk}$ o wymiarach $r \times k$ i elementach q_{zv} $(z = 1, 2, \dots, r,$ $v = 1, 2, \dots, k)$.

Dodajmy jeszcze, że macierz $\mathbf{A}_1$ podaną w zapisie (1.9) nazywamy macierzą wewnętrzną macierzy brzegowej $\mathbf{A}$.

W pracy Kolupy i Szczepańskiej-Gruźlewskiej [1991] udowodniono następujące

Twierdzenie 1.1. Na macierzy brzegowej $\mathbf{A}$ danej wzorem (1.9) wykonujemy przekształcenie elementarne (zob. wstęp) takie, że:

α – wewnętrzna macierz $\mathbf{A}_1$ przechodzi w górną macierz trójkątną (zera poniżej głównej przekątnej) z jednostkową główną przekątną,

β – wektory $\mathbf{g}_k$, $k = 1, 2, \dots, r$, przechodzą w wektory zerowe.

Wówczas macierz $\mathbf{Q}_{rk} = [q_{zv}]$ o wymiarach $r \times k$ przechodzi w macierz $\mathbf{D}_{rk} = [d_{zv}]$ również o wymiarach $r \times k$, przy czym

$$d_{zv} = q_{zv} - \mathbf{g}_z \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{f}_v. \tag{1.10}$$

Odwołamy się do ilustracji twierdzenia 1.1.

Przykład 1.2. Dana jest macierz $\mathbf{A}$ postaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Zapiszmy ją jako podwójną macierz brzegową:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 \end{array}\right]. \tag{1.12}$$

Na tej macierzy wykonamy przekształcenia α i β.

Mamy zatem kolejno:

$$\mathbf{A} \sim \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 0 & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \hline 0 & \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right]. \tag{1.13}$$

W wyniku tych operacji macierz [3] została przekształcona w macierz górną trójkątną z jednostkową przekątną (jest to macierz zdegenerowana), natomiast macierz:

$$\mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

została przekształcona w macierz:

$$\mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

Sprawdzimy poprawność dokonanych obliczeń, stosując wzór (1.10). Mamy zatem:

$$\begin{aligned} d_{11} &= q_{11} - \mathbf{g}_1\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_1 = 2 - 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \\ d_{12} &= q_{12} - \mathbf{g}_1\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_2 = 5 - 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}, \\ d_{21} &= q_{21} - \mathbf{g}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_1 = 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}, \\ d_{22} &= q_{22} - \mathbf{g}_2\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}_2 = 4 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Niech dana będzie macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o wymiarach $m \times n$. Symbolem $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ oznaczamy macierz transponowaną, powstałą przez zapisanie wierszy macierzy $\mathbf{A}$ w kolumnach, czyli $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = [a_{ji}]_{n\times m}$.

Rozpatrzymy teraz macierz kwadratową $\mathbf{A}$ stopnia $n+1$. Ma ona postać:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}. \tag{1.15}$$

Zapiszemy ją w postaci macierzy brzegowej:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{f} \\ \hline \mathbf{g} & z \end{array}\right], \tag{1.16}$$

gdzie $\mathbf{A}_1 = [a_{ij}]$ jest macierzą kwadratową stopnia n. Jest to macierz wewnętrzna macierzy brzegowej $\mathbf{A}$ danej wzorem (1.16). Z kolei:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [g_1\ g_2\ \dots\ g_n] \quad \text{dla } g_i = a_{n+1,i},\ \ i = 1, 2, \dots, n, \\ \mathbf{f}^{\mathrm{T}} &= [f_1\ f_2\ \dots\ f_n] \quad \text{dla } f_j = a_{j,n+1},\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \\ z &= a_{n+1,n+1}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Przykład 1.3. Macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

zapiszemy w postaci (1.16). Mamy zatem:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{f} \\ \hline \mathbf{g} & z \end{array}\right], \tag{1.19}$$

czyli

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = 4. \tag{1.20}$$

W pracy Kolupy [1982] podane jest następujące

Twierdzenie 1.2. Jeśli A_{ij} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy wewnętrznej $\mathbf{A}_1$, to:

$$\det \mathbf{A} = z \det \mathbf{A}_1 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} g_i f_j, \tag{1.21}$$

gdzie symbole $\det \mathbf{A}_1$ oraz $\det \mathbf{A}$ oznaczają wyznaczniki macierzy odpowiednio $\mathbf{A}_1$ oraz $\mathbf{A}$ (zob. wzór (1.16)).

Zauważmy, że:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} g_i f_j = \mathbf{g}\left(\mathbf{A}_1^{\mathrm{D}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f}, \tag{1.22}$$

gdzie $\mathbf{A}_1^{\mathrm{D}}$ oznacza macierz dołączoną, czyli macierz o elementach A_{ij} stanowiących dopełnienia algebraiczne elementów a_{ij} macierzy wewnętrznej $\mathbf{A}_1$, natomiast symbol T w indeksie górnym oznacza macierz transponowaną. Na podstawie (1.19) dostajemy:

$$\det \mathbf{A} = z \det \mathbf{A}_1 - \mathbf{g}\left(\mathbf{A}_1^{\mathrm{D}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f}. \tag{1.23}$$

Zależność tę zilustrujemy przykładem.

Przykład 1.4. Posłużmy się macierzą $\mathbf{A}$ daną wzorem (1.18) i zapisaną w postaci (1.19) jako macierz brzegowa.

Obliczamy:

$$A_{11}^1 = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = 9, \quad A_{12}^1 = -\det\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -12, \quad A_{13}^1 = \det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 14,$$

$$A_{21}^1 = -\det\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = -10, \quad A_{22}^1 = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 4, \quad A_{23}^1 = -\det\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 0,$$

$$A_{31}^1 = -\det\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -3, \quad A_{32}^1 = -\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 4, \quad A_{33}^1 = \det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -14.$$

Wówczas:

$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 14 \\ -10 & 4 & 0 \\ -3 & 4 & -14 \end{bmatrix},$$

skąd:

$$\left(\mathbf{A}_1^{\mathrm{D}}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -3 \\ -12 & 4 & 4 \\ 14 & 0 & -14 \end{bmatrix} \quad \text{(transponowana macierz dołączona).}$$

Ponieważ $\det \mathbf{A}_1 = 18 + 20 - 6 - 60 = -28$, przeto

$$z \det \mathbf{A}_1 = 4 \cdot (-28) = -112.$$

Mamy zatem:

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{A}_1^{\mathrm{D}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -10 & -3 \\ -12 & 4 & 4 \\ 14 & 0 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -22.$$

Ostatecznie:

$$\det \mathbf{A} = -112 - (-22) = -90.$$

Z twierdzenia 1.2 wynika kolejne

Twierdzenie 1.3. Jeśli macierz wewnętrzna $\mathbf{A}_1$ macierzy brzegowej $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, to:

$$\frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}_1} = z - \mathbf{g}\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}. \tag{1.24}$$

Ze wzoru (1.24) widać, że wartość $\mathbf{g}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}$ można obliczyć za pomocą wzoru:

$$\mathbf{g}\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f} = z - \frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}_1}. \tag{1.25}$$

Na podstawie wzoru (1.25) można wysnuć wniosek, że chcąc obliczyć wartość $\mathbf{g}\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{f}$, należy obliczyć wyznaczniki stojące po prawej stronie tego wzoru. Jest to sugestia całe szczęście fałszywa, bowiem obliczenie jednego wyznacznika jest kłopotliwym zabiegiem numerycznym, natomiast obliczenie dwóch wyznaczników jest już bardzo pracochłonne.

Poniżej podamy postępowanie, według którego możemy obliczyć iloraz $\det \mathbf{A}$ przez $\det \mathbf{A}_1$ bez osobnego obliczania każdego z wymienionych wyznaczników.

Dla macierzy $\mathbf{A}_1$ danej wzorem (1.20) obliczyliśmy $\det \mathbf{A}_1 = -28$ oraz $\det \mathbf{A} = -90$, wobec czego:

$$\frac{\det \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}_1} = \frac{45}{14}. \tag{1.26}$$

Jednocześnie na podstawie twierdzenia 1.1 mamy:

$$\mathbf{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{5}{14} & \frac{45}{14} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{45}{14} \end{array}\right].$$

Wynik ten prosimy porównać z rezultatem (1.26).

Na zakończenie przeglądu własności macierzy brzegowej podamy jeszcze następujące

Twierdzenie 1.4. Jeśli macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ są macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times n$, $n \times p$, $p \times n$, $p \times p$, to wyznacznik macierzy $\mathbf{F}$ postaci

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

przy założeniu nieosobliwości macierzy $\mathbf{A}$ (przy założeniu nieosobliwości macierzy $\mathbf{D}$) jest odpowiednio równy

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{A} \det \left(\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right), \tag{1.28}$$

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{D} \det \left(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} \right). \tag{1.29}$$

Dowód twierdzenia 1.4 podany jest w pracy Kolupy i Szczepańskiej-Gruźlewskiej [1991].

Dodajmy jeszcze, że macierz **M** postaci

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

oraz macierz **N** dana wzorem

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$$

noszą nazwę dopełnień Schura.

1.2. Zadania

1.1. Dane są następujące macierze:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix},$

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix},$

c) $C = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$

Zapisać każdą z nich w przynajmniej dwóch różnych postaciach macierzy brzegowych.

1.2. Na podanych macierzach brzegowych:

a) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 3 & 1 \end{array}\right],$

b) $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right],$

c) $$\mathrm{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline 7 & 4 & 3 \end{array}\right],$$

wykonać przekształcenia α i β.

1.3. Dana jest macierz brzegowa postaci:

$$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 & \multicolumn{1}{c}{1} & 5 \\ \cline{1-2} 1 & 0 & \multicolumn{1}{c}{1} & 2 \end{array}\right].$$

Wykonać przekształcenia α i β.

1.4. Dla macierzy brzegowych postaci:

a) $$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

b) $$\mathrm{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right],$$

wyznaczyć iloraz det $\mathbf{A}$ przez det $\mathbf{A}_1$:

I) bezpośrednio obliczając det $\mathbf{A}_1$, a następnie det $\mathbf{A}$,

II) wykonując przekształcenia α i β.

1.5. Czy w wyniku wykonania przekształceń α i β na macierzy brzegowej postaci:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ \hline 8 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

na miejscu zera otrzymamy 4?

1.6. Dana jest macierz brzegowa:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} d_1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & d_2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & d_3 & a_3 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & z \end{array}\right]$$

oraz macierz

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzić, że jeśli $d_i \neq 0$, to:

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}_1) \cdot \left(z - \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i b_i}{d_i} \right).$$

1.3. Odpowiedzi i wskazówki

1.1. a) Na przykład

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 5 & 4 \end{array}\right] \text{ lub } \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 3 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \end{array}\right],$$

b) np.

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right] \text{ lub } \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|ccc} 6 & 3 & 8 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 5 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right],$$

c) tylko

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} 6 & 3 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \end{array}\right].$$

1.2. a) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{17}{3} \\ \hline 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{17}{7} \\ \hline 0 & 0 & * \end{array}\right] \quad * = -\frac{17}{7} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{26}{7},$

b) $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -18 \\ \hline 0 & -6 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 25 \end{array}\right],$

c) $\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline 7 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 4 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -31 \end{array}\right].$

1.3. $\mathbf{A} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$

1.4. aI) $\det \mathbf{A}_1 = 13$, $\det \mathbf{A} = 4$,

aII) $\mathbf{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{13}{3} & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} \\ \hline 0 & 0 & \frac{4}{13} \end{array}\right],$

bI) $\det \mathbf{A}_1 = 1$, $\det \mathbf{A} = -27$,

bII) $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 4 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right].$$

1.5. Nie, mamy bowiem:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ \hline 8 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 4 & \frac{11}{3} \\ \hline 0 & -2 & -\frac{4}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{11}{12} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

1.6. Stosując przekształcenia α i β, otrzymujemy:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} d_1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & d_2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & d_3 & a_3 \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a_1}{d_1} \\ 0 & d_2 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & d_3 & a_3 \\ \hline 0 & b_2 & b_3 & z - \frac{a_1 b_1}{d_1} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a_1}{d_1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_2}{d_2} \\ 0 & 0 & d_3 & a_3 \\ \hline 0 & 0 & b_3 & z - \frac{a_1 b_1}{d_1} - \frac{a_2 b_2}{d_2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a_1}{d_1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a_2}{d_2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_3}{d_3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & z - \frac{a_1 b_1}{d_1} - \frac{a_2 b_2}{d_2} - \frac{a_3 b_3}{d_3} \end{array}\right].$$

Rozdział 2. Działania na macierzach z wykorzystaniem macierzy brzegowych

2.1. Podstawy teoretyczne

W tym rozdziale omówimy kolejno dodawanie macierzy, odejmowanie i mnożenie macierzy w sensie Cauchy'ego oraz mnożenie macierzy przez liczbę (liczby przez macierz).

Rozpatrzmy dwie macierze $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ oraz $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ o tych samych wymiarach $m \times n$. Podkreślamy, iż tylko wówczas możemy obliczyć ich sumę $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, która również jest macierzą o wymiarach $m \times n$.

Do jej wyznaczenia korzystamy z macierzy brzegowej postaci:

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_m & \mathbf{A} \\ \hline -\mathbf{I}_m & \mathbf{B} \end{array}\right]. \tag{2.1}$$

Na macierzy $\mathbf{D}$ wykonujemy przekształcenia β (przekształceń α nie trzeba wykonywać, gdyż macierz $\mathbf{I}_m$ jest górną macierzą trójkątną z jednostkową główną przekątną).

Po ich wykonaniu na miejscu macierzy $\mathbf{B}$ podanej w macierzy $\mathbf{D}$ (zob. wzór (2.1)) wystąpi szukana suma $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Odwołajmy się do przykładów.

Przykład 2.1. Dodajmy macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ o wymiarach 2×3 do macierzy $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ o takich samych wymiarach 2×3.

Macierz $\mathbf{D}$ ma postać:

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ \hline -1 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 & 6 \end{array}\right].$$